

ASEP Model Based on Parallel Update Rule and Simulation Study

Yifan Liang¹, Qianlong Huang²

¹Kunming University of Science and Technology, Kunming Yunnan

²Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

Email: 594520735@qq.com

Received: Jun. 17th, 2018; accepted: Jul. 4th, 2018; published: Jul. 9th, 2018

Abstract

The problem of traffic jam has been a long time. In order to explore the impact of the traffic speed on the road traffic condition, it is necessary to explore the emergency situation in the road. A different ASEP model was established to investigate the effect of different jump rates on particle flux and particle density in the system. The model can be divided into two situations: entrance and exit. The steady-state MC phase will disappear under certain values. In addition, because the hopping rate p increased by two kinds of cases within the model to reduce or increase the particle density, operation process, the use of computer simulation of particles for statistical Monte Carlo algorithm, the results are consistent with the theoretical value.

Keywords

Mean Field, TASEP, Boundary, Monte Carlo

基于并行更新规则的粒子ASEP模型及其仿真研究

梁一帆¹, 黄潜龙²

¹昆明理工大学, 云南 昆明

²海军工程大学, 湖北 武汉

Email: 594520735@qq.com

收稿日期: 2018年6月17日; 录用日期: 2018年7月4日; 发布日期: 2018年7月9日

摘要

交通拥堵问题困扰人们由来已久。为了探究道路行驶中突发状况限制车辆行动速度会对道路行车状态造

成的影响, 建立边界处粒子的跳跃率不同的ASEP模型, 探究跳跃率的改变对系统内粒子流量与粒子密度造成的影响。模型分为入口、出口两种情况, 在特定取值下系统稳态MC相将会消失。此外由于跳跃率 p 增加分别会使两种情况下模型内粒子密度减少或者增加, 利用计算机模拟粒子运行过程、蒙特卡洛算法进行数据统计, 获得结果与理论值一致。

关键词

平均场, TASEP, 边界, 蒙特卡洛

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1968年MacDonal等人提出非对称排它过程(ASEP)模型对核糖体在信使RNA上的定向运动合成过程进行研究[1]。1986年, Cremer和Ludwig提出将元胞自动机应用于交通方向, ASEP模型在交通运输和生物运输方面得到广泛的应用, 例如单通道[2][3][4]、双通道[5][6]以及十字路[7][8]。对于这些系统而言, 在运动轨迹中某些粒子在模型中滞留便会影响到模型内的粒子运动状态, 导致拥堵现象产生, 在实际生活中这也是车辆交通拥堵的主要原因。

所以, 许多物理学家和科学家都将精力集中在探索具有开放边界且会产生跳跃率改变的TASEP模型。一般的交通流模型分有多种更新的规则, 常用的更新规则为随机更新与并行更新[9]。刘明哲[10]在远距离跳跃模型基础上, 探究捷径特性在分层网络中的属性, 研究发现模型的对称性被打破, 并且MC相消失。Liu等人[11]在单通道中引入了分段跳跃率这一特殊情况, 并采用并行更新的更新规则, 设置模型前段粒子跳跃率为1而后半段粒子跳跃率为 p 的模型V和前后两部分粒子跳跃率为1而中间段粒子跳跃率为 p 的模型W, 分析车辆在道路不通位置进行速度改变会对道路中车流量造成的影响。对于两个模型而言, p 的取值相同时, 模型W中最大流量相的面积更大。肖松等人[12]则针对随机更新条件下的含有单个跳跃率不同的格子的单通道车道进行了分析, 得到一对由跳跃率 p 和 q 决定的饱和参数 (α^*, β^*) , 设置 p 的取值固定, 提高 q 的取值可减少交通拥堵的发生概率。

在本文中, 我们使用并行更新方案研究含有特殊跳跃率的ASEP模型, 模型图(图1(a)、图1(b))所示。在情况A中, 在系统入口边界处的跳跃率不同于模型内其他格子的跳跃率。B情况的与A情况略有不同, 含有特殊跳跃率的格子位于系统出口边界处。这两种情况在现实生活中是普遍存在的, 例如: 匝道、车道数量减少、道路施工等情况使得车辆行驶在道路入口或出口处的速度降低导致拥堵现象的产生。我们可以通过分析模型了解系统状态, 寻求缓解交通压力的方法, 即控制车辆进入车道的边界速度。在入口边界处粒子的跳跃率发生改变时, 位于边界处的格子可以看作粒子改变运动状态的节点。当粒子跳跃到此位置时, 粒子会以加速、减速的状态离开或者进入系统。可以通过控制粒子在进入系统前或系统后的跳跃率达到改变系统流量的目的。两种情况通过数值计算与分析可以到相应的结果。

本文结构安排如下: 第二部分, 模型描述; 第三部分, 通过理论分析得到情况A的稳定相图。第四部分, 通过理论分析得到情况B的稳定相图; 第五部分, 对理论分析和计算机模拟得到的结果进行分析与讨论。第六部分, 结论。

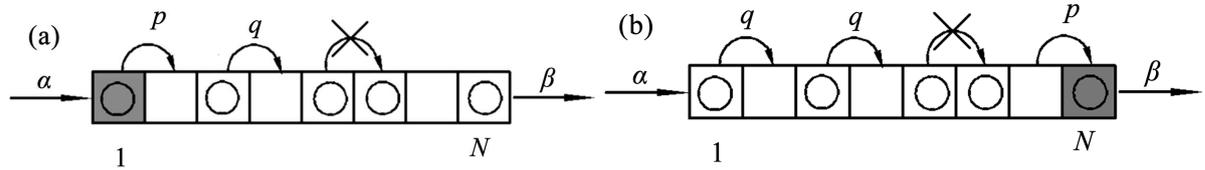


Figure 1. Model diagram under the rule of Parrel. (a) Model A, the different rate at the entrance, (b) Model B, the different rate at exit

图 1. 基于 Parrel 规则下模型图。(a) 模型 A, 跳跃率不同的格子位于主链入口处, (b) 模型 B, 跳跃率不同的格子位于主链出口处

2. 模型

在模型中, 存在两种情况, 分别称为情况 A 和情况 B。每种情况下系统都由 N 个格子组成, 称为主链。每个格子都有两种状态, 当格子内有粒子时标记为“非空”, 当格子内没有粒子时标记为“空”。这两种情况中, 粒子都是以概率 α ($0 < \alpha \leq 1$) 从左边界进入系统, 以 β ($0 < \beta \leq 1$) 的概率从右边界离开主链(如图 1 所示)。

情况 A, 跳跃率不同的格子位于入口边界处, 主链内的第一个格子的跳跃率与模型内其他格子的跳跃率不同。当第一个格点的状态为“非空”, 第二个格点为“空”时, 粒子以跳跃率 p ($0 < p \leq 1$) 由第一个格子跳入第二个格子。在其他格子中, 粒子以跳跃率 q ($0 < q \leq 1$) 由第 i ($0 < i \leq 1$) 个点跳到第 $i + 1$ 个点。

对于情况 B, 跳跃率不同的格子位于出口边界处。当第 $N - 1$ 格点的状态为“非空”, 第 N 个格子为“空”时, 粒子以跳跃率 p ($0 < p \leq 1$) 由第 $N - 1$ 个格子跳入第 N 个格子。对于其他格子, 粒子以跳跃率 q ($0 < q \leq 1$) 由第 i ($1 < i < N$) 个点跳到第 $i + 1$ 个格子中。在这两种情况下, q 均为基础 ASEP 模型的跳跃率, 而 p 为位于出口处格子的跳跃率。

3. 模型 A 的理论分析

相比具有跳跃率为 p ($0 < p \leq 1$) 的基础 ASEP 模型。在并行更新条件下, 系统存在三种稳态相, 分别为: 低密度相(LD), 高密度相(HD)以及最大流量相(MC)。在粒子开始进入系时, 模型内的粒子数较少; 粒子流量与密度偏低; 系统状态处于 LD 相。随着进入模型的粒子数量增加, 模型内粒子数量逐渐增多; 粒子流量、密度不断增加; 系统状态逐渐向 MC 相转化, 此时 MC 相的理想状态为: 在一个时间步长下每有一个粒子进入系统时, 将会有有一个粒子从出口处离开系统。随着时间增加, 进入系统的粒子数量大于离开系统粒子的数量, 粒子在系统内逐渐堆积, 最终便产生拥堵, 系统最终将会转化为 HD 相。系统各相存在条件如下:

当系统处于 LD 相时, 系统存在条件为 $\alpha < \beta$ 、 $\alpha < 1 - \sqrt{1 - p}$, 系统流量 J 与主链内的粒子密度由进入率 α 决定:

$$J = \alpha \left(\frac{p - \alpha}{p - \alpha^2} \right), \rho_{bulk} = \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{p - \alpha^2} \right) \quad (1)$$

其中 J 是系统的总流量, ρ 是系统处于稳定时主链的粒子密度。

当系统处于 HD 相时, 存在条为 $\beta < \alpha$ 、 $\beta < 1 - \sqrt{1 - p}$, 系统流量 J 与主链内粒子密度由跳出率 β 决定:

$$J = \beta \left(\frac{p - \beta}{p - \beta^2} \right), \rho_{bulk} = \frac{p - \beta}{p - \beta^2} \quad (2)$$

系统处于 MC 相时, 存在条件为 $\alpha > 1 - \sqrt{1 - p}$ 、 $\beta > 1 - \sqrt{1 - p}$, 系统流量与主链内粒子密度如下:

$$J = \frac{1 - \sqrt{1-p}}{2}, \rho_{bulk} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

情况 A 可分为两部分, 即入口边界处格子与粒子跳跃率为 q 的 ASEP 模型。假设 ASEP 模型的等效入口概率为 α_{eff} , 出口概率为 β 。因为前后两部分的总流量相同可以得到以下关系:

$$J = \alpha(1 - \rho_2) \quad (4)$$

入口边界处的粒子流量与粒子通过右侧 ASEP 模型上的流量相同。根据公式(1)与公式(4), 可以得到以下关系

$$J = \alpha \left[1 - \alpha_{eff} \left(\frac{1 - \alpha_{eff}}{q - \alpha_{eff}^2} \right) \right] = q \frac{\alpha_{eff}}{p} \left[1 - \alpha_{eff} \left(\frac{1 - \alpha_{eff}}{q - \alpha_{eff}^2} \right) \right] \quad (5)$$

将(5)式化简, 定义 $m = p/q$, 等效进口概率为

$$\alpha_{eff} = m\alpha \quad (6)$$

情况 A 处于 LD 相时, 需要满足以下条件:

$$\alpha_{eff} < \beta, \alpha_{eff} < 1 - \sqrt{1-p} \quad (7)$$

将式(6)代入(7), 得到系统处于 LD 相时的存在条件为:

$$\alpha < \frac{\beta}{m}, \alpha < \frac{1 - \sqrt{1-q}}{m} \quad (8)$$

当系统处于 HD 相时, α_{eff} 、 β 关系如下:

$$\beta < \alpha_{eff}, \beta < 1 - \sqrt{1-q} \quad (9)$$

根据(6)式与(9)式得到 HD 相的存在条件为

$$\beta < m\alpha, \beta < 1 - \sqrt{1-q} \quad (10)$$

系统处于 MC 相时, 存在如下关系:

$$\alpha_{eff} > 1 - \sqrt{1-q}, \beta > 1 - \sqrt{1-q} \quad (11)$$

根据(6)式与(11)式, MC 相的存在条件如下

$$\alpha > \frac{1 - \sqrt{1-q}}{m}, \beta > 1 - \sqrt{1-q} \quad (12)$$

根据公式(12)可以看出当满足 $p \leq q(1 - \sqrt{1-q})$ 时, MC 相将会消失, 表明随着粒子数量增加模型的粒子流量状态只能达到 LD 相或 HD 相, 并且系统状态处于 LD 相的可能性更高。系统内各种稳态相的面积与 p 、 q 的比值密切相关, 如图 2(a)所示。当 q 值取固定值 0.6, 随着 p 的值逐渐减小, HD 相的面积将逐渐减少, MC 相终将消失。此时, 系统状态处于 LD 相的可能性较高。如图 2(b)所示, 当 m 取值发生改变时, 相图也将发生相应的变化。以 $m = 1$ 时的相图为基准, 当 $m < 1$ 的时, 图像偏向左发生变化, LD 相的面积减小。当 $m > 1$ 的时, LD 相的面积增加。由此可得, 增加跳跃率 p 的取值, LD 相的面积随之增加, 系统稳定状态下处于 LD 相的概率较高。

4. 对模型 B 的理论分析

这部分的计算方法与情况 A 的计算方法相似。粒子进入出口边界时的流量可以通过下式进行描述:

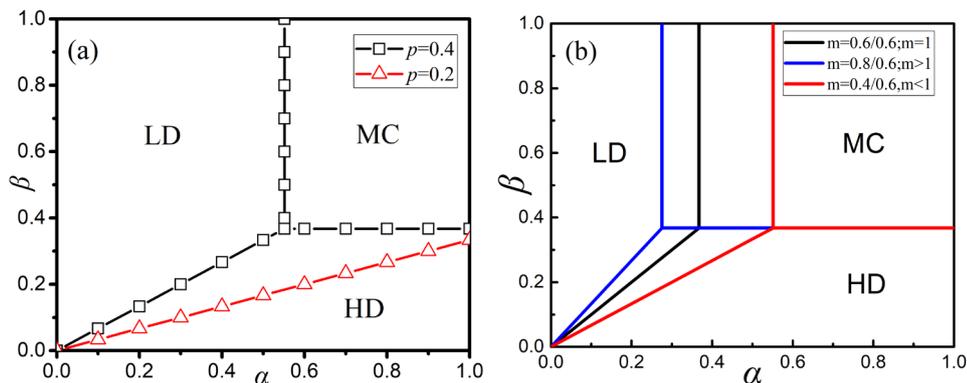


Figure 2. Diagram of possible stationary-state phases in case A. (a) The change of diagrams with $q = 0.6$ and values of different p , (b) The change of diagrams with different ratio of m

图 2. 主链在情况 A 下的稳态相图。(a) 当 $q = 0.6$ 时, 更改 p 的取值时相图的变化, (b) m 取不同值时相图的变化

$$J = m\beta\rho_{N-1} \quad (13)$$

由于系统内前后两个部分的流量相等, 根据式(1)与式(13), 可以得到关系式

$$m\beta\alpha \frac{\left(\frac{q-\alpha}{q-\alpha^2}\right)}{\beta_{\text{eff}}} = \alpha \left(\frac{q-\alpha}{q-\alpha^2}\right). \text{ 等效出口概率可表示为:}$$

$$\beta_{\text{eff}} = m\beta \quad (14)$$

主链处于 LD 相时, 需要满足以下条件:

$$\alpha < \beta_{\text{eff}}, \alpha < 1 - \sqrt{1-q} \quad (15)$$

根据(15)式与(16)式得到 LD 相的存在条件为:

$$\alpha < m\beta, \alpha < 1 - \sqrt{1-q} \quad (16)$$

当系统处于 HD 相, 存在条件为:

$$\beta_{\text{eff}} < \alpha, \beta_{\text{eff}} < 1 - \sqrt{1-q} \quad (17)$$

联立等式(13)式与(18)式, 得到系统处于 HD 相的条件为:

$$\beta < \frac{\alpha}{m}, \beta < \frac{1 - \sqrt{1-q}}{m} \quad (18)$$

当系统处于 MC 相时, 系统内存在如下关系:

$$\alpha > 1 - \sqrt{1-q}, \beta_{\text{eff}} > 1 - \sqrt{1-q} \quad (19)$$

根据(13)式与(20)式, MC 相的存在条件为

$$\alpha > 1 - \sqrt{1-q}, \beta > \frac{1 - \sqrt{1-q}}{m} \quad (20)$$

根据式(20)我们可以得知, 当 $p \leq q(1 - \sqrt{1-q})$ 时 MC 相将会从图中消失(如图 3(a)所示), 并且随着进入系统的粒子增加, 系统状态会较大概率地处于 HD 相。当保持 q 值 0.6 固定, 随着 p 的值减小, HD 相面积增大, MC 相逐渐消失, 此时系统值将仅存在两个相, 即 LD 相与 HD 相。这个结果表明, 保证 q 值不变、增大概率 p 的取值会使得进入系统的粒子数量减少, 系统流量增加。由图 3(b)可知, 当 m 取不

同值时, 相图也不同。以 $m = 1$ 时的相图作为基准, 当 $m < 1$ 时, HD 相增大, 而当 $m > 1$ 时, HD 相减小。因此, 增加 p 的取值, 可以让更多的粒子离开系统, 减少系统内的粒子数量。

5. 计算机模拟

分别对情况 A、情况 B 进行模拟。在两种情况下, 设置主链内都含有 1000 个格子。利用计算机对模型进行过程模拟, 总共进行 4.1×10^9 次模拟。前 1×10^8 次模拟过程作为过渡过程舍弃, 当系统处于稳定状态下时, 利用蒙特卡洛所计算法对结果进行统计, 与理论结果(实线表示)进行对比。得到结果如下:

在情况 A 中, 通过模拟可以观测到结果。在保证 α 与 β 的取值不变时, p 的取值从 0.8 减少至 0.4, 系统相图将从 MC 相转变为 HD 相(如图 2(b)所示), 系统内的粒子密度将随之降低(如图 4 所示)。这清晰的表明在入口处限制 p 的取值会影响粒子进入主链的概率, 使得系统内的粒子数量减少, 达到降低主链内粒子发生拥堵的概率。

与情况 A 的模拟过程相似, 对情况 B 进行模拟, 得到主链内的粒子密度图(如图 5 所示)。当 p 的取值从 0.8 降低至 0.4 时, 主链从 LD 相转变成为 MC 相(如图 3(b)所示), 主链内的粒子密度将逐渐增加, 这是因为出口处的粒子跳跃率 p 值增加会限制粒子跳出主链。

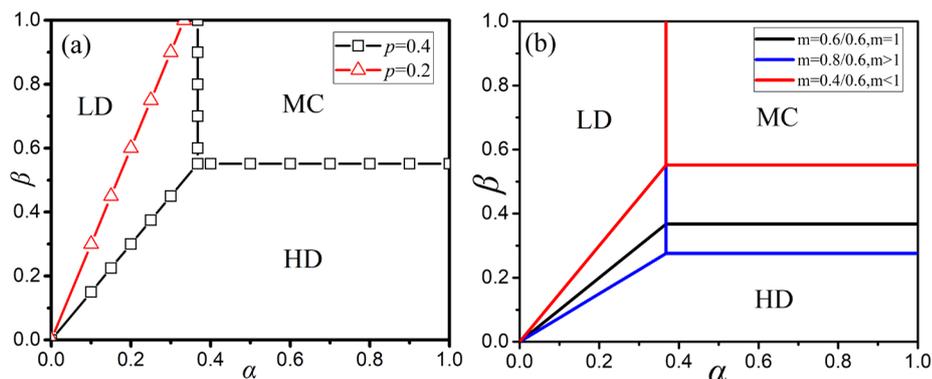


Figure 3. Diagram of possible stationary-state phases in case B. (a) The change of phase diagrams with $q = 0.6$ and values of different p . (b) The change of phase diagrams with different ratio of m

图 3. 情况 B 的相图。(a) 当 $q = 0.6$ 时取不同的 p 值时相图的变化, (b) m 取不同值时相图的变化

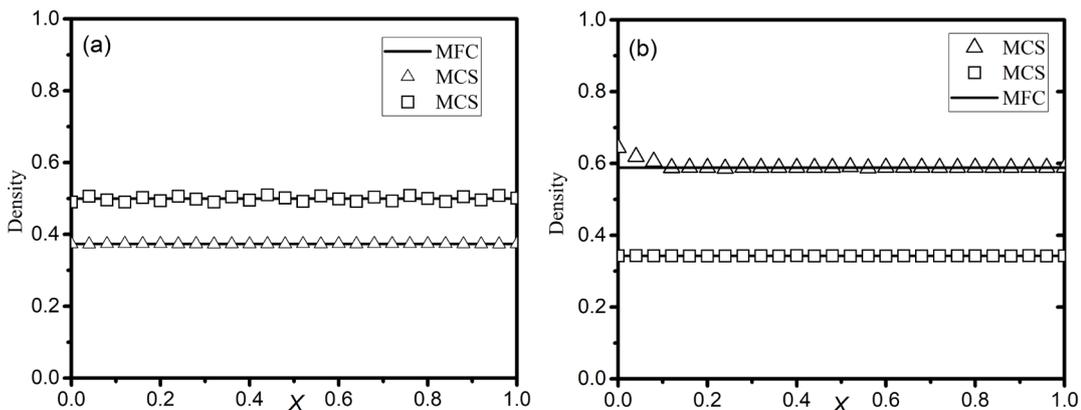


Figure 4. Density profiles for case A with $q = 0.6$. MCS indicate the Monte Carlo simulation results. MFC shows the present theoretical results; (a) $\alpha = 0.4, \beta = 0.6$; (b) $\alpha = 0.35, \beta = 0.3$

图 4. $q = 0.6$ 时, 情况 A 下的密度图。图中 MFC 是理论计算值, MCS 为计算机模拟得到的结果; (a) $\alpha = 0.4, \beta = 0.6$; (b) $\alpha = 0.35, \beta = 0.3$

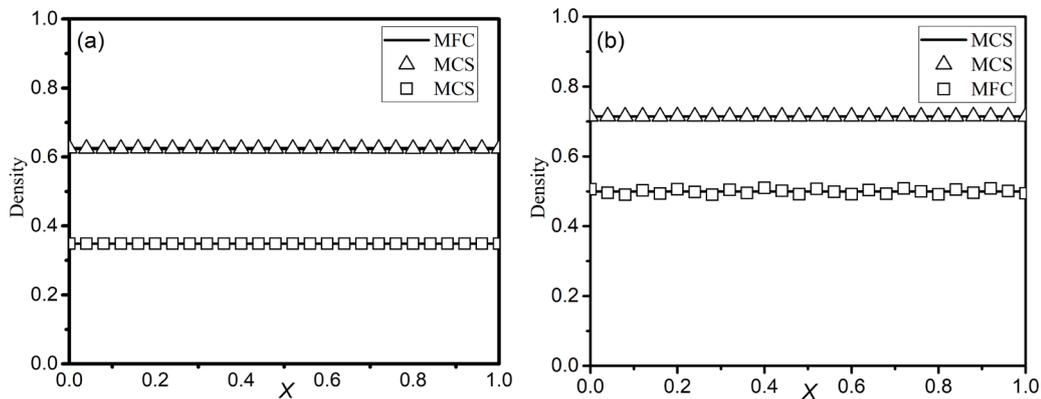


Figure 5. Density profiles for case A with $q = 0.6$. MCS indicate the Monte Carlo simulation results. MFC shows the present theoretical results; (a) $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$; (b) $\alpha = 0.48, \beta = 0.6$

图 5. $q = 0.6$ 时, B 情况下的粒子密度图。图中 MFC 是理论计算值, MCS 为计算机模拟得到的结果; (a) $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$; (b) $\alpha = 0.48, \beta = 0.6$

6. 总结

本文通过平均场理论与计算机模拟,对并行更新规则下的边界跳跃率不同的 ASEP 模型进行了研究。讨论了在这种条件下模型的两种情况,即具有不同跳跃率格子位于入口边界与出口边界处。

两种情况的结构、系统相图都相似。相同之处在于,当 $p \leq q(1 - \sqrt{1 - q})$ 时, MC 相将从系统中消失。当 MC 相在系统中存在时,随着跳跃概率 p 的增加两种情况的相图变化截然不同。情况 A 中,随着 p 值的增加,主链内粒子流量、密度都有增加,系统内 LD 相的面积减少。情况 B 中,随着 p 值的增加,主链内粒子流量增加,粒子密度随之减少,系统内 HD 相面积减少。所以,在正常交通行使过程中,车辆在道路中保持稳定高速行驶的速度可以有效保持道路的行车效率。相反,由于突发状况造成的减速问题,不仅使得道路的行车效率低下甚至会造成交通拥堵现象。

参考文献

- [1] MacDonald, J.T., Gibbs, J.H. and Pipkin, A.C. (1968) Kinetics of Biopolymerization on Nucleic Acid Templates. *Biopolymers*, **6**, 1. <https://doi.org/10.1002/bip.1968.360060102>
- [2] Greulich, P. and Schadschneider, A. (2008) Single-Bottleneck Approximation for Driven Lattice Gases with Disorder and Open Boundary Conditions. *Journal of Statistical Mechanics*, **4**, 4009-4033.
- [3] Liu, M.Z., Wang, R.L., Jiang, R., Hu, M.B. and Gao, Y. (2009) Defect-Induced Transitions in Synchronous Asymmetric Exclusion Processes. *Physics Letters A*, **373**, 195-200.
- [4] Liu, M.Z., Wang, R.L., Hu, M.B., Jiang, R. and Gao, Y. (2010) Synchronous Asymmetric Exclusion Processes with an Extended Defect. *Physics Letters A*, **374**, 1407-1413.
- [5] Xiao, S., Cai, J.J. and Liu, F. (2009) Zone Inhomogeneity with the Random Asymmetric Simple Exclusion Process in a One-Lane System. *Chinese Physics B*, **18**, 4613-4621.
- [6] Pronina, E. and Kolomeisky, A.B. (2004) Two-Channel Totally Asymmetric Simple Exclusion Processes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37**, 9907-9918.
- [7] Pronina, E. and Kolomeisky, A.B. (2006) Asymmetric Coupling in Two-Channel Simple Exclusion Processes. *Physica A*, **372**, 12-21. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.05.006>
- [8] Xiao, S., Liu, M.Z. and Cai, J.J. (2009) Asymmetric Coupling in Two-Lane Simple Exclusion Processes: Effect of Unequal Injection Rates. *Physics Letters A*, **374**, 8-12.
- [9] 陈晓瑜. ASEP 模型在交通流中的应用[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 昆明理工大学, 2017: 1-18.
- [10] Liu, M.Z., Tuo, X.G., Li, Z., Yang, J.B. and Gao, Y. (2012) Asymmetric Exclusion Process for Modeling of Information Flow. *Computer Physics Communications*, **183**, 316-319.
- [11] Liu, M., Wang, R., Hu, M.B. and Gao, Y. (2010) Synchronous Asymmetric Exclusion Processes with an Extended

Defect. *Physics Letters A*, **374**, 1407-1413. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.01.001>

- [12] Xiao, S., Wu, S.Y. and Zheng, D.S. (2012) Local Inhomogeneity in Totally Asymmetric Simple Exclusion Processes with Different Hopping Rates. *Journal of Central South University*, **19**, 3012-3016.
<https://doi.org/10.1007/s11771-012-1371-0>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2161-0916, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: mp@hanspub.org