Modern Physics 现代物理, 2019, 9(3), 162-175
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2019.93018

Hans汉斯

Time Inversion of Physical Quantity and Physical Equation

—Solutions to the Problem and the Present System

Daqing Li

China Wood Luoding Cement Co. Ltd., Luoding Guangdong
Email: ldq921@sohu.com

Received: Apr. 17th, 2019; accepted: May 3rd, 2019; published: May 10th, 2019

Abstract

Based on the detailed analysis of the definition of the time inversion transformation of physical quantity, the precondition that the time inversion transformation of physical quantity leads to the reversal of the change process of its inversion quantity is found: the time inversion transformation will change the direction of the physical process under the condition that the time keeps the positive passage. Based on the definition of the new time inversion transformation, the time inversion transformation of the differential and derivative of physical quantities and the commonly used operators are analyzed in detail and important conclusions are obtained. On this basis, the time inversion transformation of several important physical equations is discussed, the time inversion transformation invariance of the equation describing the most basic physical process and the unidirectionality of the thermodynamic process independent of the time arrow are important conclusions obtained in the discussion.

Keywords

Physical Quantity, Physical Equation, The Direction of Physical Process, The Direction of Time, Time Inversion

物理量及物理方程的时间反演变换

——当前存在的问题及系统解决方案

李大庆

中材罗定水泥有限公司，广东 罗定
Email: ldq921@sohu.com

收稿日期：2019年4月17日；录用日期：2019年5月3日；发布日期：2019年5月10日

文章引用: 李大庆. 物理量及物理方程的时间反演变换[J]. 现代物理, 2019, 9(3): 162-175.
DOI: 10.12677/mp.2019.93018

摘　要

通过对当前普遍采用的物理量的时间反演变换定义的详细分析，发现了物理量的时间反演变换导致其反演量的变化过程逆转的前提条件：在时间保持正向流逝的条件下时间反演变换将改变物理过程的方向。并以新的时间反演变换的定义内容为基础，对物理量的微分、导数及常用算符等的时间反演变换进行了详细分析并获得了重要结论。在此基础上对几个重要物理方程的时间反演变换进行了讨论，描述最基本物理过程的方程具有时间反演变换不变性以及热力学过程的单向性与时间箭头无关等就是讨论中获得的重要结论。

关键词

物理量，物理方程，物理过程的方向，时间的方向，时间反演变换

1. 引言

当前被人们普遍接受的观点是，时间反演变换是一种将物理量及物理方程中的时刻 t 直接用 $-t$ 替换从而导致时间方向逆转的数学变换[1]，是用于研究物理过程与其逆过程之间对称关系的重要方法以及研究物理过程可逆性的重要数学工具；同时，由于时间反演变换被认为可导致与原物理过程变化方向相反的物理过程，因此时间和物理过程两者常被认为是同一的，而且人们普遍认为(热力学)过程的不可逆导致时间的单向性[2]，换句话说“时间前进的方向就是气体分子变得越来越均匀，从而达到越来越高的熵的方向”[3]。据此推论，经典力学、电磁学等所描述的最基本物理过程的可逆性应导致时间的双向(或无向)性，而且人们在思考相关问题时都会在不知不觉中产生类似的观点[4]。那么这是否意味着时间既是单向的、(至少在理论上)又是双向的呢？美国物理学家布赖恩•格林在其著作中就提出过类似的问题，但并没有给出明确的结论[5]，由此可见，目前采用的时间反演变换的概念及方法有值得商榷之处。本文的研究表明，产生这一问题的根源在于，物理过程的时间反演变换虽然是其关于 $t = 0$ 轴(或坐标原点 $O(0，0)$)的对称变换，但人们却直接将变换所得物理过程作为原物理过程的逆转变换。而正是在对时间反演变换定义中物理过程方向性的详细分析基础上，本文获得了在时间保持正向流逝条件下时间反演变换将改变物理过程的方向的重要结论；同时，在此基础上还推论出在时间反演变换操作中物理过程与其逆过程的微分、导数以及常用算符之间的对称关系，并对几个重要物理方程的时间反演变换进行了讨论。结果表明，当前物理学中普遍采用的时间反演变换的操作定义虽然能获得正确结论，但操作方法并不恰当，并且将时间的单向性归结为热力学过程的不可逆性的观念也有问题。

2. 物理量及其微分、导数的时间反演变换

物理量是指物理学中所描述的现象、物体或物质可定义性区别和定量确定的性质。常见的物理量有动力学量(如速度 V、位移 S、质量 m、力 F 等)和电磁学量(如电荷 e、电场强度 E、磁场强度 H 等)等。一般情况下物理量都会随时间发生变化因而是时刻 t 的函数，通常用函数关系 $Q = Q(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, t)$ 描述。而物理量及其微分、导数等的时间反演变换就是研究对物理量及其微分、导数等进行时间反演变换

的对称性规律的方法，对进一步研究物理方程的时间反演变换具有重要意义。

2.1. 物理量的时间反演变换的定义

物理量 Q（以下简称 Q)的时间反演变换的定义：对随时间变化的物理量 $Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$（其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别为 n 维空间的空间坐标，t 为时刻)，令 $t\to t'=-t$，则

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\to Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t')=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,-t)=Q' \tag{1}$$

(即将 Q 中的时刻 t 用 $-t$ 替换而得到一个新物理量 Q'的操作)就是对 Q 的时间反演变换，简称 T 变换，该定义与物理教材中关于时间反演变换的定义一致。由定义可知，Q 的 T 变换只是 Q 关于 $t=0$ 轴(或坐标原点 $O(0,0)$)的对称变换而非 Q 的变化过程的逆转变换，而人们却普遍认为 Q 的 T 变换会直接无条件导致与之方向相反的物理过程(即逆过程)，并因而将其作为研究物理过程与其逆过程之间对称性的方法，这种观点很容易造成理解上的歧义，因而是有问题的并需在下面进行详细讨论。由于以下讨论将涉及物理过程的逆过程概念，为此，可将物理过程的逆过程定义为：从某一物理过程的最终状态(简称末态)开始发生的、以与该过程完全相反的方向依序经过其所有中间状态最终返回其初始状态(简称初态)的物理过程。为简化叙述，在下面的讨论中将对 Q 的 T 变换所获 Q'称作 Q 的时间反演物理量(简称 Q 的反演量)，而将对 Q 的 $\boldsymbol{T}$ 变换也称作对 Q 所进行的、算符为 $\hat{T}$ 的运算，即

$$\hat{T}Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=Q'=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t')=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,-t) \tag{2}$$

而根据论述的需要本文会交替使用 $\boldsymbol{T}$ 变换与 $\hat{T}$ 运算这两个具有相同意义的概念，下面就 Q 为时间的一元函数 $Q=Q(t)$ 这种最简单情况进行讨论。

本文用坐标系中的曲线 $Q=Q(t)$ 表示随时间 t 变化的物理量 Q，如图 1 所示。图中，曲线 $Q=Q(t)$ 上的点 $P(Q,t)$ 与 $Q=Q(t)$ 在 t 时刻的值相对应，点 $P_0(Q_0,t_0)$——初态及点 $P_1(Q_1,t_1)$——末态分别与 $Q=Q(t)$ 在时刻 t_0 及 t_1 时的值相对应；同时，随着时间的流逝(其方向由 t_0 指向 t_1，$t_1>t_0$)，$Q=Q(t)$ 的变化方向由曲线上的点 $P_0(Q_0,t_0)$ 指向点 $P_1(Q_1,t_1)$。在坐标系中依次标出曲线 $Q=Q(t)$ 上的任意一点 $P(Q,t)$ 关于 $t=0$ 轴(或坐标原点 $O(0,0)$)的对称点 $P'(Q',-t)$（或 $P''(Q'',-t)$)，其中点 $P_0'(Q_0',-t_0)$—初态′(或点 $P_0''(Q_0'',-t_0)$——初态″)和点 $P_1'(Q_1',-t_1)$——末态′(或点 $P_1''(Q_1'',-t_1)$——末态″)分别是点 $P_0(Q_0,t_0)$——初态和点 $P_1(Q_1,t_1)$——末态关于 $t=0$ 轴(或坐标原点 $O(0,0)$)的对称点。根据物理量 $\hat{T}$ 运算的定义，由所有这些点 $P'(Q',-t)$（或 $P''(Q'',-t)$)构成的曲线所对应的 $Q'=Q(-t)$（或 $Q''=Q(-t)$)就是对 $Q=Q(t)$ 进行 $\hat{T}$ 运算得到的反演量。在图 1 的①中显然有 $Q'=Q(-t)=Q(t)$，对这种情况则称 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性，此类物理量有：空间坐标 x、作用力 F、加速度 a、能量 E、电势 Φ、电场强度 E、电位移 D、电荷密度 ρ、电极化强度 P 等；在图 1 的②中显然有 $Q''=Q(-t)=-Q(t)$，对这种情况则称 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，此类物理量有：时刻 t、速度 $\boldsymbol{V}$、动量 p、轨道和自旋角动量 $\boldsymbol{L}$、电磁矢势 A、磁感应强度 B、磁场强度 H、电流密度 J、磁化强度 M、坡印廷矢量 S 等。由于 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算(即 T 变换)是其关于 $t=0$ 轴(或坐标原点 $O(0,0)$)的对称变换，因而为确保该曲线 $Q=Q(t)$ 所描述的真实的、动态的物理变化过程的 $\hat{T}$ 运算绝对的对称性，在图 1 的①(或②)中 Q 的反演量 Q'(或 Q'')的变化方向必须与 Q 完全相同(即 Q'(或 Q'')的变化方向只能由初态′(或初态″)指向末态′(或末态″)，而这种情况下时间流逝的方向则由 $-t_0$ 指向 $-t_1$)，也即 Q 的 $\hat{T}$ 运算并未直接无条件导致其逆过程。显然，若要用 Q 的反演量 Q'(或 Q'')描述 Q 的逆过程，就要求 Q'(或 Q'')的变化方向必须随时间从曲线上的点 $P_1'(Q_1',-t_1)$——末态′(或 $P_1''(Q_1'',-t_1)$——末态″)指向点 $P_0'(Q_0',-t_0)$——初态′(或 $P_0''(Q_0'',-t_0)$——初态″)，相应的，时间的方向则只能从 $-t_1$ 指向 $-t_0$($-t_0>-t_1$，即时间是正向流逝的)，如图中的虚线箭头所示。因而时间始终保持正向流逝(即时间流逝的方向保持不变或时间具有单向性)即是 Q 的反演量 Q'(或 Q'')可用于描述 Q 的逆过程的前提条件(或者如果时间始终保持正向流逝，那么 Q 的 $\hat{T}$ 运算

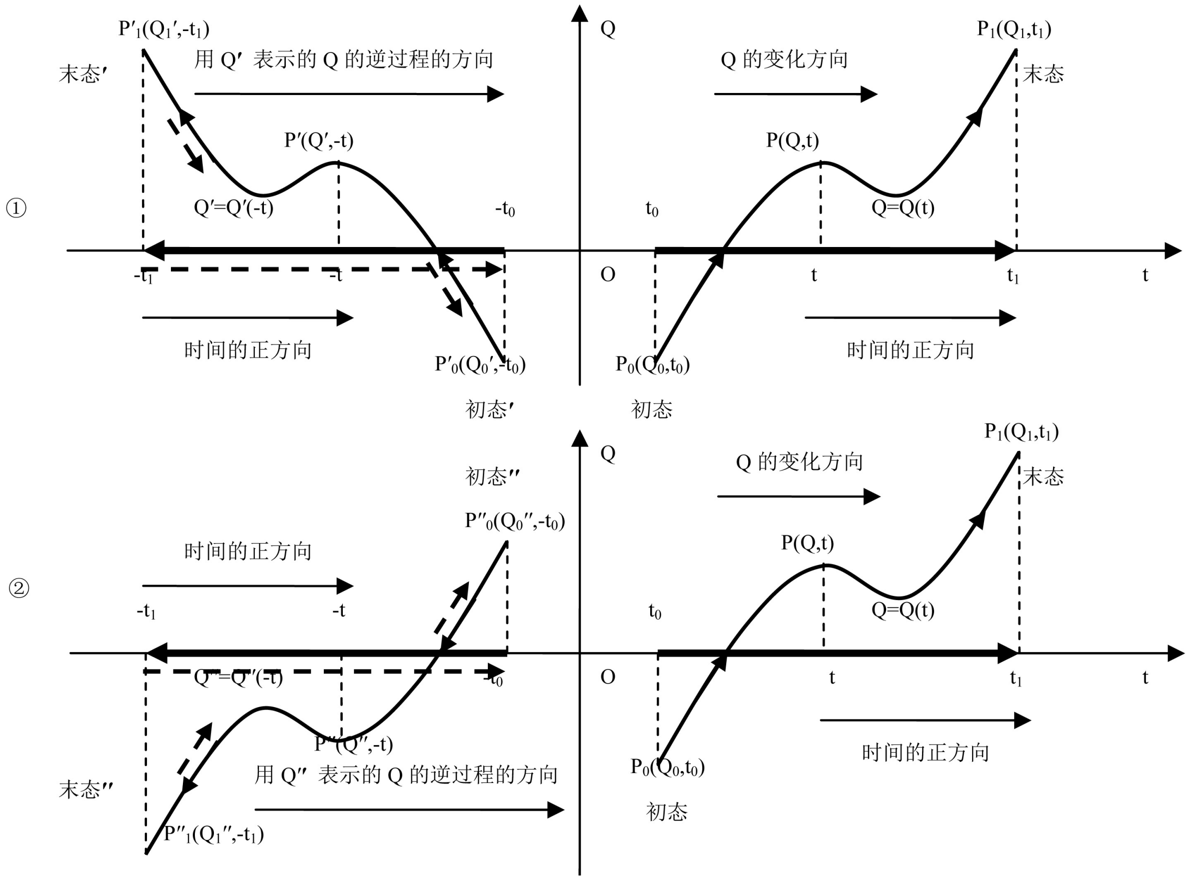

Figure 1. $\hat{T}$ operation of physical quantity $Q=Q(t)$

图 1. 物理量 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算

必然导致其逆过程)，这一结论显然可以推广至多元函数 $Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 的情况，下面将以该定义为基础展开讨论。该定义内容与物理学家在量子力学中关于时间反演变换的观点基本一致，如魏格纳(Wigner)教授所说“时间反演变换不是时间的倒流变换，而是运动方向的倒转”[6]；而布赖恩.格林教授在讨论相关问题时则说：时间反演变换“不是把时间反过来。时间仍然保持原样。我们的结论是，要想使一个物体的运动轨迹逆转，只要在其路径上任意一点上逆转其速度即可”[7]；另外，张永德教授在其著作中也有同样的看法[8]。但所有这些观点都只是直觉上的，迄今为止仍没有系统的论述。

2.2. 物理量的微分、导数及其常用算符的时间反演变换

下面就借助关于 $\hat{T}$ 运算新的定义内容对物理量的 $\hat{T}$ 运算的微分、导数及常用算符等进行详细论述，在此先讨论物理量的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数。假定 Q 的变化过程如图 2 中曲线 $Q=Q(t)$ 所示，曲线 $Q=Q(t)$ 上的两点 $P(Q,t)$ 及 $P_1(Q_1,t_1)$ 分别表示 Q 在时刻 t 及 t_1 时的对应值，并且曲线 $Q=Q(t)$ 的变化从点 $P(Q,t)$ 指向点 $P_1(Q_1,t_1)$。令 $t_1=t+\Delta t$，则 Q 从时刻 t 到 t_1 随时间产生的变化为

$$\Delta Q=Q(t_1)-Q(t)=Q(t+\Delta t)-Q(t) \tag{3}$$

令 $\Delta t\to 0_+$，则 $t_1=t+\Delta t\to t$，则 ΔQ 的右极限暨 Q 的微分为

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\Delta Q=\lim_{\Delta t\to 0+}\left(Q(t+\Delta t)-Q(t)\right)=\mathrm{d}Q \tag{4}$$

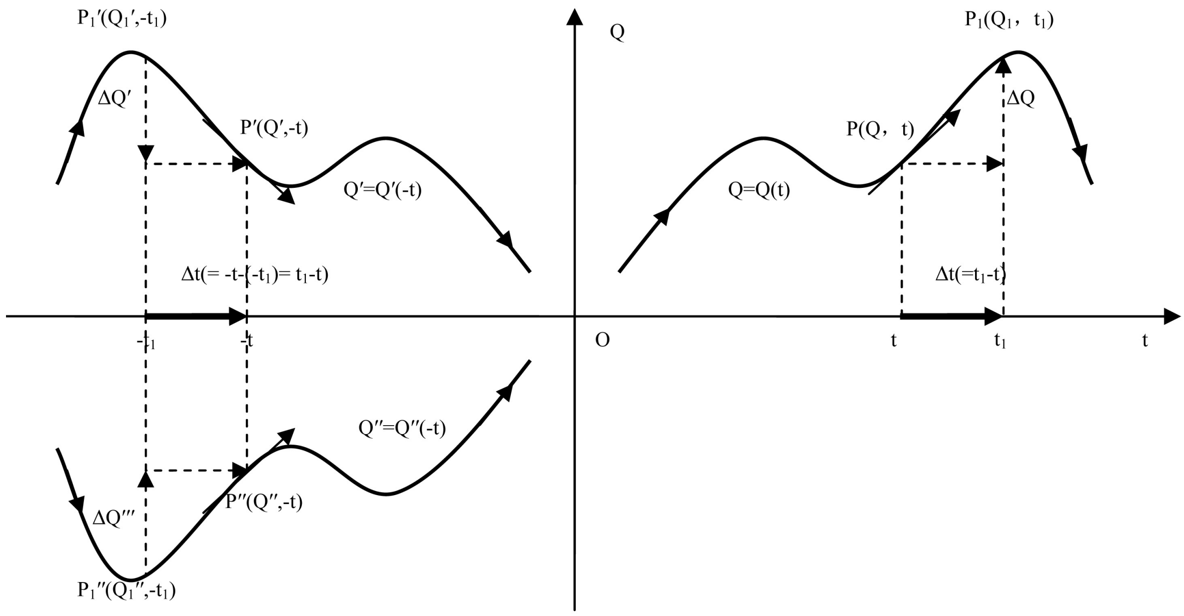

Figure 2. Differentiation of $\hat{T}$ operations of physical quantity $Q=Q(t)$

图 2. 物理量 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算的微分

而曲线 $Q=Q(t)$ 于时刻 t 在变化方向上的导数是 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$，在此 $\mathrm{d}t>0$。

假定 Q 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性，即 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=Q(t)$，并且 Q 的 $\hat{T}$ 运算所得其反演量 $\hat{T}Q$ 如图 2 中曲线 $Q'=Q(-t)$ 所示。显然，曲线 $Q'=Q(-t)$ 上的两点 $P'(Q',-t)$ 及 $P_1'(Q_1',-t_1)$ 分别是曲线 $Q=Q(t)$ 上两点 $P(Q,t)$ 及 $P_1(Q_1,t_1)$ 关于 $t=0$ 轴的对称点，并且曲线 $Q'=Q(-t)$ 的变化从点 $P_1'(Q_1',-t_1)$ 指向点 $P'(Q',-t)$，令 $-t_1=-t-\Delta t$，则 Q' 从时刻 $-t_1$ 到 $-t$ 随时间产生的变化为

$$\Delta\left(\hat{T}Q\right)=\Delta Q'=Q(-t)-Q(-t_1)=Q(-t)-Q(-t-\Delta t) \tag{5}$$

令 $\Delta t\to 0_+$，则 $-t_1=-t-\Delta t\to -t$，$\Delta Q'$ 在时刻 $-t$ 的左极限暨 Q' 的微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\hat{T}Q(t)\right)&=\mathrm{d}\lim_{\Delta t\to 0-}\Delta Q'=\lim_{\Delta t\to 0-}\left(Q(-t)-Q(-t-\Delta t)\right)\\&=\lim_{\Delta t\to 0-}\left(Q(t)-Q(t+\Delta t)\right)=-\mathrm{d}Q(t)\end{aligned} \tag{6}$$

另外，曲线 $Q'=Q(-t)$ 在时间 $-t$ 的正方向上的导数则为

$$\mathrm{d}\left(\hat{T}Q(t)\right)/\mathrm{d}t=-\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t \tag{7}$$

假定 Q 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，即 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=-Q(t)$，并且 Q 的 $\hat{T}$ 运算所得其反演量 $\hat{T}Q$ 如图 2 中曲线 $Q''=Q(-t)$ 所示。显然，曲线 $Q''=Q(-t)$ 上的两点 $P''(Q'',-t)$ 及 $P_1''(Q_1'',-t_1)$ 分别是曲线 $Q=Q(t)$ 上的两点 $P(Q,t)$ 及 $P_1(Q_1,t_1)$ 关于坐标原点 $O(0,0)$ 的对称点，并且曲线 $Q''=Q(-t)$ 的变化从点 $P_1''(Q_1'',-t_1)$ 指向点 $P''(Q'',-t)$，则 Q 的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数分别为

$$\mathrm{d}\left(\hat{T}Q(t)\right)=\mathrm{d}Q(t) \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\left(\hat{T}Q(t)\right)/\mathrm{d}t=\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t \tag{9}$$

特别的，由于时刻 t 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，即 $\hat{T}t=t'=-t$，则有：$\mathrm{d}\left(\hat{T}t\right)=\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\neq-\mathrm{d}t$，这一结论与时

间反演变换的新定义内容完全一致。上述结论显然可以推广至 Q 是空间坐标 $x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 及时刻 t 的多元函数的情况。显然，Q 的微分和导数与其反演量 Q' 的微分和导数之间的这些关系正确反映了两者之间互为逆过程的特征。根据上述结论并结合数学归纳法还可以得到如下关于 Q 的 $2n-1$ 及 $2n$ 阶导数与其反演量 Q' 的 $2n-1$ 及 $2n$ 阶导数之间关系的更一般的结论。

假定 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性，即有 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=Q(t)$，同时 Q 的 $2n$ 阶导数 $\mathrm{d}^{2n}Q(t)/\mathrm{d}t^{2n}$ ($n=1,2,3,\cdots,k$)存在，则 $\hat{T}Q(t)$ 的 $2n-1$ 及 $2n$ 阶导数分别为

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n-1}}=\frac{-\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=-\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}} \tag{10}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}} \tag{11}$$

假定 $Q=Q(t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，即有 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=Q(t)$，同时 Q 的 $2n$ 阶导数 $\mathrm{d}^{2n}Q(t)/\mathrm{d}t^{2n}$ ($n=1,2,3,\cdots,k$)存在，则 $\hat{T}Q(t)$ 的 $2n-1$ 及 $2n$ 阶导数分别为

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}} \tag{12}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n}}=\frac{-\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}}=-\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}} \tag{13}$$

这些结论同样可以推广至 Q 为多元函数的情况。

以下是关于物理量 $Q(x_1,x_2,x_3,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算的偏微分及偏微分算符。假定 $Q(x_1,x_2,x_3,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性(或奇性)，即 $\hat{T}Q(x_1,x_2,x_3,t)=Q(x_1,x_2,x_3,-t)=\pm Q(x_1,x_2,x_3,t)$，则有

$$\frac{\partial\left(\hat{T}Q(x_1,x_2,x_3,t)\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3,t')}{\partial x_i}=\pm\frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_i} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\left(\hat{T}Q(x_1,x_2,x_3,t)\right)}{\partial t}=\frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3,t')}{\partial t'}=\mp\frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\left(\hat{T}Q^2(x_1,x_2,x_3,t)\right)}{\partial x_m\partial x_n}=\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t')}{\partial x_m\partial x_n}=\pm\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_m\partial x_n} \tag{16}$$

$$\frac{\partial\left(\hat{T}Q^2(x_1,x_2,x_3,t)\right)}{\partial t^2}=\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t')}{\partial t'^2}=\pm\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t^2} \tag{17}$$

当 $m=n$ 时有

$$\frac{\partial\left(\hat{T}Q^2(x_1,x_2,x_3,t)\right)}{\partial x_i^2}=\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t')}{\partial x_i^2}=\pm\frac{\partial Q^2(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_i^2} \tag{18}$$

其中 $i, m, n=1, 2, 3$。由此可得

$$\nabla\cdot\left(\hat{T}Q\right)=\pm\nabla\cdot Q \tag{19}$$

$$\nabla\times\left(\hat{T}Q\right)=\pm\nabla\times Q \tag{20}$$

即其 $\hat{T}$ 运算具有偶性的物理量的 $\hat{T}$ 运算的散度及旋度也具有偶性，而其 $\hat{T}$ 运算具有奇性的物理量的 $\hat{T}$ 运算的散度及旋度也具有奇性。另外，还可以将上面的部分结论简化为偏微分算符的形式

$$\hat{T}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{21}$$

$$\hat{T}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial'}{\partial t'}=-\frac{\partial}{\partial t} \tag{22}$$

$$\hat{T}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n} \tag{23}$$

$$\hat{T}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial'^2}{\partial t'^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{24}$$

当 $m=n$ 时有

$$\hat{T}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{25}$$

其中 $i, m, n=1, 2, 3$。这与量子力学教材中的相关结论是一致的[9]。

通过上述讨论可见，对物理量的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数不能简单的把其时刻 t 用 $-t$ 替换，而必须同时考虑物理量的 $\hat{T}$ 运算的奇、偶性及时间方向不因 $\hat{T}$ 运算而发生改变等因素，这与当前普遍采用的方法不同。

2.3. 物理量的时间反演变换的性质

通过上面对 Q 的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数等的详细讨论，可以总结出如下关于物理量($Q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$)的 $\hat{T}$ 运算的一些重要性质，由于证明过程很简单，这里就不进行详细论证：

1) $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 的和的 $\hat{T}$ 运算等于 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 的 $\hat{T}$ 运算的和，即

$$\hat{T}\left(Q_1+Q_2+\cdots+Q_n\right)=\hat{T}Q_1+\hat{T}Q_2+\cdots+\hat{T}Q_n \tag{26}$$

2) $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 的积的 $\hat{T}$ 运算等于 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 的 $\hat{T}$ 运算的积，即

$$\hat{T}\left(Q_1\times Q_2\times\cdots\times Q_n\right)=\hat{T}Q_1\times\hat{T}Q_2\times\cdots\times\hat{T}Q_n \tag{27}$$

3) Q_1 与 Q_2 的商的 $\hat{T}$ 运算等于 Q_1 与 Q_2 的 $\hat{T}$ 运算的商，即

$$\hat{T}\left(Q_1/Q_2\right)=\hat{T}Q_1/\hat{T}Q_2 \tag{28}$$

4) Q 的反演量 $\hat{T}Q$ 的 $\hat{T}$ 运算等于 Q，即

$$\hat{T}\left(\hat{T}Q\right)=Q \tag{29}$$

5) Q 的微分的 $\hat{T}$ 运算等于 Q 的 $\hat{T}$ 运算的微分，即

$$\hat{T}\left(\mathrm{d}Q\right)=\mathrm{d}\left(\hat{T}Q\right) \tag{30}$$

6) Q 的导数(或偏导数)的 $\hat{T}$ 运算等于 Q 的 $\hat{T}$ 运算的导数(或偏导数)，即

$$\hat{T}\left(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t\right)=\mathrm{d}\left(\hat{T}Q\right)/\mathrm{d}t \tag{31}$$

或

$$\hat{T}(\partial Q/\partial t) = \partial(\hat{T}Q)/\partial t \tag{32}$$

$$\hat{T}(\partial Q/\partial x_i) = \partial(\hat{T}Q)/\partial x_i \tag{33}$$

7) Q 的 n 阶导数(或对 t 的偏导数)的 $\hat{T}$ 运算等于 Q 的 $\hat{T}$ 运算的 n 阶导数(或对 t 的偏导数)，即

$$\hat{T}(\mathrm{d}^n Q/\mathrm{d}t^n) = \mathrm{d}^n(\hat{T}Q)/\mathrm{d}t^n \tag{34}$$

或

$$\hat{T}(\partial^n Q/\partial t^n) = \partial^n(\hat{T}Q)/\partial t^n \tag{35}$$

$$\hat{T}(\partial^n Q/\partial x_i^n) = \partial^n(\hat{T}Q)/\partial x_i^n \tag{36}$$

3. 物理方程的时间反演变换

物理方程是描述物理过程中不同物理量之间的数量关系及变化规律的方程，而物理方程的时间反演变换(即 $\hat{T}$ 运算)则是研究物理过程的可逆性或者相互关联的物理量之间综合对称性的数学方法，因此，对物理方程的 $\hat{T}$ 运算的研究具有重要意义。

3.1. 物理方程的时间反演变换的定义

物理方程的 $\hat{T}$ 运算定义：物理方程 $F(x_1, x_1, \cdots, x_n, t) = 0$ 的 $\hat{T}$ 运算是将该方程中的每一个物理量分别进行 $\hat{T}$ 运算，经整理后所得新方程即是该原方程的 $\hat{T}$ 运算方程。由此，物理方程的 $\hat{T}$ 运算不变性可定义为：如果某物理方程的数学形式与其 $\hat{T}$ 运算方程的数学形式完全相同，则称该物理方程具有 $\hat{T}$ 运算不变性。显然，对具有 $\hat{T}$ 运算不变性的物理方程，原方程与其 $\hat{T}$ 运算方程具有相同解(即该方程无法区分物理过程与其逆过程)，因而相应的物理过程具有可逆性；并且具有 $\hat{T}$ 运算不变性的方程 $F(x_1, x_1, \cdots, x_n, t) = 0$，其函数 $F = F(x_1, x_1, \cdots, x_n, t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性或奇性。下面对物理学中一些重要方程的 $\hat{T}$ 运算进行讨论。

3.2. 经典力学中主要动力学方程的时间反演变换

由存在相互作用的质点构成的动力学体系除可用牛顿动力学方程描述之外，还可用哈密顿正则方程来描述：

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{38}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$；q_i 为质点的广义空间坐标，p_i 为质点的广义动量，$\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$ 与 $\partial H/\partial p_i$ 为质点的广义速度，$\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t$ 与 $\partial H/\partial q_i$ 为质点的广义作用力，$H = \sum_i p_i^2/(2m_i) + U(q_1 + q_2 + \cdots + q_{3n})$ 为动力学系统的哈密顿量。

在方程(37)及(38)中显然有 $\hat{T}q_i = q_i' = q_i$，$\hat{T}p_i = p_i' = -p_i$，$\hat{T}H = H' = H$。对方程(37)进行 $\hat{T}$ 运算，则方程的左边有

$$\hat{T}\left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}q_i'}{\mathrm{d}t'} = \frac{-\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$$

方程的右边有

$$\hat{T}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} = \frac{-\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

所以方程(37)具有 $\hat{T}$ 运算不变性。对方程(38)进行 $\hat{T}$ 运算，则方程的左边有

$$\hat{T}\left(\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}p_i'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$$

方程的右边有

$$\hat{T}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=-\frac{\partial H'}{\partial q_i'}=-\frac{-\partial H}{-\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

所以方程(38)具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

由存在相互作用的质点构成的动力学体系还可以用拉格朗日动力学方程描述：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\right)}\right)=0 \tag{39}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$； $L\left(q(t),\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\right)=T\left(\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t,\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}t,\cdots,\mathrm{d}q_{3n}/\mathrm{d}t\right)-V\left(q_1,q_2,\cdots,q_{3n}\right)$ 是拉格朗日函数。

显然，方程(39)中 $\partial L/\partial q_i$ 为广义作用力，$\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$ 为广义速度，且 $\hat{T}L=L'=L$，对其进行 $\hat{T}$ 运算，则方程(39)的左边有

$$\begin{aligned}\hat{T}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\right)}\right)\right]&=\frac{\partial L'}{\partial q_i'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\partial L'}{\partial\left(\mathrm{d}q_i'/\mathrm{d}'t\right)}\right)\\&=\frac{-\partial L}{-\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-\partial L}{\partial\left(-\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\right)}\right)\\&=\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\right)}\right)\end{aligned}$$

即方程(39)具有 $\hat{T}$ 运算不变性。也即用于描述存在相互作用的质点构成的动力学体系的经典力学方程具有 $\hat{T}$ 运算不变性，并且函数 $F=\partial L/\partial q_i-\mathrm{d}/\mathrm{d}t\left(\partial L/\partial\left(\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\right)\right)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性。

3.3. 麦克斯韦电磁场方程及洛伦兹力的时间反演变换

电磁学理论体系主要由以下麦克斯韦方程组构成：

$$\nabla\cdot B=0 \tag{40}$$

$$\nabla\times E=-\frac{1}{C}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{41}$$

$$\nabla\cdot E=4\pi\rho \tag{42}$$

$$\nabla\times B=\frac{1}{C}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{4\pi}{C}J \tag{43}$$

其中 $\nabla=i\,\partial/\partial x+j\,\partial/\partial y+k\,\partial/\partial z$ 为梯度算符，E 为电场强度，B 为磁感应强度， $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{V}$ 为电流密度，C 为光速。而带电粒子在电磁场中的运动过程所受到的电磁力即洛伦兹力的作用的表达式为：

$$F=eE+\frac{V}{C}e\times H \tag{44}$$

式中 e 是带电粒子所带的电荷量，V 是带电粒子的运动速度，E 为带电粒子所处环境的电场强度，H 是带电粒子所处环境的磁场强度，C 为光速。

由于 $\hat{T}E=E'=E$ 、$\hat{T}B=B'=-B$ 、$\hat{T}\rho=\rho'=\rho$，对方程(40)及(42)的两边进行 $\hat{T}$ 运算有

$$\hat{T}(\nabla\cdot B)=\nabla\cdot B'=-\nabla\cdot B\,,\quad \hat{T}(\nabla\cdot E)=\nabla\cdot E'=\nabla\cdot E$$

其中 $\nabla=i\,\partial/\partial x+j\,\partial/\partial y+k\,\partial/\partial z$，这样方程(40)及(42)具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

对方程(41)及(43)的两边做 $\hat{T}$ 运算，左边及右边分别有

$$\hat{T}(\nabla\times E)=\nabla\times E'=\nabla\times E\,,$$

$$\hat{T}\left(-\frac{1}{C}\frac{\partial B}{\partial t}\right)=-\frac{1}{C}\frac{\partial B'}{\partial t'}=-\frac{1}{C}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\hat{T}(\nabla\times B)=\nabla\times B'=-\nabla\times B$$

$$\hat{T}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{4\pi}{C}J\right)=\frac{1}{C}\frac{\partial E'}{\partial t'}+\frac{4\pi}{C}J'=\frac{1}{C}\frac{(-\partial E)}{\partial t}+\frac{4\pi}{C}(-J)=-\frac{1}{C}\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{4\pi}{C}J$$

从而方程(41)及(43)也具有 $\hat{T}$ 运算不变性。综合上述结论可得麦克斯韦方程组具有 $\hat{T}$ 运算不变性。另外，对方程(44)右边的 $\hat{T}$ 运算有

$$\hat{T}\left(eE+(eV/C)\times H\right)=e'E'+(e'V'/C')\times H'=eE+\left(e(-V)/C\right)\times(-H)=eE+(eV/C)\times H$$

即洛伦兹力具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

3.4. 描述微观物理过程的基本方程的时间反演变换

由于描述微观粒子运动规律的薛定谔方程是复函数形式的方程，因此无法直接利用前面获得的各种结论，在此采用汤甦野教授在其著作中提出的、与复函数形式的薛定谔方程完全等效的实函数形式的薛定谔方程组进行讨论：

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(r,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)B(r,t) \tag{45}$$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}B(r,t)=-\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)A(r,t) \tag{46}$$

其中 $A(r,t)=C\cos(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar$ 及 $B(r,t)=C\sin(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar$ 分别表示波函数 Ψ 的实部和虚部[10]。$A(r,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算有

$$\hat{T}\left(A(r,t)\right)=A(r,t')=A(r,-t)=C\cos\left(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E(-t)\right)/\hbar=A(r,t)$$

即 $A(r,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性。

而 $B(r,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算有

$$\hat{T}\left(B(r,t)\right)=B(r,t')=B(r,-t)=C\sin\left(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-E(-t)\right)/\hbar=-B(r,t)$$

即 $B(r,t)$ 对 $\hat{T}$ 运算具有奇性。

对方程(45)进行 $\hat{T}$ 运算，则方程的左边有

$$\hat{T}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(r,t)\right)=\hbar\frac{\partial}{\partial t'}A(r,t')=-\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(r,t)$$

方程的右边有

$$\hat{T}\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)B(r,t)\right)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)B(r,t')=-\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)B(r,t)$$

由此可得方程具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

对方程(46)进行 $\hat{T}$ 运算，则方程的左边有

$$\hat{T}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}B(r,t)\right)=\hbar\frac{\partial}{\partial t'}B(r,t')=\hbar\frac{\partial}{\partial t}B(r,t)$$

方程的右边有

$$\hat{T}\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)A(r,t)\right)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)A(r,t')=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(r)\right)A(r,t)$$

可见该方程组具有 $\hat{T}$ 运算不变性，即与复函数形式的薛定谔方程完全等效的联立实函数方程具有 $\hat{T}$ 运算不变性，因而复函数形式的薛定谔方程同样具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

在量子力学中，波函数 Ψ 用于描述粒子在空间中的几率分布，而且多数量子力学的问题都可归结为对薛定谔方程中的波函数 Ψ 的求解；此外，还可以通过使用力学量算符与波函数 Ψ 进行运算的方法计算出相应力学量的各本征值的几率；可见，力学量算符在量子力学中是非常重要的概念。而为了便于对各种力学量算符的 $\boldsymbol{T}$ 变换的研究，在量子力学中引入了与之对应的 $\boldsymbol{T}$ 变换算符 $\boldsymbol{T}$，如在量子力学中对粒子的坐标、动量以及轨道角动量对应的算符 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{L}$ 的 $\boldsymbol{T}$ 操作分别为 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{TxT}^{-1}=\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{TPT}^{-1}=-\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{TLT}^{-1}=-\boldsymbol{L}$ 等。其实在量子力学中 $\boldsymbol{T}$ 变换算符 $\boldsymbol{T}$ 是对量子系统中的力学量算符的 $\boldsymbol{T}$ 变换的整体性操作，其方法等同于直接将物理量中的 t 用 $-t$ 替换，因而有值得商榷之处，由于篇幅限制本文就不进行更深入的讨论。

3.5. 描述热力学系统变化过程的物理方程的时间反演变换

描述一维热导体热传导过程的傅里叶偏微分方程为：

$$\frac{\partial T(X,t)}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial^2 T(X,t)}{\partial X^2} \tag{47}$$

式中，函数 $T(X,t)$ 为热传导函数，λ 为热传导系数。

假定热传导函数 $T(X,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性，即 $\hat{T}(T(X,t))=T(X,t')=T(X,t)$，对方程(47)进行 $\hat{T}$ 运算，则方程的左边有

$$\hat{T}\left(\frac{\partial T(X,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial T(X,t')}{\partial t'}=\frac{-\partial(T(X,t))}{\partial t}=-\frac{\partial(T(X,t))}{\partial t}$$

方程的右边有

$$\hat{T}\left(-\lambda\frac{\partial^2 T(X,t)}{\partial X^2}\right)=-\lambda\frac{\partial^2 T(X,t')}{\partial X^2}=-\lambda\frac{\partial^2 T(X,t)}{\partial X^2}$$

显然，方程(47)的数学形式发生了改变，因而不具有 $\hat{T}$ 运算不变性。

假定热传导函数 $T(X,t)$ 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，同样可以证明方程(47)不具有 $\hat{T}$ 运算不变性。因而描述一维热导体热传导过程的傅里叶方程不具有 $\hat{T}$ 运算不变性，也即函数 $F=\partial T(X,t)/\partial t+\lambda\left(\partial^2 T(X,t)/\partial X^2\right)$ 的 $\hat{T}$ 运算不具有偶性或奇性，从而热传导过程具有不可逆性或单向性。由于热传导过程的逆过程与其原过程一样都是在正向流逝的时间方向上发生的，并且描述物理过程的方程 $F(x_1,x_1,\cdots,x_n,t)=0$ 是否具有 $\hat{T}$ 运算不变性完全取决于所论及的具体的物理过程或描述该过程物理方程的数学结构，更确切地说取决于函数 $F=F(x_1,x_1,\cdots,x_n,t)$ 是否具有奇偶性，因而热传导过程的不可逆性与时间的单向性(即所谓的“时间箭头”)无关，而是由其自身更深层的原因所致；同样的，由于基本物理过程的逆过程与其原过程一样

也是在正向流逝的时间方向上发生的，因而基本物理过程的可逆性也并不意味着时间的双向(或无向)性，更不是如物理学家布赖恩.格林所说的“按时间轴正向发生的运动同样也可以逆着时间轴发生”[7]。除了热传导过程之外，所有与热力学过程有关的过程都不具有 $\hat{T}$ 运算不变性，这就是热力学第二定律所揭示的内涵，由于涉及范围广，本文就不进行深入讨论。

4. 更一般意义的时间反演变换

我们知道，$\hat{T}$ 运算是以 $t=0$ 轴为对称轴(或以 $O(0,0)$ 为对称点)将物理量 $Q=Q(t)$ 进行对称变换从而在数学上实现其过程逆转的一种方法。实际上，还可以 $t=t_0$ 轴为对称轴(或者以 $P(t_0,0)$ 为对称点)对物理量 $Q=Q(t)$ 进行对称变换，如图 3 或图 4 所示，假定 t_0 是“现在”所对应的时刻。而新获得的曲线对应的 $Q'=Q'(2t_0-t)$ (或 $Q''=Q''(2t_0-t)$)同样是 $Q=Q(t)$ 的反演量，而且与用 T 变换得到的 $Q=Q(t)$ 的反演量完全等效，由此所获各种结论也完全相同(特别是 $Q(t)$与其反演量的变化也都在时间的正方向上发生)，因而可以称其为广义 T 变换，对此本文就不深入讨论。在图 3 或图 4 中如果令 $t_0=0$ 则相应的对称变换即为 T 变换，即 T 变换是这里所说的广义 T 变换的特殊情况。另外，从图中可见，这里提到的广义 T 变换既可以向“未来”的时间区域(如图 3 所示的情况中 $2t_0-t$ 是“未来”的时刻，可称其为时间的“正演”变换)、也可以向“过去”的时间区域(如图 4 所示的情况中 $2t_0-t$ 是“过去”的时刻，可称其为时间的“反演”变换)进行。可见，在数学上有不止一种方法可以实现物理过程的逆转，对研究物理过程与其逆过程之间的对称性关系而言，T 变换仅仅是其中一种简洁、常用的方法，这是一种完全等效于将所录制的某一物理过程的影像在放映机中倒放或者将该过程在人们思想中逆转(而相应的物理过程显然仍然在正向流逝的时间中发生)的方法，只不过前者是用静态的、数学的研究方法而后者则是动态的影像或想象手段，从而只具有方法论意义而并无其它特殊意义。

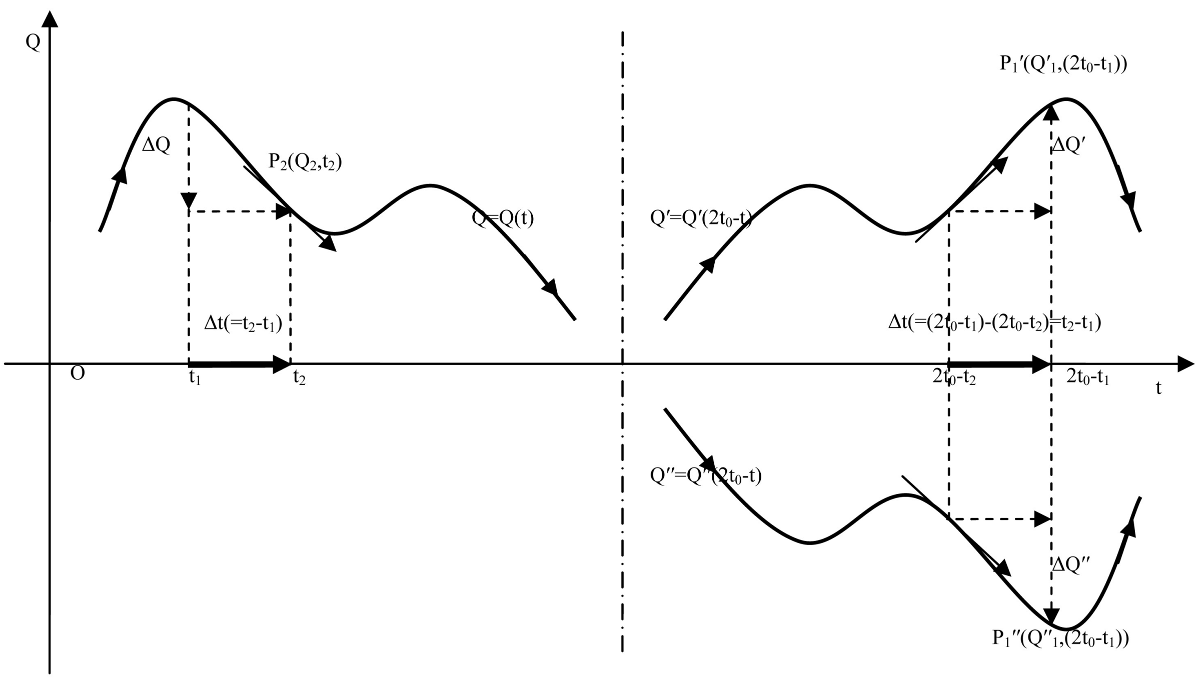

Figure 3. The generalized T-transformation of the physical quantity $Q=Q(t)$ from $t=t_0$ as the symmetric axis (or $P(t_0,0)$ to the “future”

图 3. 物理量 $Q=Q(t)$ 以 $t=t_0$ 为对称轴(或 $P(t_0,0)$ 为对称点)向“未来”的广义 T 变换

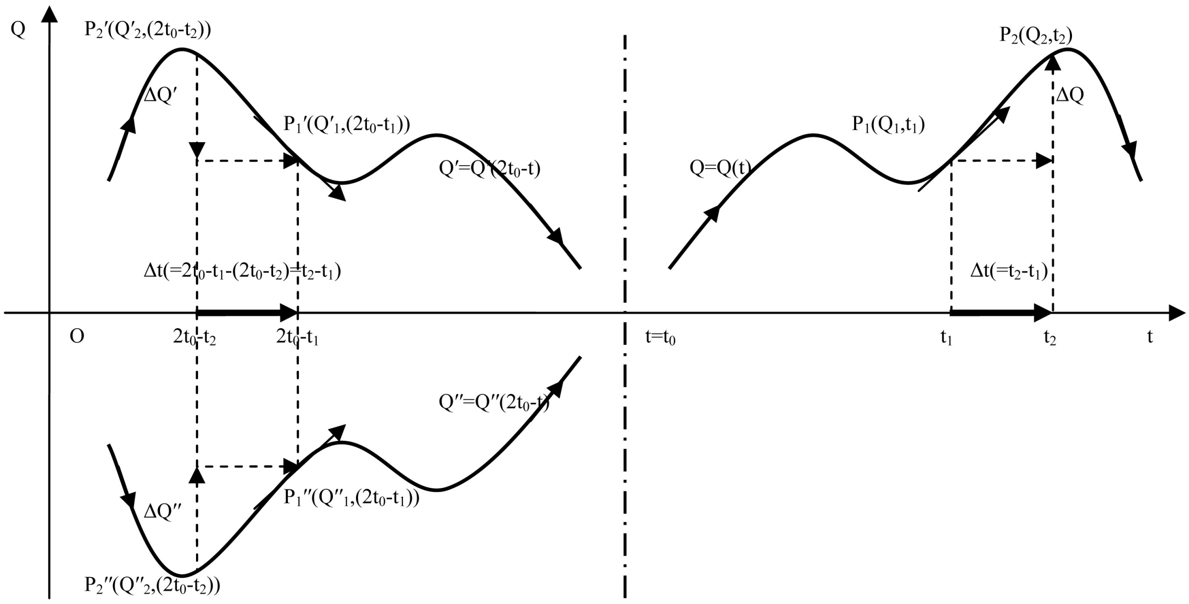

Figure 4. Generalized T-transformation of physical quantity $Q=Q(t)$ from $t=t_0$ as symmetric axis (or $P(t_0,0)$ as symmetric point) to "past"
图 4. 物理量 $Q=Q(t)$ 以 $t=t_0$ 为对称轴(或 $P(t_0,0)$ 为对称点)向“过去”的广义 T 变换

5. 结论

通过上面对物理量及物理方程的 ***T*** 变换(即 $\hat{T}$ 运算)的详细讨论，得到以下结论：

1) 由于物理量的变化过程与其逆过程都是在相同的时间方向上进行的，因此，在对物理量特别是物理量的微分或导数进行 $\hat{T}$ 运算时不能简单的将其中的时刻 t 用$-t$ 替换。如时刻 t 的 $\hat{T}$ 运算为

$$\mathrm{d}\left(\hat{T}t\right)=\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\neq-\mathrm{d}t$$

2) 如果 Q 的 $\hat{T}$ 运算具有偶性，即 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=Q(t)$，则 Q 的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数的符号发生改变。特别的，如果 Q 的 $2n$ 阶导数 $\mathrm{d}^{2n}Q(t)/\mathrm{d}t^{2n}$ （$n=1,2,\cdots,k$）存在，则有

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n-1}}=\frac{-\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=-\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}}$$

而如果 Q 的 $\hat{T}$ 运算具有奇性，即 $\hat{T}Q(t)=Q(-t)=-Q(t)$，则 Q 的 $\hat{T}$ 运算的微分及导数的符号保持不变。特别的，如果 Q 的 $2n$ 阶导数 $\mathrm{d}^{2n}Q(t)/\mathrm{d}t^{2n}$ （$n=1,2,\cdots,k$）存在，则有

$$\frac{\mathrm{d}^{2n-1}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n-1}}=\frac{\mathrm{d}^{2n-1}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n-1}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}\left(\hat{T}Q(t)\right)}{\mathrm{d}t^{2n}}=\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t')}{\mathrm{d}(t')^{2n}}=\frac{-\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}}=-\frac{\mathrm{d}^{2n}Q(t)}{\mathrm{d}t^{2n}}$$

3) 具有 $\hat{T}$ 运算不变性的物理方程 $F(x_1,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,t)=0$，其函数 $F=F(x_1,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,t)$ 的 $\hat{T}$ 运

算具有奇性或偶性，并且相应的物理过程具有可逆性。具体地说，描述最基本物理过程的方程具有 $\hat{T}$ 运算不变性，并且相应的物理过程具有可逆性；描述热力学过程的方程不具有 $\hat{T}$ 运算不变性，从而相应的物理过程不具有可逆性。

4) 由于物理过程与其逆过程都在正向流逝的时间方向上发生变化，因此基本物理过程的可逆性以及热力学过程的不可逆性(即单向性)均与时间的方向性无关从而并非意味时间的双向性或单向性。

5) $\hat{T}$ 运算是研究物理过程可逆性的一种数学工具，只具有方法意义。

致　谢

在此谨向中央电视台 10 套编导曲新志先生、郭卉敏先生的帮助表示最诚挚的谢意。同时更要感谢尊敬的陈建良先生及武新贤先生的关心帮助！

参考文献

[1] 彼得·柯文尼, 罗杰·海菲尔德, 等. 时间之箭－解开时间最大奥秘之科学旅程[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1995: 35.

[2] 冯端, 冯少彤, 等. 溯源探幽熵的世界[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 107.

[3] 布赖恩·格林. 宇宙的结构－空间、时间以及真实性的意义[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2012: 169.

[4] 布赖恩·格林. 宇宙的结构－空间、时间以及真实性的意义[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2012: 170.

[5] 布赖恩·格林. 宇宙的结构－空间、时间以及真实性的意义[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2012: 172.

[6] 刘希明. 高等量子力学[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002: 229-230.

[7] 布赖恩·格林. 宇宙的结构－空间、时间以及真实性的意义[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2012: 159.

[8] 张永德. 量子力学[M]. 第 4 版. 北京: 科学出版社, 2017: 346.

[9] 尹鸿钧. 量子力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999: 455.

[10] 汤甦野. 熵: 一个世纪之谜的解析[M]. 第 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008: 177.