Modern Physics 现代物理, 2018, 8(3), 132-138
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2018.83016

Hans汉斯

The Orthogonality of 4-Vector Velocity and 4-Vector Force and Its Applications in Teaching

Huaiyang Cui

Department of Physics, Beihang University, Beijing
Email: hycui@buaa.edu.cn

Received: May 3rd, 2018; accepted: May 21st, 2018; published: May 28th, 2018

Abstract

According to the orthogonality of 4-vector velocity and 4-vector force, the Coulomb force between two charged particles is expressed in terms of relativistic 4-vectors, from which the relativistic Lorentz force is derived, and Maxwell equations are discussed in detail; it was pointed out that these derivations form a new method for analyzing the Maxwell equations. In the teaching of electromagnetics and electrodynamics, the orthogonality of 4-vector velocity and 4-vector force provides useful insights into the relationship of the relativity and the Maxwell equations.

Keywords

4-Vector Force, Orthogonality, Lorentz Force

四维速度与四维力的正交性及其在教学中的应用

崔怀洋

北京航空航天大学物理系，北京
Email: hycui@buaa.edu.cn

收稿日期：2018年5月3日；录用日期：2018年5月21日；发布日期：2018年5月28日

摘　要

根据四维速度与四维力的正交性，推导出了四维空间中库仑力的相对论表达式，由此推导出了相对论

文章引用: 崔怀洋. 四维速度与四维力的正交性及其在教学中的应用[J]. 现代物理, 2018, 8(3): 132-138.
DOI: 10.12677/mp.2018.83016

Lorentz力，并详细讨论它与Maxwell方程组的关系；本文指出这些推导形成了一种分析Maxwell方程组的新方法。在电磁学和电动力学教学中，如果从四维速度与四维力正交性出发，能够更好地理解相对论与Maxwell方程组之间的关系。

关键词

四维力，正交性，Lorentz力

1. 引言

在相对论中，一个粒子的四维速度 u 与它受到的四维力 f 之间具有正交性[1]

$$f_\mu u_\mu = 0 \tag{1}$$

这里下标 $\mu = 1,2,3,4$，重复的下标代表求和(爱因斯坦求和约定)。这个正交性是由于四维速度的模 $|u|$ 是一个常量所致，即

$$u_\mu u_\mu = -c^2 \quad \text{or} \quad |u| = ic \tag{2}$$

任何力都不能改变四维速度的模 $|u|$ 而只能改变四维速度的方向[2] [3]。

一个粒子的四维速度 u 与它受到的四维力 f 正交，那么在电磁学和电动力学中这个粒子的经典速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与它受到的经典力 $\boldsymbol{f}$ 矢量是否会正交或垂直？那么，从相对论四维空间变换到我们比较熟悉的三维空间，$(u,f) \Rightarrow (\boldsymbol{v},\boldsymbol{f})$，力的方向是如何变换的呢？这些问题没有一个简单的答案，也没有文献专门讨论这个问题。所以，本文有必要详细讨论四维空间中力的方向问题。

2. 四维空间中力的方向

在相对论四维空间 $(x_1,x_2,x_3,x_4 = ict)$ 中，考虑两个带电粒子 q 和 q'，它们之间的电磁相互作用四维力为 f；这两个粒子的位置在 x 和 x'，它们的四维速度为 u 和 u'，用 m 代表粒子 q 的质量。显然，粒子 q 是在粒子 q' 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动。如图 1 所示，注意，图中用欧几里得矢量垂直表示了四维空间 $(x_1,x_2,x_3,x_4 = ict)$ 的矢量正交，以显示正交的直观性。

在四维力 f 在 R 和 u' 构成的平面内，我们假定可以把四维力 f 的表达式写成

$$f = CR + Du' \tag{3}$$

R 和 u' 是我们选择的两个基矢，如图 1 所示，要求 $R \cdot u' = 0$ 是为了后面讨论的方便，并且定义 $r = |R|$。C 和 D 是相对于这两个基矢的展开系数。使用四维速度 u 与四维力 f 的正交性，我们有

$$u \cdot f = C(u \cdot R) + D(u \cdot u') = 0 \tag{4}$$

消去系数 C，方程(3)变成

$$f = \frac{D}{(u \cdot R)}\left[-(u \cdot u')R + (u \cdot R)u'\right] \tag{5}$$

这样，四维速度 u 与四维力 f 的正交性就决定了四维力 f 的方向。四维力 f 方向的单位矢量 f^0 是

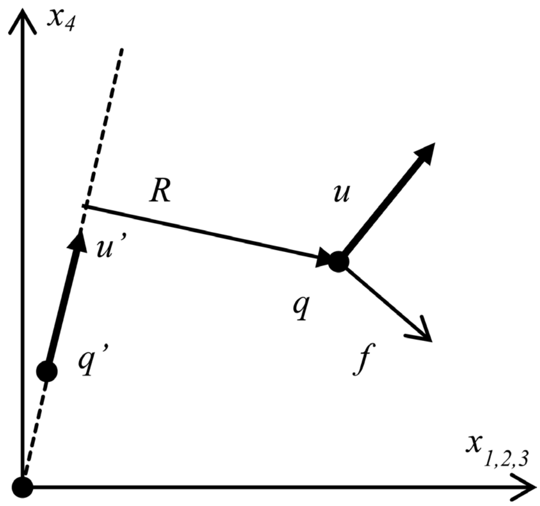

Figure 1. The particle positions, the orthogonality of 4-vector velocity and 4-vector force in the four dimensional space-time
图 1. 四维空间中的两个粒子的相对位置，四维速度与四维力正交(图中用"垂直"来代表"正交")

$$f^0 = \frac{1}{c^2 r}\left[-(u\cdot u')R + (u\cdot R)u'\right] \tag{6}$$

设四维速度 u 与 u' 之间的夹角为 α，很容易验算如下：

$$f^0 = \frac{1}{c^2 r}\left[-\left(|u||u'|\cosh\alpha\right)R + \left(|u||R|\sinh\alpha\right)u'\right] \tag{7}$$

$$f^0\cdot f^0 = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha = 1 \tag{8}$$

知道了四维力 f 方向的单位矢量，那么这两个粒子之间的电磁相互作用的四维力 f 的一般表达式为

$$f = |f|f^0 = |f|\frac{1}{c^2 r}\left[-(u\cdot u')R + (u\cdot R)u'\right] \tag{9}$$

3. 四维空间中库仑力的方向

现在具体讨论这两个粒子之间的库仑力，假设库仑力的大小就是四维力 f 的模

$$|f| = \frac{kqq'}{r^2} \tag{10}$$

那么，四维空间中库仑力的表达式为

$$\begin{aligned} f &= |f|f^0 = \frac{kqq'}{c^2 r^3}\left[-(u\cdot u')R + (u\cdot R)u'\right] \\ &= q\left[-\left(u\cdot\frac{kq'u'}{c^2 r^3}\right)R + \left(u\cdot\frac{kq'R}{c^2 r^3}\right)u'\right] \end{aligned} \tag{11}$$

$$f_\mu = q\left[-\left(u_\nu\frac{kq'u'_\nu}{c^2 r^3}\right)R_\mu + \left(u_\nu\frac{kq'R_\nu}{c^2 r^3}\right)u'_\mu\right] \tag{12}$$

利用电动力学中的一个常用公式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{R_\mu}{r^3} \tag{13}$$

方程(12)可以写成

$$f_\mu = q\left[u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{kq'u'_\nu}{c^2 r}\right) - u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{kq'u'_\mu}{c^2 r}\right)\right] \tag{14}$$

根据电动力学中的常用书写格式，把方程(14)的四维库仑力 f 的公式整理成为

$$f_\mu = qF_{\mu\nu}u_\nu;\quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu};\quad A_\mu = \frac{kq'u'_\mu}{c^2 r} \tag{15}$$

这样我们就对四维库仑力 f 有了一个熟悉而又直观的认识：A 是粒子 q' 产生的四维电磁矢势；四维库仑力与相对论 Lorentz 力 $f_\mu = qF_{\mu\nu}u_\nu$ 在形式上保持一致；在四维空间中可以从库仑力推导出相对论的 Lorentz 力。

4. 四维空间中的 Maxwell 方程组

就这两个粒子而言，我们在选择基矢 R 的时候，要求 $R \cdot u' = 0$，即它们正交，并且定义 $r = |R|$。如图 1 所示，我们有

$$u'_\mu R_\mu = 0 \tag{16}$$

所以

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{kq'u'_\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{kq'u'_\mu}{c^2}\left(\frac{-R_\mu}{r^3}\right) = 0 \tag{17}$$

我们知道，方程(17)就是 Lorentz 规范条件(Lorentz gauge condition)。而我们又知道数学公式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{18}$$

这样，我们就计算出

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \\ &= -\frac{kq'u'_\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{kq'u'_\mu}{c^2}4\pi\delta(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{19}$$

这里定义 $J'_\mu = q'u'_\mu\delta(\boldsymbol{r})$ 作为粒子 q' 的电流密度矢量，也就是说

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J'_\mu \tag{20}$$

把方程(15)中的 $F_{\mu\nu}$ 代入下式，交换下标并求和，就得到

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{21}$$

方程(20)和方程(21)构成了 Maxwell 方程组。

把上面讨论的两个粒子模型应用到连续介质中去。如图 2 所示，粒子 q 是在附近电路产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动。作用在粒子 q 上的四维电磁矢势 A 包含电路中所有载流子的贡献，它们是线性叠加的，有

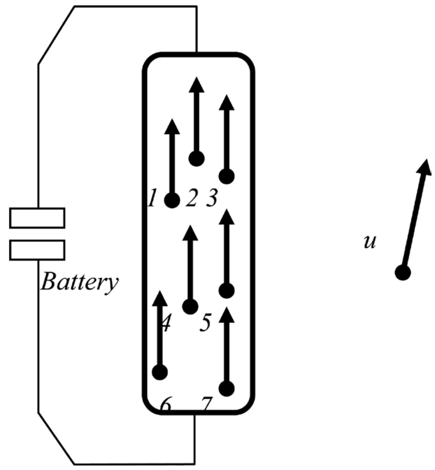

Figure 2. The electromagnetic 4-vector potential near a circuit where the Maxwell equations hold
图 2. 一个电路在其附近产生四维电磁矢势，而 Maxwell 方程组仍然成立

$$A_\mu = \sum_i \frac{kq' u'_{i\mu}}{c^2 r_i} \tag{22}$$

那么，在这个电路附近，使用方程(22)，Maxwell 方程组仍然成立

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J'_\mu \tag{23}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{24}$$

在这一小节，我们证明了，四维速度 u 与四维力 f 的正交性与 Maxwell 方程组之间存在内在联系。可见，四维力方向涉及到电磁场理论的全局，在确定四维力方向的时候绝对不能出错。这是一种分析 Maxwell 方程组的新方法。

5. 教学应用：四维空间中的 Lienard-Wiechert 势

从 Maxwell 方程组我们知道，在图 1 中的两个粒子之间，电磁相互作用从粒子 q' 传播到粒子 q 需要一个延迟时间 Δt，我们把两个粒子的模型重新画在图 3 中。

在图 3 中，这个延迟时间 Δt，对应着从 u' 与 R 相交点出发沿 R 方向到达 q 点的距离，图 3 中上边的那段虚线指示这段距离，这段距离通过下式计算出

$$r = c\Delta t \tag{25}$$

这个延迟时间 Δt，也对应着从 q' 出发沿 u' 方向到达与 R 相交之点的距离，图 3 中左边的那段虚线指示这段距离。把 $\left(x'_\nu - x_\nu\right)$ 投影到 u' 的模 $|u| = ic$ 方向上(注意，这个模是虚数)，通过下式计算出这段距离

$$ic\Delta t = \left(\frac{u'}{ic}\right) \cdot \left(x' - x\right) = \frac{1}{ic} u'_\nu \left(x'_\nu - x_\nu\right) \tag{26}$$

所以，把式(26)代入式(25)，我们有

$$r = c\Delta t = \frac{1}{c} u'_\nu \left(x'_\nu - x_\nu\right) \tag{27}$$

A 是粒子 q' 产生的四维电磁矢势，从新写成

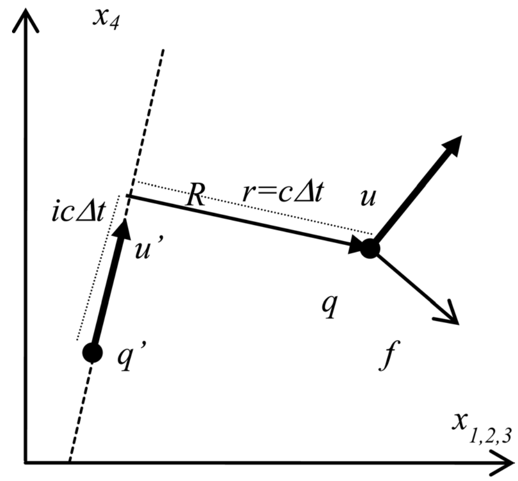

Figure 3. The particle positions in the four dimensional space-time
图 3. 四维空间中的两个粒子的相对位置

$$A_\mu = \frac{kq'u'_\mu}{c^2 r} = \frac{kq'u'_\mu}{cu'_\nu\left(x'_\nu - x_\nu\right)} \tag{28}$$

这就 Lienard-Wiechert 势，它包含了延迟时间 Δt (retardation time)。当初我们在选定基矢 R 的时候要求 $R \cdot u' = 0$，显然是考虑到这里的延迟时间 Δt 机制，说明我们选择的基矢是合理的和自洽的。

6. 教学应用：从四维空间变换到我们比较熟悉的三维空间

从相对论四维空间变换到我们比较熟悉的三维空间，力的方向是如何变换的呢？我们下面给出的变换步骤可以帮助看清这一点。

第一步，四维电磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 要用电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 表示。

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

第二步，这样，力就可以写成 Lorentz 力的形式。

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}; \quad f_4 = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{u} \tag{30}$$

四维力的第四分量表示电场对粒子 q 做功的功率。可见，一个粒子的四维速度 u 与它受到的四维力 f 正交，并不意味着在电磁学和电动力学中这个粒子的经典速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与它受到的经典力 $\boldsymbol{f}$ 矢量正交或垂直。但是四维速度与四维力的正交性具有丰富的内涵，这是本文讨论的重点。

第三步，Maxwell 方程组，即方程(20)和方程(21)，要用电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 表示，参见教材[1] [4] [5]。这样，我们就从相对论四维空间变换到我们比较熟悉的三维空间，以及得到我们比较熟悉的经典电磁学 Maxwell 方程组[1] [4] [5]：

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\rho\boldsymbol{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

总之，在电磁学和电动力学教学中，如果从四维速度与四维力正交性出发，能够更好地理解相对论与 Maxwell 方程组之间的关系。

7. 结论

本文详细讨论四维空间中力的方向问题。根据四维速度与四维力的正交性，推导出了四维空间中库仑力的相对论表达式，由此推导出了相对论 Lorentz 力，并详细讨论它与 Maxwell 方程组的关系；本文指出这些推导形成了一种分析 Maxwell 方程组的新方法。在电磁学和电动力学教学中，如果从四维速度与四维力正交性出发，能够更好地理解相对论与 Maxwell 方程组之间的关系。

参考文献

[1] 阚仲元. 电功力学[M]. 人民教育出版社, 1979: 222.
[2] 崔怀洋. 从陈子定理看相对论力学[J]. 物理与工程, 2005, 5(15): 9-11.
[3] 崔怀洋. 相对论的质心运动定理与质量亏损[J], 大学物理, 2004, 23(11): 17-18.
[4] 赵凯华. 电磁学, 下册[M]. 人民教育出版社, 1978: 350.
[5] Harris, E.G. (1975) Introduction to Modern Theoretical Physics. John Wiley & Sons, 257.