Modern Physics **现代物理, 2013, 3, 99-105**
http://dx.doi.org/10.12677/mp.2013.34018 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/mp.html)

Quaternion, Invariance of 4-Dimensional Interval and Transformations of Spacetime Coordinates

Guangtao Ding

College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu
Email: dgt695@sina.com

Received: Jul. 10th, 2013; revised: Jul. 28th, 2013; accepted: Aug. 4th, 2013

Abstract: By the use of quaternion, the transformations of space-time coordinates in special relativity are studied. 1) The general transformations in quaternion form are derived, which preserve the invariance of 4-dimensional interval, and it is found that the invariance of the interval can not determine the Lorentz transformation uniquely. 2) Based on the condition that preserves the invariance of time, the general transformations reduce to the first kind of special transformations, in which the space rotations are included. 3) Based on the condition that preserves the invariance of a space coordinate, the general transformations reduce to the second kind of special transformations, in which the proper Lorentz transformations are included. It is pointed out that the quaternion form of Lorentz transformations in some literatures should be amended. 4) From the general transformations in quaternion form, two types of new transformations are introduced, which are discrete transformations, including identical, reflection and transposition ones, and unilateral transformations. These new transformations are different from the traditional space rotations and the normal Lorentz transformations.

Keywords: Special Relativity; Quaternion; Space-Time; Invariance of 4-Dimensional Interval; Lorentz Transformation

四元数四维间隔不变性和时空坐标变换

丁光涛

安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖
Email: dgt695@sina.com

收稿日期：2013 年 7 月 10 日；修回日期：2013 年 7 月 28 日；录用日期：2013 年 8 月 4 日

摘　要：利用四元数研究狭义相对论中的时空坐标变换。1) 导出保持四维间隔不变性的时空坐标一般变换的四元数形式，说明四维间隔不变性不能唯一确定 Lorentz 变换。2) 根据保持时间不变的条件，从一般变换中得到第一类特殊变换，其中包含空间旋转变换。3) 根据保持一个空间坐标不变的条件，从一般变换中得到第二类特殊变换，其中包含正常的 Lorentz 变换；同时指出某些文献中的四元数形式 Lorentz 变换式有待商榷之处。4) 从时空坐标一般变换中引入两种不同于传统的空间旋转变换和正常的 Lorentz 变换的新型变换，一种是离散变换，包含恒等变换，反射变换，换位变换等；另一种是单边变换。

关键词：狭义相对论；四元数；时空；四维间隔不变性；Lorentz 变换

1. 引言

在狭义相对论中，Lorentz 变换构成分析其全部结果的基础，对这个变换的研究热情经久不衰。A. Einstein 以狭义相对性原理和光速恒定原理作为狭义相对论的基本假设，由此导出 Lorentz 变换，后来的许多学者也按此思路给出推导；由于由这两个基本假

设能够导出四维时空间隔不变性，故也有人认为可以直接从这个不变性导出 Lorentz 变换，比较普遍的看法是，Lorentz 变换由这两个基本假设或由四维时空间隔不变性唯一确定，也有人指出从两个基本假设或从四维时空间隔不变性出发，都需要引入补充条件和假设才能得到 Lorentz 变换，W. Pauli 曾经在其著作《相对论》中基本上重复了 Einstein 的从两个基本假设推导 Lorentz 变换的过程，但是，他在目录里就指出“Lorentz 变换的公理本质”，这意味着什么？值得思考[1-3]。从狭义相对论提出直到现在，人们利用各种各样的数学工具和物理方法去推导和表示 Lorentz 变换，其中包括四元数方法[4-12]。Hamilton 经过十年的研究，在 1843 年提出了四元数概念以推广平面问题中的复数方法来解决三维空间中的问题，一百七十年来，对它的研究经历由热到冷再由冷到热的过程。四元数将实数、复数、矢量作为它的特殊情况，对物理学来说理应是一种有力的数学工具，但是早期并未得到普遍的重视。近几十年来，在现代物理学的许多学科，如经典力学、相对论、量子理论、电磁理论和引力理论等，四元数形式的理论一直在发展中[4-8,13-16]。狭义相对论以及相关的物理学科都利用四维时空来描述，因此，利用四元数来处理这些理论，应当是一种自然的选择。但是，需要指出的是，众多的利用四元数推导 Lorentz 变换的文献中，有的并没有给出严格的推导，而是将已知的变换规律与四元数方法对接起来，得到的有些结果有待商榷。然而，四元数物理理论的深入和发展，需要对四元数表示的狭义相对论的时空变换规律做出全面而严格的论证，导出准确的变换式，这是本文研究的出发点，我们利用四元数严格推导保持四维时空间隔不变的普遍的时空变换，通过引入多种补充的条件和要求，导出多种多样的不同种类的时空坐标变换，其中包括通常的空间旋转和正常的 Lorentz 变换，但是本文得到的结果说明某些文献中四元数 Lorentz 变换式不是普遍成立的。此外，本文从四维时空间隔不变还导出一些新的值得重视的时空变换，表明了 Lorentz 变换不能由四维时空间隔不变性唯一确定。

2. 时空坐标的四元数表示

2.1. 四元数乘法和共轭数

四元数是由实单位 1，三个虚单位 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$，和四个数元 a_0, a_1, a_2, a_3 组成的超复数

$$\mathbf{A} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

1 和 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ 通常称为四元数的基。数元可以是实数或复数，前者通常称为实四元数(四元数)，后者通常称为双四元数，前者是后者的特殊情况。四元数单位 1 和 $\mathbf{e}_k$ 的乘积法则为

$$1\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k 1 = \mathbf{e}_k,\quad \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l, \left(j,k,l = 1,2,3\right) \tag{2}$$

双四元数 $\mathbf{A}$ 的共轭数有很多种，例如，四元数(转置)共轭

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3 \tag{3}$$

还可以引入 $\mathbf{A}$ 的其他类型的共轭数，例如，复数共轭

$$\mathbf{A}^* = a_0^* + a_1^*\mathbf{e}_1 + a_2^*\mathbf{e}_2 + a_3^*\mathbf{e}_3 \tag{4}$$

厄米(转置复数复合)共轭

$$\mathbf{A}^+ = a_0^* - a_1^*\mathbf{e}_1 - a_2^*\mathbf{e}_2 - a_3^*\mathbf{e}_3 \tag{5}$$

由于四元数有三个虚单位，故可以引入六种部分转置共轭，例如

$$\mathbf{A}_{12}^{\mathrm{T}} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_{22}^{\mathrm{T}} = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3, \tag{7}$$

这六种共轭数中有三对互为共轭，例如，$\mathbf{A}_{12}^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}_{22}^{\mathrm{T}}$。此外，还可以引入下列类型的共轭，例如：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{12}^+ &= a_0^* + a_1^*\mathbf{e}_1 - a_2^*\mathbf{e}_2 + a_3^*\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{A}_{22}^+ &= a_0^* - a_1^*\mathbf{e}_1 + a_2^*\mathbf{e}_2 - a_3^*\mathbf{e}_3;\end{aligned} \tag{8}$$

在不同的文献中共轭数的名称并没有统一的规定。应当指出，四元数的转置共轭是基的变换，复数共轭是数元的变换，而厄米共轭是基和数元的共同变换。

定义满足下列关系的四元数为 Minkowski 四元数

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \tag{9}$$

根据式(1)和(2)，两个四元数的乘积为

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} = \mathbf{AB} &= q_0 + q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3\\ &= \left(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3\right)\\ &\quad + \left(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2\right)\mathbf{e}_1\\ &\quad + \left(a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3\right)\mathbf{e}_2\\ &\quad + \left(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1\right)\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{10}$$

四元数的模定义为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\|\mathbf{A}\|=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 \tag{11}$$

模等于 1 的四元数称为单位四元数。双四元数的模可能为正数、负数或零。当模不等于零时，定义四元数的逆(四元数)为

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{A}\|} \tag{12}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=1 \tag{13}$$

双四元数的共轭运算和乘法运算之间的规律是

$$\begin{aligned}&(\mathbf{AB})^{*}=\mathbf{A}^{*}\mathbf{B}^{*},\\&(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\\&(\mathbf{AB})^{+}=\mathbf{B}^{+}\mathbf{A}^{+},\end{aligned} \tag{14}$$

2.2. 四维时空坐标的四元数表示

引入四维时空坐标四元数为

$$\mathbf{R}=r_0+r_1\mathbf{e}_1+r_2\mathbf{e}_2+r_3\mathbf{e}_3 \tag{15}$$

$$r_0=ct,\ r_1=\mathrm{i}x,\ r_2=\mathrm{i}y,\ r_3=\mathrm{i}z. \tag{16}$$

式中 i 为复数的虚单位。四维时空(元)间隔为

$$\begin{aligned}ds^2&=\|d\mathbf{R}\|=d\mathbf{R}d\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=dr_0^2+dr_1^2+dr_2^2+dr_3^2\\&=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\end{aligned} \tag{17}$$

3. 保持四维时空间隔不变的普遍时空变换

四元数的优越性之一是既可以表示物理量，又可以表示物理量的变换。设四维时空坐标变换为

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R}'=r_0'+r_1'\mathbf{e}_1+r_2'\mathbf{e}_2+r_3'\mathbf{e}_3 \tag{18}$$

要求这个变换保持四维时空间隔不变，即

$$ds'^2=\|d\mathbf{R}'\|=\|d\mathbf{R}\|=ds^2. \tag{19}$$

这是四维时空中的变换，有 10 个独立的参数，可以先分解成两大类：**第一类变换**——时空坐标原点的移动(时空坐标参考系的平移变换) $\mathbf{T}_1$；**第二类变换**——具有共同原点时空坐标参考系之间的变换 $\mathbf{T}_2$。变换 $\mathbf{T}_1$ 可以表示为

$$\mathbf{R}'=\mathbf{R}+\mathbf{C} \tag{20}$$

式中

$$\mathbf{C}=c_0+c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3 \tag{21}$$

是任意常数四元数，变换是平凡的，有 4 个独立参数，利用这种变换总是能够把任意两个四维时空参考系变换成具有共同原点的参考系。

具有共同原点的四维时空参考系之间的变换 $\mathbf{T}_2$，利用四元数可以表示为

$$\mathbf{R}'=\mathbf{ARB} \tag{22}$$

式中

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}=a_0+a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3,\\&\|\mathbf{A}\|=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1;\\&\mathbf{B}=b_0+b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3,\\&\|\mathbf{B}\|=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=1.\end{aligned} \tag{23}$$

$\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是两个任意的单位四元数，变换(22)具有 6 个独立的参数。容易证明，在 $\mathbf{T}_2$ 变换下四维时空间隔保持不变，即

$$\begin{aligned}ds'^2&=\|d\mathbf{R}'\|=d\mathbf{R}'d\mathbf{R}'^{\mathrm{T}}\\&=\mathbf{A}d\mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}d\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}d\mathbf{R}d\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\\&=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\|d\mathbf{R}\|=\|d\mathbf{R}\|=ds^2.\end{aligned} \tag{24}$$

将式(22)展开，得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}'=r_0'+r_1'\mathbf{e}_1+r_2'\mathbf{e}_2+r_3'\mathbf{e}_3,\\&r_0'=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)r_0-(a_0b_1+a_1b_0+a_3b_2-a_2b_3)r_1\\&\quad-(a_0b_2+a_2b_0+a_1b_3-a_3b_1)r_2-(a_0b_3+a_3b_0+a_2b_1-a_1b_2)r_3,\\&r_1'=(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)r_0+(a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)r_1\\&\quad-(a_3b_0-a_0b_3+a_2b_1+a_1b_2)r_2-(a_0b_2-a_2b_0+a_3b_1+a_1b_3)r_3,\\&r_2'=(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)r_0-(a_0b_3-a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2)r_1\\&\quad+(a_0b_0+a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3)r_2-(a_1b_0-a_1b_0+a_3b_2+a_2b_3)r_3,\\&r_3'=(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)r_0-(a_2b_0-a_0b_2+a_1b_3+a_3b_1)r_1\\&\quad-(a_0b_1-a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2)r_2+(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3)r_3.\end{aligned} \tag{25}$$

这个展开式是以后讨论的基础。

保持四维时空间隔不变普遍的时空变换是上述两大类变换及其组合变换，

$$\mathbf{R}' = \mathbf{ARB} + \mathbf{C} \tag{26}$$

变换(26)称为 Poincare'变换，有 10 个独立参数，分别与 3 个四元数 $\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相关。$\mathbf{C}$ 有 4 个独立参数，$\mathbf{A},\mathbf{B}$ 中共有 8 个数元，但是，由于单位四元数条件，独立的只有 6 个。变换(22)中的 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是彼此无关的可以任意选取的，每选取一对 $\mathbf{A},\mathbf{B}$，就确定一个特定的变换。下面我们不再讨论变换(20)，而是集中研究变换(22)，首先，研究它的两种特殊类型的变换，其中包括三维空间的旋转变换和匀速平动参考系的 Lorentz 变换，然后，再研究其它一些特殊的变换。

4. 第一种特殊变换

4.1. 保持时间不变的特殊变换

变换(22)中有一种特殊变换是绕“0”轴旋转，即要求变换后 $r_0' = r_0$，从物理意义上说，这是保持时间不变的变换。根据式(25)，这种变换要满足下列条件

$$\begin{aligned}
&a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = 1,\\
&a_0b_1 + a_1b_0 + a_3b_2 - a_2b_3 = 0,\\
&a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1 = 0,\\
&a_0b_3 + a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2 = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

取 $a_0 = b_0, a_1 = -b_1, a_2 = -b_2, a_3 = -b_3$，即

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

式(27)就成立，这就是说，对这种变换，式(22)写成

$$\mathbf{R}' = \mathbf{ARA}^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

写成分量形式为

$$\begin{aligned}
r_0' &= r_0,\\
r_1' &= \left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) r_1 + 2\left(a_1a_2 - a_0a_3\right) r_2\\
&\quad + 2\left(a_0a_2 + a_1a_3\right) r_3,\\
r_2' &= 2\left(a_1a_2 + a_0a_3\right) r_1 + \left(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right) r_2\\
&\quad + 2\left(a_2a_3 - a_0a_1\right) r_3,\\
r_3' &= 2\left(a_1a_3 - a_0a_2\right) r_1 + 2\left(a_0a_1 + a_2a_3\right) r_2\\
&\quad + \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) r_3.
\end{aligned} \tag{30}$$

由此可见，在此变换中 r_0 (时间 t)既不改变，也不参与变换，直接参与变换的是三个空间坐标。由于条件(28)，故确定保持时间不变的变换需要也仅需要一个四元数 $\mathbf{A}$，又因为它是一个单位四元数，所以独立的参数只有 3 个。在有些文献中直接将变换(29)称为四维时空中的三维空间旋转变换，在下面实例中可以看到这种理解是不全面的。

4.2. 第一种特殊变换举例

单位四元数 $\mathbf{A}$ 是可以任意选取的，选定不同的 $\mathbf{A}$ 就给定不同的空间变换。例如，

1) 选取 $a_2 = a_3 = 0$，代人式(30)得到

$$\begin{aligned}
&r_0' = r_0,\ r_1' = r_1,\ r_2' = \left(a_0^2 - a_1^2\right) r_2 - 2a_0a_1r_3,\\
&r_3' = 2a_0a_1r_2 + \left(a_0^2 - a_1^2\right) r_3.
\end{aligned} \tag{31}$$

变换中“1”(x)轴不变，是转轴，变换是“2~3”平面内的旋转，是单参数的变换，取

$$a_0 = \cos\frac{\varphi}{2},\ a_1 = -\sin\frac{\varphi}{2} \tag{32}$$

则式(31)写成众所周知的形式

$$\begin{aligned}
&r_0' = r_0,\ r_1' = r_1,\ r_2' = r_2\cos\varphi + r_3\sin\varphi,\\
&r_3' = -r_2\sin\varphi + r_3\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{33}$$

2) 选取 $a_0 = a_1 = 0$，代人式(30)得到

$$\begin{aligned}
&r_0' = r_0,\ r_1' = -r_1,\ r_2' = \left(a_2^2 - a_3^2\right) r_2 + 2a_2a_3r_3,\\
&r_3' = 2a_2a_3r_2 - \left(a_2^2 - a_3^2\right) r_3.
\end{aligned} \tag{34}$$

变换中“1”(x)轴方位不变，但已反向。前面我们已经指出变换(29)不能简单地看作四维时空中的三维空间旋转变换，这就是一个实例。变换(34)可以看作是“2~3”平面内的赝旋转，即“2~3”平面内的旋转与“1”轴反射的组合变换，也是单参数的变换，取

$$a_2 = \cos\frac{\varphi}{2},\ a_3 = -\sin\frac{\varphi}{2} \tag{35}$$

则式(31)写成

$$\begin{aligned}
&r_0' = r_0,\ r_1' = -r_1,\ r_2' = r_2\cos\varphi - r_3\sin\varphi,\\
&r_3' = -r_2\sin\varphi - r_3\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{36}$$

变换(29)还有其它的变换形式，例如 2 个参数的变换，但不再举例了。由于这样一种变换的存在，总可以将两个四维时空中参考系对应的空间坐标轴变换到相重合或者是相平行的位置上，下面在讨论两个

相对作匀速平动参考系的变换时，就只考虑这种情况，以简化讨论，又不失去一般性。

5. 第二种特殊变换

5.1. 保持某一空间坐标不变的特殊变换

变换(22)中有一种特殊变换是保持某一个空间坐标不变，取此轴为“1”(x)轴，即要求变换后$r_1'=r_1$，从物理意义上说，这是保持x坐标不变的变换。根据式(25)，这种变换要满足下列条件

$$\begin{aligned}a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2&=0,\\a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=1,\\a_2b_1+a_1b_2+a_3b_0-a_0b_3&=0,\\a_1b_3+a_3b_1+a_0b_2-a_2b_0&=0.\end{aligned}\tag{37}$$

取$a_0=b_0,a_1=-b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$，即

$$\mathbf{B}=a_0-a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3=\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}\tag{38}$$

式(37)就成立，这就是说，变换(22)写成

$$\mathbf{R}'=\mathbf{ARA}_{11}^{\mathrm{T}}\tag{39}$$

写成分量形式为

$$\begin{aligned}r_0'&=\left(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)r_0-2\left(a_0a_2+a_1a_3\right)r_2\\&\quad+2\left(a_1a_2-a_0a_3\right)r_3,\ r_1'=r_1,\\r_2'&=2\left(a_0a_2-a_1a_3\right)r_0+\left(a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2\right)r_2\\&\quad-2\left(a_0a_1+a_2a_3\right)r_3,\\r_3'&=2\left(a_0a_3+a_1a_2\right)r_0+2\left(a_0a_1-a_2a_3\right)r_2\\&\quad+\left(a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2\right)r_3.\end{aligned}\tag{40}$$

由此可见，在此变换中r_1(空间坐标x)既不改变，也不参与变换。由于条件(38)，故确定这种变换也仅需要一个四元数$\mathbf{A}$，又因为它是一个单位四元数，所以独立的参数只有 3 个。这里需要强调指出，条件(38)是一个新的重要结果，它表明$\mathbf{B}$不是$\mathbf{A}$的厄米共轭四元数，一些国内外文献中将沿着x轴方向平动参考系的变换(39)写成

$$\mathbf{R}'=\mathbf{ARA}^{+}=\mathbf{ARA}\tag{41}$$

是有待商榷的。将$\mathbf{B}=\mathbf{A}$代人式(37)，该式不能成立，即在一般情况下变换式(41)不能保持四维时空间隔不变。在下面实例中可以看到只有在非常特殊情况下才能将变换(39)直接写成(41)。此外，还有保持y坐标或z坐标不变的变换与此相似，不再专门讨论。

5.2. 第二种特殊变换举例

与第一种特殊变换类似，选取一个单位四元数$\mathbf{A}$，就给定一个特定的变换，下面证明这些特定的变换中包含正常的 Lorentz 变换。

1) 选取$a_2=a_3=0$，代人式(40)得到

$$\begin{aligned}&r_0'=r_0,\ r_1'=r_1,\ r_2'=\left(a_0^2-a_1^2\right)r_2-2a_0a_1r_3,\\&r_3'=2a_0a_1r_2+\left(a_0^2-a_1^2\right)r_3.\end{aligned}\tag{42}$$

这个变换与变换(31)相同，同时保持了时间 t 和坐标x不变，即是绕x轴的空间旋转变换，是第一种特殊变换和第二种特殊变换共有的变换。这是预期的结果，表明上述关于保持四维时空间隔不变的变换理论是自洽的。

2) 选取$a_1=a_2=0$，代人式(40)得到

$$\begin{aligned}&r_0'=\left(a_0^2-a_3^2\right)r_0-2a_0a_3r_3,\ r_1'=r_1,\ r_2'=r_2,\\&r_3'=2a_0a_3r_0+\left(a_0^2-a_3^2\right)r_3.\end{aligned}\tag{43}$$

这也是单参数的变换。为了确定这个变换，考虑下列实际物理情况：静止参考系 K 和运动参考系 K’时空原点重合，对应的空间坐标轴平行，K’系相对于 K 系沿z轴方向匀速平动，研究 K’系原点的运动可得

$$0=2a_0a_3ct+\left(a_0^2-a_3^2\right)ivt\tag{44}$$

结合单位四元数条件，有

$$a_0^2+a_3^2=1\tag{45}$$

解式(44)和(45)得

$$a_0=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}},\ a_3=-i\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}};\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta=\frac{v}{c}.\tag{46}$$

必须指出，所得的a_0,a_3的根号前面的符号的选取是使得所导出的变换，在光速c趋向无无穷大时，与 Galilie 变换一致。在这种特殊情况下，$\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}$，变换(39)才可以写成式(41)形式，$\mathbf{A}$是 Minkowski 四元数。将式(46)代人(45)，并将变量写成通常的时空坐标t、x、y和z，则得到

$$t'=\gamma\left(t-\frac{vz}{c^2}\right),\ x'=x,\ y'=y,\ z'=\gamma\left(z-vt\right).\tag{47}$$

这是沿z轴平动参考系的 Lorentz 变换。再次强调指出，式(47)的导出，是在式(39)中选取特定的$\mathbf{A}$，

并利用了狭义相对论和经典力学中时空坐标变换对应原理才导出的结果。

3) 选取 $a_0 = a_1 = 0$，代人式(40)得到

$$\begin{aligned} &r_0' = -r_0,\ r_1' = r_1,\ r_2' = -\left(a_2^2 - a_3^2\right)r_2 - 2a_2a_3r_3, \\ &r_3' = -2a_2a_3r_2 + \left(a_2^2 - a_3^2\right)r_3. \end{aligned} \tag{48}$$

这个变换不是通常的 Lorentz 变换，可以看作时间反演和类似空间旋转变换的组合变换。

4) 选取 $a_0 = a_3 = 0$，代人式(40)得到

$$\begin{aligned} &r_0' = \left(a_1^2 - a_2^2\right)r_0 + 2a_1a_2r_3,\ r_1' = r_1,\ r_2' = -r_2, \\ &r_3' = 2a_1a_2r_0 - \left(a_1^2 - a_2^2\right)r_3. \end{aligned} \tag{49}$$

这个变换也不是通常的 Lorentz 变换，可以看作部分空间坐标反射和类似 Lorentz 变换的组合变换。

与第一种特殊变换情况相类似，变换(39)还有其它的变换形式，例如 2 个参数的变换，也不再举例讨论了。

6. 若干特定类型的时空变换

6.1. 离散型变换

变换(22)要求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是单位四元数，给定它们就确定一个特定的变换。前两节是根据某些物理要求，如一定要保持时间或某一空间坐标不变，来讨论 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 应该满足的其它条件，本节直接从变换(22)出发，给出 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，然后再讨论变换的意义。首先，研究离散型的变换，例如：

1) 恒等变换：取 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{1}$，或 $\mathbf{A} = -\mathbf{B} = \mathrm{i}$，则

$$\mathbf{R}' = r_0 + r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}. \tag{50}$$

2) 完全反射变换：取 $\mathbf{A} = -\mathbf{B} = \mathbf{1}$，或 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathrm{i}$，则

$$\mathbf{R}' = -r_0 - r_1\mathbf{e}_1 - r_2\mathbf{e}_2 - r_3\mathbf{e}_3 = -\mathbf{R}. \tag{51}$$

3) 部分反射变换：例如，如果取 $\mathbf{A} = -\mathbf{B} = \mathbf{e}_1$，则

$$\mathbf{R}' = r_0 + r_1\mathbf{e}_1 - r_2\mathbf{e}_2 - r_3\mathbf{e}_3. \tag{52}$$

如果取 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{e}_1$，则

$$\mathbf{R}' = -r_0 - r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3. \tag{53}$$

4) 时空坐标易位变换：例如，如果取 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1, \mathbf{B} = \mathbf{e}_2$，则

$$\mathbf{R}' = r_0\mathbf{e}_3 - r_1\mathbf{e}_2 - r_2\mathbf{e}_1 + r_3. \tag{54}$$

如果取 $\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\right), \mathbf{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\right)$，则

$$\mathbf{R}' = -r_0\mathbf{e}_3 - r_1\mathbf{e}_2 + r_2\mathbf{e}_1 - r_3. \tag{55}$$

这里讨论的变换中，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间无关，不存在某种共轭关系，但是这些变换都能保持四维时空间隔不变。

6.2. 单边变换

如果在 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间预先选定一个为 1，则将导出新的类型变换——单边变换。如果取

$\mathbf{A} = 1$，则可以称为右单边变换

$$\mathbf{R}' = \mathbf{RB} \tag{56}$$

如果取 $\mathbf{B} = 1$，则称为左单边变换

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} \tag{57}$$

因为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是单位四元数，所以变换(56)和(57)也都保持四维时空间隔不变，然而，它们与变换(29)和(39)都是不同的。

以左单边变换为例，如果取

$$\mathbf{A} = \gamma + \mathrm{i}\beta\gamma\mathbf{e}_1 \tag{58}$$

代入变换(57)，则得到

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = &\gamma\left(r_0 - \mathrm{i}\beta r_1\right) + \gamma\left(r_1 + \mathrm{i}\beta r_0\right)\mathbf{e}_1 \\ &+ \gamma\left(r_2 - \mathrm{i}\beta r_3\right)\mathbf{e}_2 + \gamma\left(r_3 + \mathrm{i}\beta r_2\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{59}$$

以右单边变换为例，如果取

$$\mathbf{B} = \gamma + \mathrm{i}\beta\gamma\mathbf{e}_1 \tag{60}$$

代入变换(56)，则得到

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = &\gamma\left(r_0 - \mathrm{i}\beta r_1\right) + \gamma\left(r_1 + \mathrm{i}\beta r_0\right)\mathbf{e}_1 \\ &+ \gamma\left(r_2 + \mathrm{i}\beta r_3\right)\mathbf{e}_2 + \gamma\left(r_3 - \mathrm{i}\beta r_2\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{61}$$

变换(59)和(61)与沿 x 轴平动的 Lorentz 变换相似，却不是 Lorentz 变换，在这种变换中，y 轴和 z 轴不再保持不变，但是更能反映“时空同质”[7]，因此，有必要研究这个变换的意义和可能存在的物理应用。

7. 结论和讨论

1) 本文利用四元数，全面讨论了四维时空坐标的表示，以及保持四维时空间隔不变性的时空变换。这样的变换包括有 4 个独立参数的时空坐标平移变换(20)，有 6 个独立参数的共同时空原点的参考系间的

一般变换(22)，和它们的组合变换(26)。变换(22)是研究的重点，其中包括三维空间旋转变换和匀速平动坐标系的 Lorentz 变换，但是，不能把一般变换(22)简单地归结为四维时空的旋转变换。

2) 深入讨论了一般变换(22)的两种特殊变换，它们与特定的物理条件相关联。第一种变换要求保持时间变量不变，第二种变换要求保持某一空间坐标变量不变，这样的限制条件使得(22)中彼此无关的两个变换单位四元数 **A** 和 **B** 不再无关，而是存在一种共轭关系，因此，两种特殊变换各自有 3 个独立参数。

3) 变换(22)的第一种变换要求 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，这种变换(29)可以称为准空间旋转变换。通过对其特例的研究，具体给出单位四元数 **A** 某些分量，直接证明这种变换中有些变换是三维空间中旋转变换，而更多的变换是组合了空间反射变换的赝旋转变换。这就是说，某些文献中直接把变换(29)等同于空间旋转变换，是值得商榷的。

4) 变换(22)的第二种变换要求一个空间坐标(设为 x 轴)不变，导出 $\mathbf{B}=\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}$，变换(22)成为(39)，变换式(39)展开式和讨论的实例表明第二种变换不能简单地直接归结为 Lorentz 类型的变换。一个实例表明第一种特殊变换和第二种特殊变换含有共同的变换，保持了时间 t 和坐标 x 不变，这个实例也同时表明本文关于保持四维时空间隔不变的变换理论是自洽的。在另一个比较详细讨论的实例中，通过恰当选取 **A** 的某些分量，以及引入一些物理意义明确的条件，导出了正常的匀速平动坐标系的 Lorentz 变换，变换式(39)可以写成(41)形式，然而这种形式是(39)的一个特定的情况。这就是说，某些文献中直接把 Lorentz 变换写成式(41)，也是值得商榷的，在普遍情况下式(41)不是正确的 Lorentz 变换表示式。

5) 本文还讨论了保持四维时空间隔不变的两种特殊变换，一种是离散型变换，包括恒等变换、完全和部分反射变换、时空坐标易位变换等；另一种是单边变换，包括左和右单边变换，这些变换不同于变换(29)和(39)。这两种特殊变换，以及前面导出的众多不同于空间旋转变换和正常 Lorentz 变换的变换，有什么物理意义，在物理学领域中能否获得实际应用，都需要进一步研究，

6) 综上所述，本文利用四元数从四维时空间隔不变性出发，推导出对应的时空坐标普遍变换，然后，进一步引入某些物理条件和数学假设，导出了通常三维空间旋转变换和正常的 Lorentz 变换，以及其它诸多不同的变换，这个讨论过程及其得到的结果尚未见于其它文献。这些结果整体表明四维时空间隔不变性与 Lorentz 变换之间并不存在唯一确定的对应关系，Lorentz 变换可以导出四维时空间隔不变性，而如果要从四维时空间隔不变性导出 Lorentz 变换，还需要引入补充的条件和假设，这些条件和假设中有些物理意义明确，有些在数学上表达简单，而物理意义却不明晰，需要探讨和验证。

参考文献 (References)

[1] A. 爱因斯坦等，著，赵志田，刘一贯，译. 相对论原理[M]. 北京：科学出版社, 1980: 32-43.

[2] W. 泡利，著，凌德洪，周万生，译. 相对论[M]. 上海：上海科学技术出版社, 1979: 1-15.

[3] 朗道•栗弗席兹，著，任朗，袁炳南，译. 场论[M]. 北京：人民教育出版社, 1959: 13-17.

[4] P. R. Girard. The quaternion group and modern physics. European Journal of Physics, 1984, 5(1): 25-32.

[5] A. Waser. Application of bi-quaternions in physics. 2007. www.andre-waser.ch/Publications/ApplicationOfBiQuaternionsInPhysics_EN.pdf

[6] S. De Leo, G. Ducati. Quaternionic groups in physics: A panoramic reviewInternational Journal of Theoretical Physics, 1999, 38(8): 2197-2220.

[7] 许方官. 四元数物理学[M]. 北京：北京大学出版社，2012: 16-24.

[8] I. Abonyi, J. F. Bito and J. K. Tar. A quaternion representation of the Lorentz group for classical applications. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1991, 24(14): 3245-3254.

[9] S. De Leo. Quaternion and special relativity. Journal of Mathematical Physics, 1996, 37(6): 2955-2968.

[10] M. S. Alam, S. Bauk. Quaternion Lorentz transformation. Physics Essays, 2011, 24(2): 158-162.

[11] 王振宇，范文涛. Lorentz 变换的四元数表示[J]. 数学物理学报, 2010, 30A(5): 1377-1381.

[12] 陈光. 广义时空变换理论[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 1994, 2: 15-26.

[13] 丁光涛. 双四元数形式的电磁理论[J]. 中国科学：物理学•力学•天文学, 2012, 42(10): 1029-1039.

[14] 丁光涛. 偏振光学的四元数方法[J]. 光学学报，2013, 33(7): 0726001

[15] A. P. Yefremov. Quaternions: Algebra, geometry and physical theories. Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, 2004, 1: 104-119.

[16] 肖尚彬. 四元数方法及其应用[J]. 力学进展，1993, 23(2): 249-260.

