

# A New Method of Accurate Drawing Stereographic Projection for Cubic System: The Plane Geometry Method

Quncheng Fan<sup>1\*</sup>, Jiachen Kang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Materials Science and Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi

<sup>2</sup>School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi

Email: \*qcfan@mail.xjtu.edu.cn, 378547785@qq.com

Received: Jul. 22<sup>nd</sup>, 2018; accepted: Aug. 16<sup>th</sup>, 2018; published: Aug. 23<sup>rd</sup>, 2018

---

## Abstract

A new method, the plane geometry method, is developed for accurate drawing stereographic projection of cubic system. The principle and method are introduced, and the new method is used to accurately draw a stereographic projection with the higher indexes for cubic system, and a standard projection of cubic system. The plane geometry method provides the following advantages over existing methods: neither calculating the angles nor measuring the angles with Wulff Net.

## Keywords

Plane Geometry Method, Stereographic Projection, Cubic System

---

# 精确绘制立方晶系极射赤面投影图的新方法：平面几何法

范群成<sup>1\*</sup>, 康嘉晨<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西安交通大学材料科学与工程学院, 陕西 西安

<sup>2</sup>西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西 西安

Email: \*qcfan@mail.xjtu.edu.cn, 378547785@qq.com

收稿日期: 2018年7月22日; 录用日期: 2018年8月16日; 发布日期: 2018年8月23日

---

\*通讯作者。

## 摘要

本文提出了精确绘制立方晶系极射赤面投影图的新方法: 平面几何法。介绍了该法的原理及方法, 并用该法精确绘制了含有较高指数的立方晶系极射赤面投影图、立方晶系标准投影图。与传统方法相比, 新方法既不需要角度的计算, 也不需要吴氏网进行角度的测量, 简单方便, 绘图精确。

## 关键词

平面几何法, 极射赤面投影图, 立方晶系

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

极射赤面投影图是将三维空间中晶向及晶面间的相对位向关系描绘在平面中的平面投影图。极射赤面投影图是晶体塑性变形研究及织构研究的重要工具, 其中最常见的是立方晶系的极射赤面投影图[1] [2] [3] [4]。用传统方法绘制立方晶系的极射赤面投影图时, 虽然并不需要先做球面投影, 但需要进行各晶面间夹角的计算, 并用吴氏网在图中测量出这些角度, 从而确定投影点的位置[1]。本文提出用平面几何作图法精确绘制立方晶系极射赤面投影图, 运用此法精确绘制了含有较高指数的立方晶系极射赤面投影图、立方晶系标准投影图。此法的运用效果表明, 在不先做球面投影的情况下, 既不需要进行夹角计算, 也不需要吴氏网进行角度测量。

## 2. 原理与方法

在进行极射赤面投影时, 晶向和晶面都通过参考球的球心。晶向与参考球面的交点在投影面内的投影是一个点, 大多数情况下, 晶面与参考球面的交线在投影面内的投影是一段大圆弧线, 圆弧的弦是基圆的直径。图 1 所示是一个 ABC 晶面的极射赤面投影, 如果将 O 点定为[001]晶向的投影, E 点定为[100]晶向的投影, 则 A 点就是[010]晶向的投影。设晶面 ABC 与(010)面的交线 OB 的指数为 $[u_1 0 w_1]$ , 则 B 点在投影面内的投影 D 点的指数也是 $[u_1 0 w_1]$ 。按传统方法, 在不真正做投影的情况下, 要确定 $[u_1 0 w_1]$ 在投影面的确切位置, 需要先计算 $[u_1 0 w_1]$ 与[001]之间的夹角, 再利用吴氏网在 OE 线上从 O 点向右度量出这个角度, 从而确定为 D 点。下面将要介绍一种新方法, 同样不真正做投影, 但既不需要先计算 $[u_1 0 w_1]$ 与[001]之间的夹角, 也不需要利用吴氏网在 OE 线上从 O 点向右度量出这个角度。

在图 1 中, 连接 C 点和 D 并延长, 交基圆于 F 点。

在两个直角三角形  $\triangle OSD$  和  $\triangle OCD$  中,

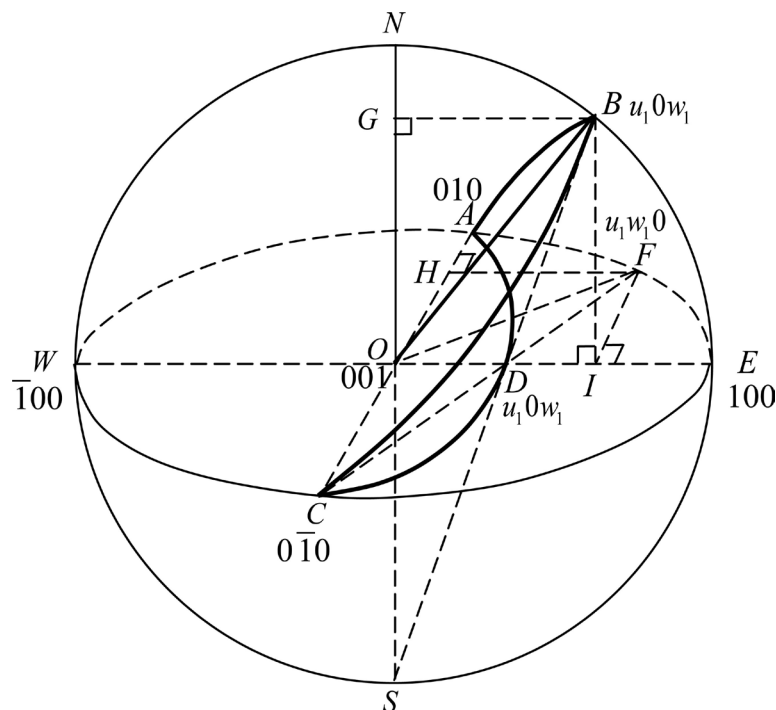
$\because OS = OC, OD$  边共用,  $\angle DOS = \angle DOC = 90^\circ$ ,

根据三角形全等定理, 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等,

$\therefore \triangle OSD \cong \triangle OCD, \angle OSD = \angle OCD$ 。

由于同弧的圆心角 2 倍于圆周角,  $\angle GOB = 2\angle OSD, \angle HOF = 2\angle OCD$ ,

$\therefore \angle GOB = \angle HOF$ 。



**Figure 1.** Schematic illustration showing the principle of the plane geometry method used to accurately draw the stereographic projection of cubic system

**图 1.** 精确绘制立方晶系极射赤面投影图的原理图

$\because OB = OF,$

$\therefore \triangle GOB \cong \triangle HOF, GO = HO.$

晶向  $OB$  (指数为  $u_1 0 w_1$ ) 在三个晶轴上的投影值分别为  $GB$ 、 $0$ 、 $GO$ ，晶向  $OF$  在三个晶轴上的投影值分别为  $HF$ 、 $HO$ 、 $0$ ，而  $GB = HF$ ， $GO = HO$ ，故， $F$  点的指数应当为  $u_1 w_1 0$ ，也就是说，将  $D$  点指数中的  $v$  值与  $w$  值换位就是  $F$  点的指数。反过来，若已知  $F$  点的指数，将其  $v$  值与  $w$  值换位就是  $D$  点的指数。

综上所述，绘制立方晶系  $(001)$  极射赤面投影图时，先在基圆的  $AE$  四分之一圆弧段用平面几何作图法确定指数为  $u_1 w_1 0$  的  $F$  点，连接  $F$  点和  $C$  点，与  $OE$  相交于  $D$  点，则  $D$  点的指数就是  $u_1 0 w_1$ 。连接  $A$ 、 $D$  两点，并作直线段  $AD$  的垂直平分线，它与直线  $OW$  或其延长线的交点就是  $D$  点所在大圆弧线的圆心，由此可绘制出  $ADC$  投影线。

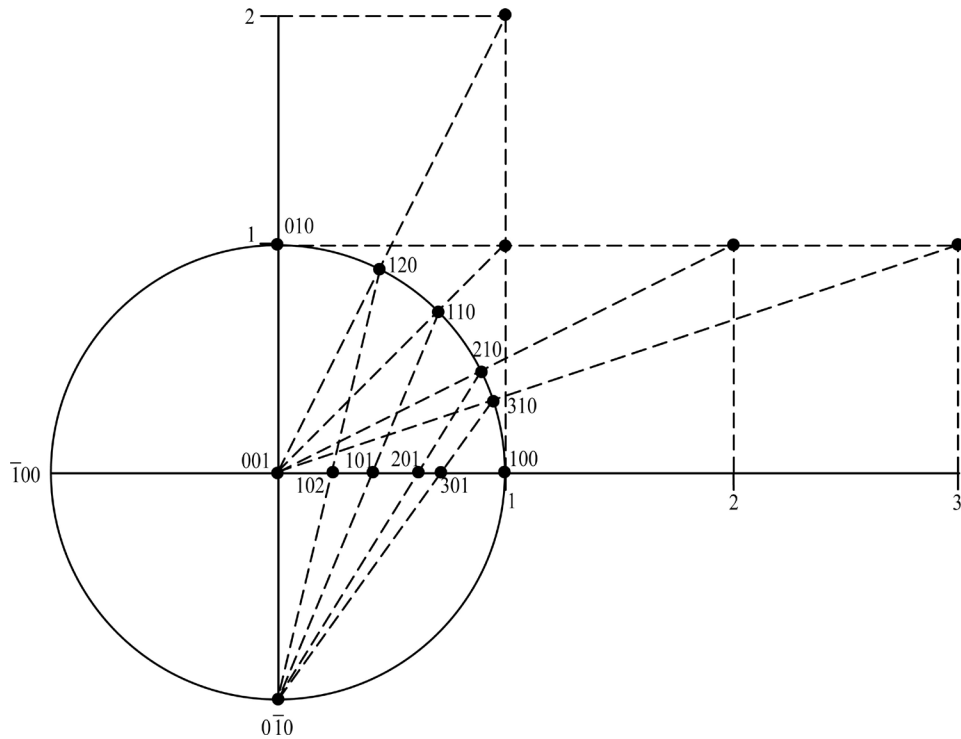
文献[4]介绍了用计算机绘制标准极图的原理，并给出了用 C 语言编写的计算和画出以任意晶系任意晶面的标准投影的程序。基于本文的上述原理，用计算机来绘制立方晶系极射赤面投影图也是有可能的，感兴趣的读者可以进行尝试。

### 3. 平面几何法的运用举例

#### 3.1. 立方晶系 $(001)$ 极射赤面投影图的精确绘制

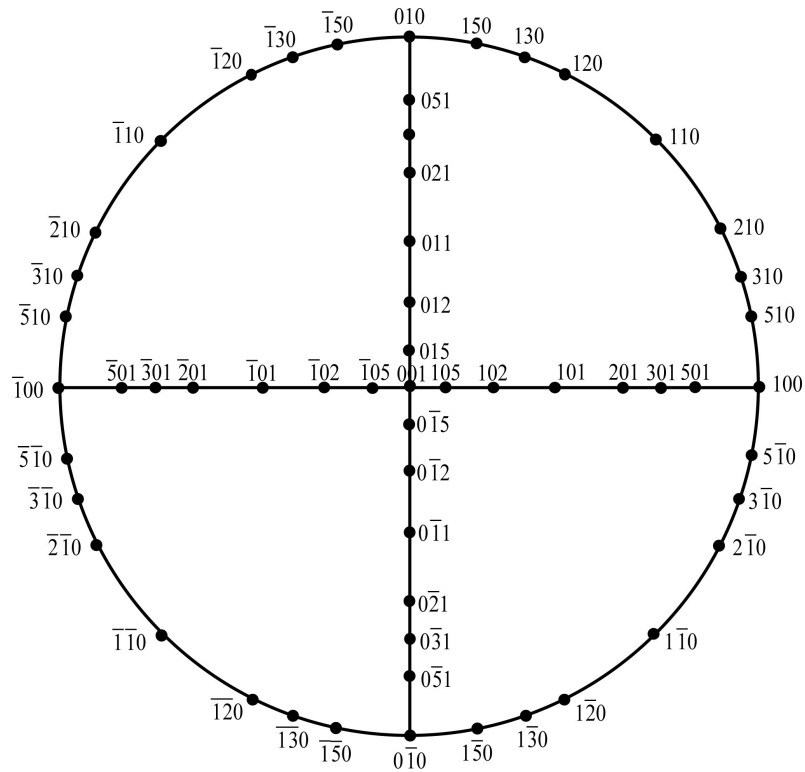
如图 2 所示，在  $001$  基圆上按右手坐标系确定  $100$ 、 $010$ 、 $\bar{1}00$ 、 $0\bar{1}0$  四个点。设基圆半径为 1，用平面几何作图法在基圆上得到  $120$ 、 $110$ 、 $210$ 、 $310$ 、等投影点。连接  $0\bar{1}0$  和  $120$  两点，在  $001$ - $100$  线上得到  $102$  投影点，同样方法还可得到  $101$ 、 $201$ 、 $301$  各投影点。图 3 是平面几何作图法在投影图上所得到的主要投影点。

下面绘制由图 3 中各投影点所确定的大圆弧线。



**Figure 2.** Schematic illustration showing the positions of the projection points in the stereographic projection being determined by the plane geometry method

**图 2.** 用平面几何法确定极射赤面投影图中投影点的位置



**Figure 3.** The positions of the projection points in the stereographic projection

**图 3.** 极射赤面投影图中各投影点的位置

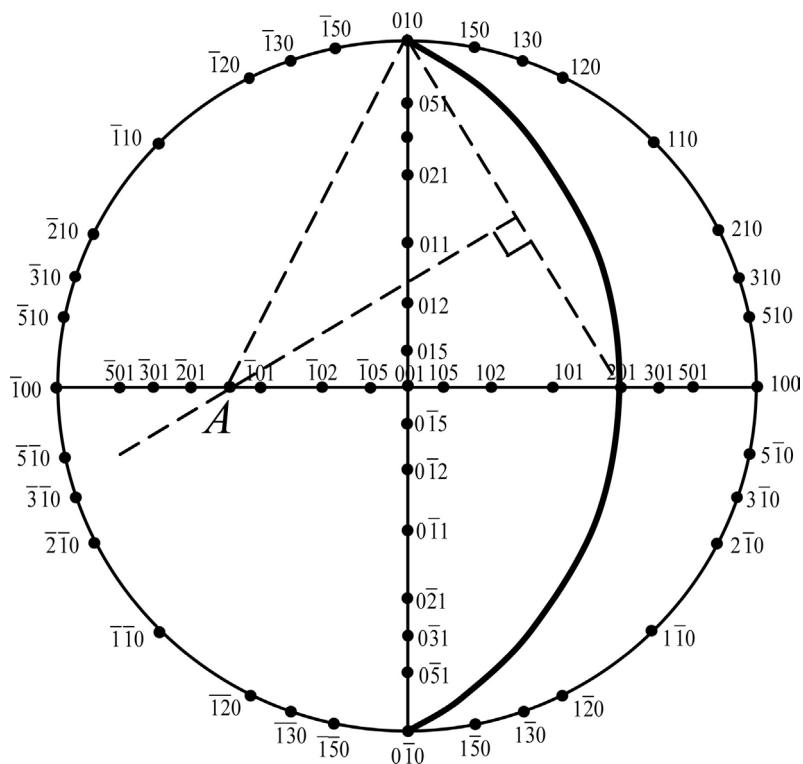


Figure 4. The drawing of projection lines by the plane geometry method  
图 4. 用平面几何法绘制投影线

以图 4 中 201 点为例。连接 201 点与 010 点，作 010-201 直线段的垂直平分线，交  $\bar{1}00$ -001 线于 A 点，以 A 点为圆心、A-010 线段为半径画弧，即得投影大圆弧线 010-201- $0\bar{1}0$ 。依照此法，可以得到其它的投影大圆弧线，如图 5 所示。

图 5 中投影线与投影线的交点指数的确定，可按照如下原理进行：两个投影线的交点，是这两个投影线所代表的两个晶面的交线，可由这两个晶面的法线的差乘求得，而晶面的法线可由该晶面内任意两个晶向的差乘求得。

以  $\bar{1}00$ -011-100 与 010-101- $0\bar{1}0$  两个大圆弧线的交点为例。

$$011 \times \bar{1}00 = 0\bar{1}1 \quad (1)$$

$$101 \times 010 = \bar{1}01 \quad (2)$$

$$\bar{1}01 \times 0\bar{1}1 = 111 \quad (3)$$

故，这两个大圆弧线的交点为 111。

### 3.2. 立方晶系(001)标准投影图的精确绘制

所谓立方晶系标准投影图，是指仅将低指数晶向( $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$ ,  $\langle 111 \rangle$ )和晶面( $\{100\}$ ,  $\{110\}$ )进行投影，图 6 是运用平面几何法精确绘制的立方晶系(001)标准投影图。其实，在绘制图中四条大圆弧线时，不必先确定它们各自的圆心，因为其圆心就是图中的 100、010、 $0\bar{1}0$ 、 $\bar{1}00$ 。以 010-101- $0\bar{1}0$  大圆弧为例，只要证明图 7 中两直线段  $WD = WA$ ，即可证明这一论断。

设基圆半径为 1，则  $WA = \sqrt{2}$ 。两直角三角形  $DOC$  和  $FHC$  相似， $OC = 1$ ， $FH = HO = \sqrt{2}/2$ ，故， $DO/OC = FH/HC$ ， $DO = (\sqrt{2}/2)/(1 + \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} - 1$ ，所以，

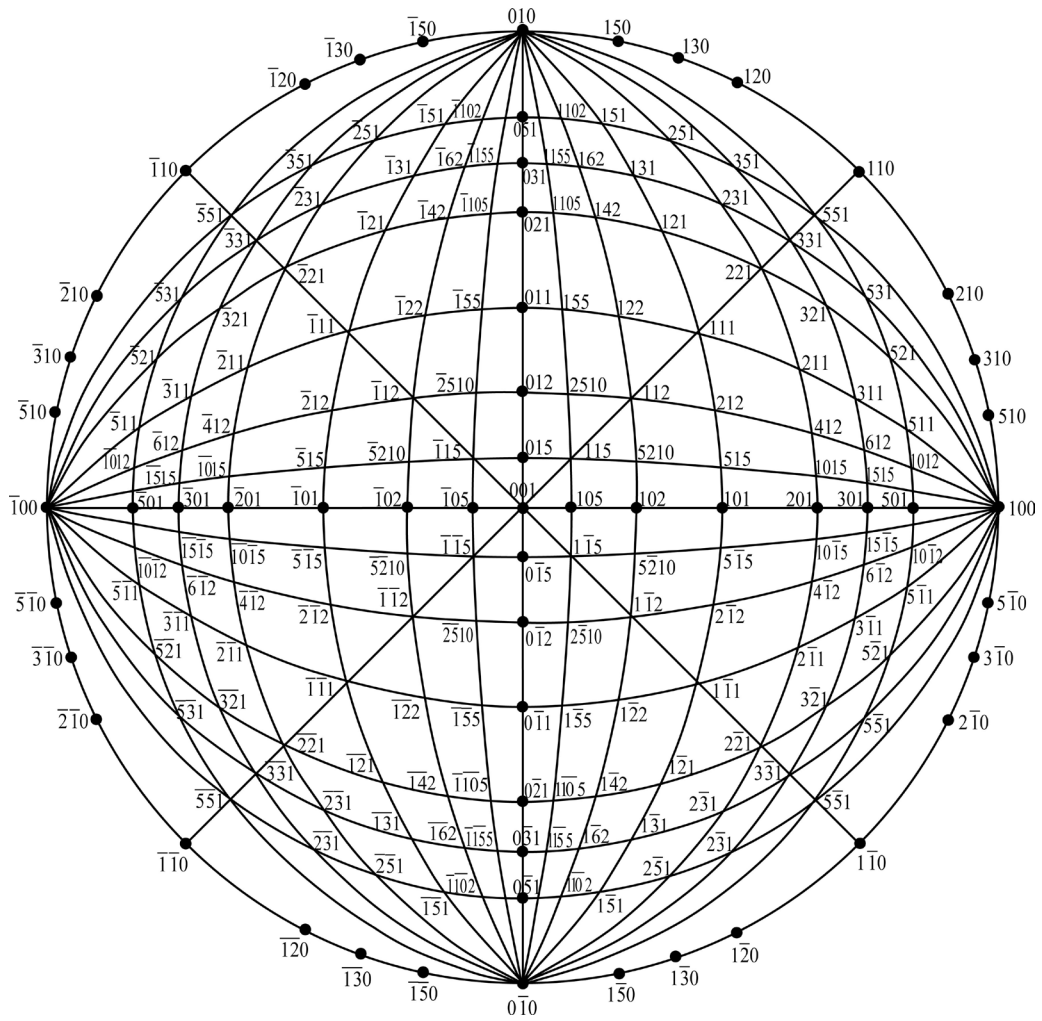


Figure 5. The (001) stereographic projection of cubic system being drawn by the plane geometry method  
 图 5. 用平面几何法精确绘制的立方晶系(001)极射赤面投影图

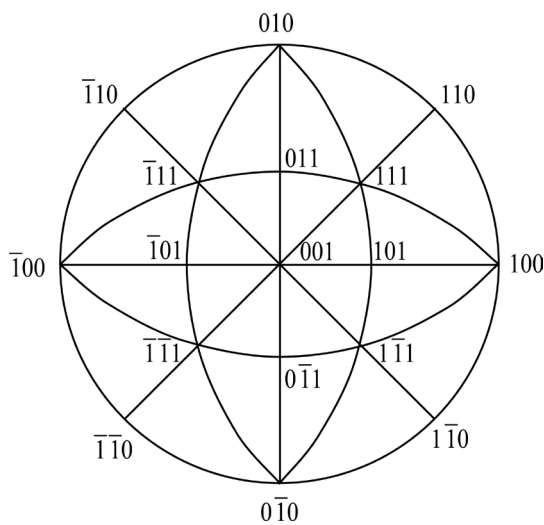
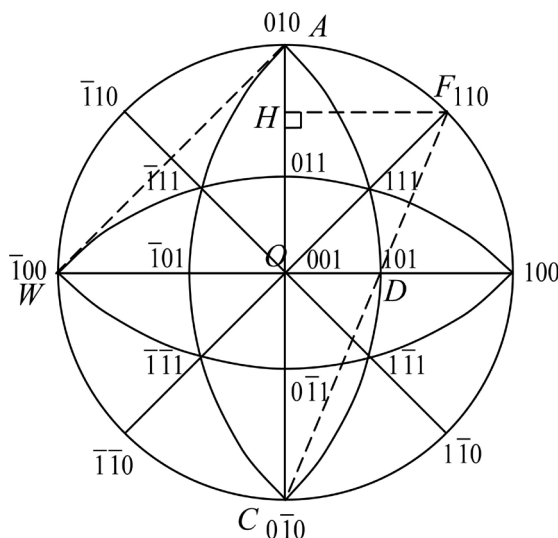


Figure 6. The (001) standard projection of cubic system being drawn by the plane geometry method  
 图 6. 用平面几何法绘制的立方晶系(001)标准投影图



**Figure 7.** The schematic illustration for proving the point W being the center of the arc ADC  
**图 7.** 证明 W 点是圆弧 ADC 的圆心的示意图

$$WD = WO + OD = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} = WA \quad (4)$$

也就是说, 不必先确定 101、011、 $\bar{1}01$ 、 $0\bar{1}1$ , 以及圆心。直接分别以 100、010、 $\bar{1}00$  和  $0\bar{1}0$  为圆心, 以 100-010 直线段为半径画圆弧, 就能得到这四条大圆弧线, 101、011、 $\bar{1}01$ 、 $0\bar{1}1$  四个投影点自然也就随之而得到了。

#### 4. 结论

基于简单的平面几何原理, 用新的方法精确绘制了含有较高指数的立方晶系极射赤面投影图、立方晶系标准投影图。新方法的应用效果表明, 该方法既不需要进行夹角的计算, 也不需要吴氏网来测定这些夹角, 简单方便, 绘图精确。

#### 参考文献

- [1] 余永宁, 主编. 材料科学基础[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 潘金生, 全健民, 田民波, 著. 材料科学基础[M]. 修订版, 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [3] 胡赓祥, 蔡珣, 戎咏华, 编著. 材料科学基础[M]. 第二版. 上海: 上海交通大学出版社, 2006.
- [4] 余永宁, 编. 金属学原理[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2005.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
 下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7613, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
 左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ms@hanspub.org](mailto:ms@hanspub.org)