Modern Physics 现代物理, 2021, 11(3), 59-68
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2021.113008

Hans汉斯

高温极限下Landau抗磁性的数学描述

王双特，于恒国

温州大学数理学院，浙江 温州
Email: wangshuangte@163.com

收稿日期：2021年4月12日；录用日期：2021年5月18日；发布日期：2021年5月25日

摘 要

本文根据Landau抗磁性中矢势的选取具体计算了高温极限下的磁化率和总粒子数及其相应的结果。结果表明，磁化率和总粒子数与矢势的选取无关，高温极限下将出现磁化率。

关键词

Landau抗磁性，高温极限，配分函数，磁化率

Mathematical Description of the Landau Diamagnetism in the High Temperature Limit

Shuangte Wang, Hengguo Yu

College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: wangshuangte@163.com

Received: Apr. 12th, 2021; accepted: May 18th, 2021; published: May 25th, 2021

Abstract

In this paper, magnetic susceptibility and total number of particles with their approximate results in the high temperature limit are calculated concretely to the Landau diamagnetism via the choice of a vector potential. The results indicate that magnetic susceptibility and total number of particles are both unrelated to the choice of vector potential, and the Landau diamagnetism will occur in the high temperature limit.

文章引用: 王双特, 于恒国. 高温极限下 Landau 抗磁性的数学描述[J]. 现代物理, 2021, 11(3): 59-68.
DOI: 10.12677/mp.2021.113008

Keywords

Landau Diamagnetism, High Temperature Limit, Partition Function, Magnetic Susceptibility

1. 引言

关于抗磁性的认识，在经典物理学中用轨道磁矩的改变来解释抗磁性[1] [2]：一是核外电子受到磁场产生的 Lorentz 力后运动速率发生变化，从而产生一个与外磁场反向的磁矩(反方向附加磁场)；二是外磁场增大过程中产生涡旋电场力使得电子速率发生变化，从而产生反向磁矩；三是磁力矩引起进动，从而产生与外磁场反向附加磁矩[3] [4] [5] [6] [7]。

尽管经典物理模型更容易被理解，但物质抗磁性本质上还是量子效应所产生的现象，需引入分别由 E. Fermi 和 P. A. M. Dirac 独立发展的 Fermi-Dirac 统计。对于(有效)质量为 m，带有电荷 q 的电子处于均匀外磁场中，一方面电子由于 Lorentz 力作用产生圆周轨道运动而对磁场形成一定抗磁性，其运动轨道是量子化的；另一方面是电子又产生自旋方向平行于磁场的顺磁性。其中第一种情况称为 Landau 抗磁性(轨道电子的抗磁性)，又称 Landau 反磁性；第二种情况称为 Pauli 顺磁性(传导电子的顺磁性)，与经典的 Langevin 顺磁理论有不同的结果。

Landau 抗磁性最初由 L.D. Landau，R. Peierls 等人予以考虑[8] [9] [10]。Landau 在 1930 年用量子力学来考虑这一问题时发现，当 KBT 比能级间隙还要大时，表面电流消失，即抗磁性[10]。Lionel Friedman 讨论了小尺度的 Landau 抗磁性，Klaus Richter 等通过准经典近似方法得到了任意磁场下的 Landau 抗磁性[11] [12]。一个有趣的现象是：中子星内壳层中的电子就是处于高度简并的电子态，Landau 反磁矩变得更重要，使得年轻的中子星(温度较高)中有磁星存在[13]。

在文[14]中指出自由电子气是遵从 Fermi 统计的，不能用经典的 Boltzmann 统计来近似地解决，同时作者采用理想 Fermi 体系中统计力学的有关理论和 Laplace 变换，推导了 Landau 抗磁性的相关计算公式，并解释了低温强场中介质磁化率的 de Haas-van Alphen 效应(DHVA 效应)。DHVA 效应仅是 Landau 抗磁性中低温强场条件下的一个特例，最早在 1930 年由 de Haas 和 van Alphen 在研究金属铋的低温磁性时发现，之后由 R. Peierls 予以理论解释，其现象直到 1968 年才被 Sullivan 和 Seidel 发现[15]。文[16]从原子磁矩的计算入手，利用量子力学微扰论方法探讨了原子在外磁场中的顺磁磁化和抗磁磁化。更进一步的，文[17]利用 q-形变代数和 Jackson 导数考虑了高温极限下 D 维嵌入的 Landau 抗磁性问题，指出当 $q \to 1$ 时与已知文献一致。这对于额外维物理研究具有参考意义，如现代宇宙学，粒子物理学和弦理论。

区别于电荷－磁场作用对磁性的影响，文[18]则以磁场和简谐势阱约束的二维和三维荷电自旋-$\frac{1}{2}$ Fermi 气体为模型，采用准经典近似方法研究系统的热力学性质。作者表明系统不再呈现单一的 Landau 抗磁性，而是随着自旋因子呈现由抗磁性到顺磁性的转变，文[19]同样揭示了这一现象。文[20]通过 Lande 因子 g 研究了匀强磁场中三维带电旋量 Fermi 气体的磁性，得到了电荷－磁场作用引起的抗磁性和自旋－磁场作用引起的顺磁性之间的竞争性关系。作者表明，在高温极限下遵循 Fermi-Dirac，Bose-Einstein 及 Maxwell-Boltzmann 统计的三种自旋-1 气体的临界值(描述抗磁性和顺磁性) g_c 都将趋于同一个值。

本文对于电荷－磁场作用下 Landau 抗磁性研究所涉及的过程重新进行了考虑，安排如下：首先是关于单电子方程的求解并给出了相应能级的简并度；其次根据高温极限这一条件得到了系统磁化率和总粒子数的具体结果，给出了所涉及的推导过程及其近似处理结果，同时揭示了高温极限下可出现抗磁性；最后是总结和讨论。

2. Landau 规范下单电子方程

无论顺磁性或抗磁性，系统都遵循 Fermi-Dirac 统计，Hamilton 量可统一写为

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}+\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\mu_0\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}\text{，}\tag{1}$$

其中的两项分别对应上述两种情况，μ_0 是 Bohr 磁子，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 Pauli 矩阵。当我们考虑 Landau 抗磁性时，只取第一项并作相应的量子化 $\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$。根据带电粒子在电磁场中的 Lagrange 量 $L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-q\phi+\frac{q}{c}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$，并利用 Coulomb 规范也可以得到该 Hamilton 量。

现在假设磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是均匀的且沿着 z 轴正方向，大小为 H，根据电动力学公式 $\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ (这里相差一个系数，但并不影响结果，只需做对应 $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{B}$ 即可)，分量方程为 $\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k=H\delta_{i3}$，$i=1,2,3$，其中 ε_{ijk} 是 Levi-Civita 符号，δ_{ij} 是 Kronecker delta 符号。但需要取 Landau 规范，其基本思想表述为：选定矢势在 X 或 Y 方向分量不为零，而在 Z 方向为零。因此求得矢势 $\boldsymbol{A}$ 有如下两种特殊结果：(a) $\boldsymbol{A}=(0,Hx,0)$；(b) $\boldsymbol{A}=(-Hy,0,0)$。对于后者所得的结果，可通过前者作变换 $x\leftrightarrow y$，$H\leftrightarrow -H$ 得到。

现以 $\boldsymbol{A}=(0,Hx,0)$ 为出发点，同时考虑到整个系统处于体积为 $V=L_x\times L_y\times L_z$ 的箱体内，单电子抗磁性 Hamilton 量为 $\hat{H}=\frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y+\frac{qH}{c}x\right)^2+\hat{p}_z^2\right]$。假设波函数具有形式 $\psi(x,y,z)=\mathrm{e}^{i(k_2y+k_3z)}f(x)$，代入 Hamilton 量本征方程 $\hat{H}\psi=\varepsilon\psi$ (或定态 Schrodinger 方程)有

$$\left(\frac{\hat{p}_{x'}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x'^2\right)f(x')=\varepsilon' f(x')\text{，}\tag{2}$$

其中 $\omega_0=\frac{qH}{mc}$ 是谐振子的固有频率，$x'=x+x_0$，$x_0=\frac{cp_y}{qH}$，$\varepsilon'=\varepsilon-\frac{p_z^2}{2m}$，$p_y=\hbar k_2$，$p_z=\hbar k_3$。显然这是振动中心处于 $-x_0$ 的谐振子方程，精确解以及相应能级为

$$f_j(x')=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^j\cdot j!}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\alpha^2x'^2}H_j(\alpha x')\text{，}\quad \varepsilon_j'=\left(j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\text{，}\quad j\in\mathbb{N}\text{。}\tag{3}$$

这里 $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$，$H_j(x)$ 为 Hermite 多项式。因此 Landau 能级为 $\varepsilon_j=\frac{1}{2m}p_z^2+\varepsilon_j'$，能级间距为 $\hbar\omega_0$。

下面来求能级的简并度。从物理学角度看，简并度是描述系统偏离经典物理学的程度，指同一能级上不同状态的数目。从代数学角度考虑，同一特征值对应的不同特征向量个数称为简并度，或者说本征子空间 $V_\lambda=\{\xi\mid A\xi=\lambda\xi,\xi\in P^n\}$ 的维数就是简并度。利用 Bohr-Sommerfeld 量子化条件 $p_yL_y=hn_y$ 知道 $k_2L_y=2\pi n_y$ $(n_y\in\mathbb{Z})$，要求振动中心限制在箱体内，因此简并度为 $g=\frac{qHL_xL_y}{ch}$，相应能级密度为 $\frac{g}{\hbar\omega_0}=\frac{2\pi mL_xL_y}{h^2}$。关于简并度的计算还可参看[21] [22]。在[23]中提到：如果电子局限在 X-Y 平面上一个

有限面积 S 中运动，能级简并度为 $f=\dfrac{qBS}{ch}$。这与我们求得的结果一致。

3. 高温极限下配分函数与磁化率

根据 Fermi-Dirac 统计，配分函数为 $\Xi=\prod_{a=1}^{g}\prod_{j=0}^{\infty}\prod_{p_z}\left(1+ze^{-\beta\varepsilon_j}\right)$，则

$$\ln\Xi=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p_z}g\ln\left(1+ze^{-\beta\varepsilon_j}\right)\to\sum_{j=0}^{\infty}\frac{gL_z}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_z\ln\left(1+ze^{-\beta\varepsilon_j}\right). \tag{4}$$

最后一步在对 p_z 求和时采用积分的方式：$\sum_{p_z}\cdots\to\frac{L_z}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_z\cdots$，并结合了 $\Delta p_zL_z\approx h$ (见 Bohr-Sommerfeld 量子化条件)，这样可以保持积分的合理性(积分测度不变性)。利用积分结果 $\int_{-\infty}^{+\infty}dp_ze^{-\beta\varepsilon_j}=\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}e^{-\beta\varepsilon_j'}$ 可知(4)中最后的表达式是收敛的。现对(4)作 Taylor 级数展开并交换积分号与求和号，可得

$$\begin{aligned}\ln\Xi&\overset{(1)}{=}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2gL_z}{h}\int_0^{\infty}dp_z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^ne^{-n\beta\varepsilon_j}\\&\overset{(2)}{=}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2gL_z}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\int_0^{\infty}dp_ze^{-n\beta\varepsilon_j}\\&\overset{(3)}{=}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2gL_z}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\sqrt{\frac{m\pi}{2n\beta}}e^{-n\beta\varepsilon_j'}\\&\overset{(4)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{gL_z}{\lambda}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}z^n\frac{e^{-ny}}{1-e^{-2ny}}\\&\overset{(5)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi mV}{h^2\beta\lambda}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}z^n\frac{ye^{-ny}}{1-e^{-2ny}}.\end{aligned} \tag{5}$$

注意这里的 $y=\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_0=\frac{q\beta\hbar}{2cm}H$，$\lambda=\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}$ 是平均热波长，$\beta=\frac{1}{k_BT}$。在高温极限下有 $|z|\ll1$ 且 z 应趋向于 0 以保证后面的平衡时总粒子数 $\langle\hat{N}\rangle$ 为有限值。以下逐项分析(5)中运算的合理性。

(i) 等号 $\overset{(3)}{=}$ 后的无穷级数(绝对)收敛，因为

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^{\frac{3}{2}}}e^{-n\beta\hbar\omega_0\left(j+\frac{1}{2}\right)}\le\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}e^{-j\beta\hbar\omega_0}=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{1-e^{-\beta\hbar\omega_0}}, \tag{6}$$

其中是 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta 函数，并且由[24]或[25]可知无穷级数 $\sum_{j=0,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}z^ne^{-n\beta\hbar\omega_0\left(j+\frac{1}{2}\right)}$ 是绝对收敛的且两个求和号可交换次序。

(ii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 绝对收敛，且 $\frac{e^{-ny}}{1-e^{-2ny}}=\frac{1}{e^{ny}-e^{-ny}}$ 关于 n 单调递减有界，由 Abel 判别法知等号 $\overset{(4)}{=}$ 后的无穷级数绝对收敛。由此可知(iii)的交换性成立。

(iii) 等号 $\overset{(2)}{=}$ 后的积分改写成 $\int_0^{\infty}\mathrm{d}p_z\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_j}=\sum_{m=0}^{\infty}\int_m^{m+1}\mathrm{d}p_z\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_j}$，此时转化为二重级数求和问题。类似于(i)中讨论，级数求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\cdots$ 与 $\sum_{m=0}^{\infty}\cdots$ 可交换次序。显然当 $|z|<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_j}$ 一致收敛(绝对收敛)，上述定积分 $\int_m^{m+1}\mathrm{d}p_z\cdots$ 与求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\cdots$ 又可交换次序。总之，等号 $\overset{(1)}{=}$ 后的求和号 $\sum_{n=1}^{\infty}\cdots$ 与积分号 $\int_0^{\infty}\mathrm{d}p_z\cdots$ 可交换次序。

不难得到磁化强度应为

$$\mathrm{M}=k_BT\left(\frac{\partial}{\partial H}\frac{\ln\Xi}{V}\right)_{T,V,z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n q\mathrm{e}^{-ny}\left[(ny+1)\mathrm{e}^{-2ny}+ny-1\right]}{hc\beta\lambda n^{\frac{3}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^2}. \tag{7}$$

记 $a_n(y):=\frac{\mathrm{e}^{-ny}\left[(ny+1)\mathrm{e}^{-2ny}+ny-1\right]}{\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^2}$，注意到极限 $\lim_{y\to0+}a_n(y)=0$，因此对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，存在正数 $\delta_0=\delta_0\left(\frac{1}{2}\right)>0$，使得 $|a_n(y)|\le\frac{1}{2}$，$y\in(0,\delta_0)$。当 $y\ge\delta_0$ 时有不等式

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-ny}\left[(ny+1)\mathrm{e}^{-2ny}+ny-1\right]}{\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^2}\right|\le\frac{ny\mathrm{e}^{-ny}\left(\mathrm{e}^{-2ny}+1\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-ny}}{1-\mathrm{e}^{-2ny}}\le\frac{2}{\left(1-\mathrm{e}^{-2\delta_0}\right)^2}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\delta_0}}. \tag{8}$$

再取正数 $\max\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{\left(1-\mathrm{e}^{-2\delta_0}\right)^2}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\delta_0}}\right\}$ 可知(7)中的级数关于 y 是一致收敛的，因此(5)可逐项求导。

磁化率为

$$\chi=\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{T,V,z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^nq^2\mathrm{e}^{-ny}\left[(ny+2)\mathrm{e}^{-4ny}+6ny\mathrm{e}^{-2ny}+ny-2\right]}{4\pi\lambda mc^2\sqrt{n}\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^3}. \tag{9}$$

同样(9)中的级数也是一致收敛的，但注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{\sqrt{n}}$ 绝对收敛，以及类似的不等式

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{e}^{-ny}\left[(ny+2)\mathrm{e}^{-4ny}+6ny\mathrm{e}^{-2ny}+ny-2\right]}{\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^3}\right|\\&\le\frac{ny\mathrm{e}^{-ny}\left(\mathrm{e}^{-4ny}+6\mathrm{e}^{-2ny}+1\right)+2\mathrm{e}^{-ny}\left(1-\mathrm{e}^{-4ny}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-2ny}\right)^3}\le\frac{10}{\left(1-\mathrm{e}^{-2\delta_0}\right)^3},\ y\ge\delta_0.\end{aligned} \tag{10}$$

故又可逐项求导。最后平衡时总粒子数 $\langle\hat{N}\rangle$ 为

$$\langle\hat{N}\rangle=\left(z\frac{\partial\ln\Xi}{\partial z}\right)_{T,V,H}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi mVy}{\lambda h^2\beta}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}z^n\frac{\mathrm{e}^{-ny}}{1-\mathrm{e}^{-2ny}}. \tag{11}$$

注意(5)最后是关于 z 的幂级数，收敛半径为 e^y，由 Abel 第二定理知它是内闭一致收敛的且可关于 z 逐项求导。

4. 近似结果与抗磁性

4.1. 第一种近似

以上所得结果是高温极限下的精确结果，但过于烦琐，为此我们通过一个近似结果说明抗磁性。首先根据 z 应趋向于 0 这一特点，只取级数(9)中 $n=1$ 的项，因 $y=0$ 是可去间断点，再对上式作级数展开并取 y^0 项系数(常数项)，就得到磁化率 $\chi \approx -\dfrac{zq^2}{24\pi\lambda mc^2} < 0$ [21]，其中负号说明了由轨道量子化(纯量子效应)所引起的抗磁性，这也表明一级近似 $\chi_1 = \dfrac{zq^2 e^{-y}\left[(y+2)e^{-4y} + 6ye^{-2y} + y - 2\right]}{4\pi\lambda mc^2\left(1-e^{-2y}\right)^3} < 0$，$y \in (0, \delta_y)$，$\delta_y > 0$。同样在(7)中取 $n=1$ 项时磁化强度近似为 $\mathrm{M} \approx \dfrac{-zq\hbar y}{2mc\lambda^3 sh(y)} L(y)$，其中 $L(y) = \dfrac{1}{\coth(y)} - \dfrac{1}{y}$ 为 Langevin 函数，这样在形式上与经典的 Langevin 顺磁理论一致，负号表示由量子效应引起的抗磁性。最后只取(11)中 $n=1$ 项，总粒子数近似为 $\langle \hat{N} \rangle \approx \dfrac{4\pi mVz}{\lambda\beta h^2} \dfrac{ye^{-y}}{1-e^{-2y}} \approx \dfrac{Vz}{\lambda^3}$。

再由表达式(9)在一定条件下说明 Landau 抗磁性。记 $\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n$，$\chi_n = \chi_n'(y) z^n$，由上可知 $\chi_1' < 0$，$y \in (0, \delta_y)$。利用以下不等式

$$(ax+b)e^{-cx} \le K, K \ge \max\left\{b, \frac{a}{c}\right\}, a, b, c > 0, x \ge 0, \tag{12}$$

显然有估计式

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n &\le \frac{z^2 q^2}{4\pi\lambda mc^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(ny+2)\left(e^{-5ny} + e^{-ny}\right) + 6nye^{-3ny}}{\sqrt{n}\left(1-e^{-2ny}\right)^3} \\ &\le \frac{z^2 q^2}{4\pi\lambda mc^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{\sqrt{n}\left(1-e^{-2ny}\right)^3}. \end{aligned} \tag{13}$$

再由正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(1-e^{-2ny}\right)^3} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(2ny)^3}$ 收敛知存在正数 $M_y > 0$，使得 $\sum_{n=2}^{\infty} \chi_n \le M_y z^2$。因此在高温极限下有 $\chi < 0$，即可出现抗磁性。

当然，可取二级近似有

$$\chi = \left(z\chi_1' + z^2\chi_2'\right) + \sum_{n=3}^{\infty} \chi_n \le z\left[\chi_1' + z\left(\chi_2' + M_y\right)\right] < 0, \tag{14}$$

同样表达了抗磁性。

4.2. 第二种近似

也可以采用另一种近似方案，首先引入一个渐近展开

$$f(y) = \frac{e^{-y}}{1-e^{-2y}} = \frac{1}{2y}\left(1 - \frac{y^2}{6}\right) + O\left(y^3\right), \tag{15}$$

如果将 $f(y)$ 解析延拓到复平面上为 $f(z)$，则 $z=0$ 是孤立单极点，并有 $\lim_{z\to 0} zf(z) = \dfrac{1}{2} (\ne 0, \infty)$，因此 $f(z)$

在 $z=0$ 处某邻域内 Laurent 展开式的主要部分为 $c_{-1}z^{-1}$，而留数 $Res\left[f(z),0\right]=c_{-1}=\dfrac{1}{2}$。进一步的设 $f(z)=\dfrac{1}{2z}+c_0+c_1z+O\left(z^2\right)$，取 e^{-z} 的高阶 Taylor 展开并改写为 $\mathrm{e}^{-z}=f(z)\left(1-\mathrm{e}^{-2z}\right)$，即

$$1-z+\frac{1}{2}z^2+O\left(z^3\right)=\left[2z-2z^2+\frac{4}{3}z^3+O\left(z^4\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{2z}+c_0+c_1z+O\left(z^2\right)\right], \tag{16}$$

比较相应系数有 $c_0=0$，$c_1=\dfrac{-1}{12}$，因此可得展开式(15)。

在(5)的级数项中运用展开式(15)，就可得到下列结果：

$$\ln\Xi\approx\frac{\pi mV}{3\lambda h^2\beta}\left[6\psi_{\frac{5}{2}}(z)-y^2\psi_{\frac{1}{2}}(z)\right], \tag{17a}$$

$$\mathrm{M}\approx\frac{-qy}{6\lambda hc\beta}\psi_{\frac{1}{2}}(z), \tag{17b}$$

$$\chi\approx\frac{-q^2}{24\pi\lambda mc^2}\psi_{\frac{1}{2}}(z), \tag{17c}$$

$$\left\langle\hat{N}\right\rangle\approx\frac{\pi mV}{3\lambda\beta h^2}\left[6\psi_{\frac{3}{2}}(z)-y^2\psi_{-\frac{1}{2}}(z)\right], \tag{17d}$$

其中 Fermi 函数 $\psi_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}x^n=\dfrac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\dfrac{t^{s-1}}{x^{-1}\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t$ [18]。若 $s\in(0,1]$，则要求 $x\in(-1,1]$；若 $s\le 0$，则要求 $|x|<1$；若 $s>1$，则要求 $|x|\le 1$。这个函数也记为 $F_s(x)$，在讨论 Bose-Einstein 凝聚(BEC)时常常写为 $g_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^s}$ 的形式，例如产生 BEC 的条件为 $\dfrac{\lambda^3}{v}\ge g_{\frac{3}{2}}(1)=\zeta\left(\dfrac{3}{2}\right)\approx 2.612$。显然该函数还具有如下性质：

(i) $x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_s(x)=\psi_{s-1}(x)$，$|x|<1$；(ii) $\psi_s(1)=\left(1-\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$，$\psi_s(-1)=-\zeta(s)$，$s>1$。

同样最后一步取 $n=1$ 的项可求得弱场时的磁化率 $\chi\approx-\dfrac{zq^2}{24\pi\lambda mc^2}$ 和平衡总粒子数 $\left\langle\hat{N}\right\rangle\approx\dfrac{Vz}{\lambda^3}$，与上面的结果一致。如果改写收敛的 Fermi 函数为 $\psi_s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k+1}\left(\dfrac{1}{(2k+1)^s}-\dfrac{z}{(2k+2)^s}\right)>0$，$s>0$，则(17c)中的磁化率总为负值，同样表明了抗磁性，并且 M 也是负值，即轨道量子化引起了反磁性。

另一方面，参考[26]或[27]可知，在生成函数 $\dfrac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$ 中取 $t=-2y$，$x=\dfrac{1}{2}$ 有 $2yf(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2y)^n}{n!}B_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$|y|<\pi$，其中 $B_n(x)$ 是 Bernoulli 多项式，如前几个多项式分别为(作为补充)

$$B_0(x)=1,\quad B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_5(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{3}\right),$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42},$$

$$B_7(x)=\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)\left(3x^4-6x^3+3x+1\right),$$

$$B_8(x)=x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_9(x)=\frac{1}{10}x(x-1)(2x-1)\left(5x^6-15x^5+5x^4+15x^3-x^2-9x-3\right),$$

$$B_{10}(x)=x^{10}-5x^9+\frac{15}{2}x^8-7x^6+5x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{66}。$$

类似的，比较系数就有 $c_{-1}=\frac{1}{2}B_0\left(\frac{1}{2}\right)$，$c_0=-B_1\left(\frac{1}{2}\right)$，$c_1=B_2\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $c_n=\frac{(-2)^{n+1}}{2\cdot(n+1)!}B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$，$n=-1,0,1,2,\cdots$。利用 $B_n(x)$ 的表达式同样可得展开式(15)。注意到 $B_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2^{1-2l}-1\right)(-1)^{l-1}B_l$，$l\in\mathbb{N}$，其中 $B_n(n\in\mathbb{N})$ 是 Bernoulli 数，定义为 $\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}B_nt^{2n}$。例如前几个数分别为

$$B_0=-1，\ B_1=\frac{1}{6}，\ B_2=\frac{1}{30}，\ B_3=\frac{1}{42}，\ B_4=\frac{1}{30}，\ B_5=\frac{5}{66}，$$

$$B_6=\frac{691}{2730}，\ B_7=\frac{7}{6}，\ B_8=\frac{3617}{510}，\ B_9=\frac{43867}{798}，\ B_{10}=\frac{174611}{330}。$$

而 $B_{2l+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$l\in\mathbb{N}$，因互余宗量关系 $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$。

最后结合生成函数 $\frac{te^{xt}}{e^t-1}$，同前所述交换求和次序，利用 Abel 第一定理可得(5)，(7)，(9)及(11)的另一番表达式

$$\ln\Xi=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2\pi mV}{\beta\lambda h^2}\frac{(2y)^{2l}}{(2l)!}B_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\psi_{\frac{5}{2}-2l}(z), \tag{18a}$$

$$\mathrm{M}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{q}{hc\beta\lambda}\frac{(2y)^{2l-1}}{(2l-1)!}B_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\psi_{\frac{5}{2}-2l}(z), \tag{18b}$$

$$\chi=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{q^2}{2c^2m\lambda\pi}\frac{(2y)^{2l}}{(2l)!}B_{2l+2}\left(\frac{1}{2}\right)\psi_{\frac{1}{2}-2l}(z), \tag{18c}$$

$$\left\langle\hat{N}\right\rangle=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2\pi mV}{\beta\lambda h^2}\frac{(2y)^{2l}}{(2l)!}B_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\psi_{\frac{3}{2}-2l}(z)。 \tag{18d}$$

自然，这涵盖了近似结果(17)。

5. 总结和讨论

本文主要从数学角度重新讨论了高温极限下 Landau 抗磁性的一些问题。正如之前所说的，选取另一种矢势时可通过一个变换得到相应的结果，而磁化率近似值中没有磁场强度 H 项，因而两种矢势选取不影响磁化率(9)或其近似结果，即与矢势的选取无关。在高温极限下，如何从复杂的表达式(9)或(18c)在一定条件下直接说明 Landau 抗磁性仍是值得考虑的问题。其次，从数学角度看，在(5)的讨论中似乎蕴含了相应的无穷级数与反常积分的次序交换结论，这里所用方法对于一般的级数－积分运算具有参考意义。另外，对于低温极限($z \gg 1$)，磁化率将发生振荡，表现出 DHVA 效应，可通过变换 $z = e^{\gamma}$ 重新考虑磁化率，一个近似结果见[22]，同样表明了来源于能级量子化的 Landau 抗磁性。

致　谢

作者感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见，感谢编辑的细致工作，感谢赵敏老师和戴传军老师。

基金项目

国家重点研发计划政府间合作重点专项项目(2018YFE0103700)；国家自然科学基金面上项目(31570364)；国家自然科学基金(61871293)。

参考文献

[1] 陈俊斌, 朱霞, 谭德宏, 王凯俊. 与运动平面垂直的外磁场对电子运动的影响及抗磁性新解释[J]. 后勤工程学院学报, 2015, 31(5): 66-71.

[2] 谢莉莎, 吴本科, 刘彩霞, 邓小玖. 抗磁性的经典模型与计算[J]. 合肥工业大学学报, 2014, 37(10): 1278-1280.

[3] 刘成有. 论物质的磁性[J]. 贵州师范大学学报: 自然科学版, 2000, 18(3): 63-67.

[4] 孙长庚, 陈建梅. 电磁感应和磁介质的抗磁性[J]. 郑州工业大学学报, 2001, 22(2): 26-27.

[5] 曲成宽. 抗磁性的几种经典解释[J]. 北京印刷学院学报, 2000, 8(4): 47-50.

[6] 王小林. 物质抗磁性的经典统计解释[J]. 大学物理, 2004, 23(7): 26-27.

[7] 梁辉. 关于固体抗磁性的研究[J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2002, 19(4): 10-12.

[8] Landau, L.D. (1930) Diamagnetismus der Metalle (Paramagnetism of Metals). *Zeitschrift fur Physik A*, **64**, 629-637. https://doi.org/10.1007/BF01397213

[9] Peierls, R. (1933) Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen. II Starke Magnetfelder. *Zeitschrift fur Physik a Hadrons and Nuclei*, **81**, 186-194. https://doi.org/10.1007/BF01338364

[10] 邵宗乾, 陈金望, 李玉奇, 潘孝胤. 限制在一维谐振势下的三维自由电子气的一些热力学性质[J]. 物理学, 2014, 63(24): 240-502.

[11] Friedman, L. (1964) Question of Size Corrections to the Steady Diamagnetic Susceptibility of Small Systems. *Physical Review*, **134**, A336-A144. https://doi.org/10.1103/PhysRev.134.A336

[12] Richter, K., Ullmo, D. and Jalabert, R.A. (1996) Orbital Magnetism in the Ballistic Regime: Geometrical Effects. *Physics Reports*, **276**, 1-83. https://doi.org/10.1016/0370-1573(96)00010-5

[13] 王兆军, 吕国梁, 朱春花, 张军. 中子星中简并电子气体的临界磁化[J]. 物理学报, 2011, 60(4): 829-835.

[14] 王瑞旦. 关于朗道抗磁性的讨论[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 1985, 8(3): 45-53.

[15] 邵惠民. 德哈斯－万阿耳芬效应[J]. 物理, 1981, 10(6): 373-378.

[16] 黄茂详. 原子的磁矩顺磁性和抗磁性[J]. 湖州师专学报, 1987(6): 26-33.

[17] Brito, F.A. and Marinho, A.A. (2011) q-Deformed Landau Diamagnetism Problem Embedded in D-Dimensions. *Physica A*, **390**, 2497-2503. https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.03.003

[18] 王磊. 匀强磁场与简谐势阱中荷电自旋费米子的热力学性质[J]. 低温物理学报, 2016, 38(4): 58-63.

[19] 李宏，刘红艳，王磊，李玉山．二维带电自旋费米气体的磁性质[J]．原子与分子物理学报, 2017, 34(3): 577-580.

[20] Jian, X.L., Qin, J.H. and Gu, Q. (2010) Competition between Paramagnetism and Diamagnetism in Charged Fermi Gases. *Physics Letters A*, **374**, 2580-2583. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.04.027

[21] 杨展如．量子统计物理学[M]．北京：高等教育出版社, 2007: 158-161.

[22] 张先蔚．量子统计力学[M]．北京：科学出版社, 2008: 90.

[23] 曾谨言．量子力学卷 I[M]．北京：科学出版社, 2001: 376.

[24] 华罗庚．高等数学引论：第一卷第二分册[M]．北京：科学出版社, 1963: 97.

[25] 夏道行，严绍宗，舒五昌．实变函数论与泛函分析：上册[M]．第 2 版修订本．北京：高等教育出版社，2010: 203-204.

[26] 王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论[M]．北京：北京大学出版社, 2000: 1-2.

[27] Srivastava, H.M. and Choi, J. (2012) Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier Inc., Amsterdam, 81-82. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385218-2.00002-5