

The Economic-Statistical Design of \bar{x} Control Charts under Preventive Maintenance

Fong-Jung Yu¹, Sheng-Shu Cheng², Chin-Hui Yang³, Tsung-Min Chen¹

¹Department of Industrial Engineering & Management, Da-Yeh University, Changhua County, Chinese Taipei

²Department of Business Administration, Yu-Da University of Science & Technology, Miaoli County, Chinese Taipei

³Department of Fashion Styling and Design, Yu-Da University of Science and Technology, Miaoli County, Chinese Taipei

Email: fischer@mail.dyu.edu.tw, alpha@ydu.edu.tw, wenlinyang@ydu.edu.tw, blackbox47@gmail.com

Received October 2013

Abstract

Human power has gradually replaced by automated production equipment. Therefore, during the production process, maintaining the automated production equipment in order to reduce any production variations can effectively increase product quality and lower production costs. A traditional control chart is designed on the basis of statistics. An economic control chart may achieve a lower cost, but it does not perform well in some statistic features, so the two are combined in order to compensate each other. Even so, the design of a general control chart does not consider the preventive maintenance of machine equipment. Therefore, the economic-statistical design of \bar{x} control chart is developed under a consideration of the preventive maintenance of machine equipment in this study. Numerical example is also used to demonstrate the model's working.

Keywords

\bar{x} Control Chart; Statistical-Economic Design; Preventive Maintenance

考虑预防保养之 \bar{x} 管制图经济 - 统计设计

余丰荣¹, 郑盛树², 杨锦惠³, 陈宗旻¹

¹大叶大学工业工程与管理系, 彰化县, 中华台北

²育达科技大学企业管理系, 苗栗县, 中华台北

³育达科技大学时尚造型设计系, 苗栗县, 中华台北

Email: fischer@mail.dyu.edu.tw, alpha@ydu.edu.tw, wenlinyang@ydu.edu.tw, blackbox47@gmail.com

收稿日期：2013年10月

摘要

自动化生产设备已逐渐取代人力生产，因而在制造的过程中，对自动化生产设备加以保养，可有效提升产品质量并降低生产成本。传统上，制程常透过管制图的监控以及早发现异常。但传统的管制图未考虑到经济层面，故发展出管制图的经济设计。管制图的经济设计虽然可以得到较低的成本，但在型 I 误差和检定力的统计特性方面表现并不好，故将两者结合以弥补彼此的不足。然一般管制图设计也未考虑到机器设备之预防保养，故本研究考虑机器设备之预防保养情形下，加入统计条件限制，建立 \bar{x} 管制图经济统计分析模型，并找出管制图经济 - 统计设计参数值。

关键词

\bar{x} 管制图；经济 - 统计设计；预防保养

1. 引言

Duncan[1]所提出之管制图经济设计比 Shewhart 管制图使用成本更低，但在统计绩效的表现上却不尽理想。Woodall[2]指出经济设计模式的型 I 误差较一般的统计设计模式高，而过高的型 I 误差将会产生过多的错误警报。Saniga[3]针对此缺点加入型 I、型 II 误差和 ATS(平均发生讯号时间)的统计限制，提出经济管制图设计的方法，透过数据的分析后，发现此模式虽然成本会比纯经济设计的模式高，但却可以有效的控制制程的偏移，此方法为管制图的经济 - 统计设计。Montgomery 等[4]提出 EWMA 管制图的经济 - 统计设计模式，该模式以平均连串长度或平均讯号时间做为统计的限制条件，计算样本大小、管制界限宽度、抽样间隔时间和 EWMA 管制图之平滑常数。Zhang and Berardi[5]则提出假设失效率呈 Weibull 分配下的 \bar{x} 管制图的经济 - 统计设计模式。

制程在运作期间，设备会因疲劳、磨耗、腐蚀等现象影响系统的稳定性，发生变异的机率也会随着增加，导致产品的可靠度逐渐下降，此时藉由适当的维护作业可以延缓系统的老化、设备的磨耗或疲劳的发生，减少相关成本的损失，例如不良品的产生、制程中断、设备毁损等。保养可分为两种，一种为置换，一种为修理，置换观念是由 Lotka[6]所提出，讨论路灯的置换与否。Barlow and Hunter[7]首先提出在成本架构下，加入小修理的观念，而所谓的小修理乃是系统故障后经修理回复到系统故障前的状态，在修理后系统的故障率不变。

管制图经济设计与预防保养结合方面，Ben-Daya and Rahim[8]假设失效发生时间服从 Weibull 分配，并考虑机器设备磨损问题下，运用小修理与置换的观念，找出保养水平与管制图的经济设计间的相关性。钟佳桦[9]运用变动样本数与抽样间隔时间管制图的概念，在考虑预防保养策略下结合管制图之经济性设计，运用完全搜寻法找出单位时间期望成本最小化目标下求出抽样数、抽样间隔、警告界限系数及管制界限系数之最适组合，此模式能更快侦测出非机遇原因发生，并节省更多成本。

在这些研究当中预防保养结合管制图的设计并未考虑到统计限制，而管制图的经济 - 统计设计中，也未考虑预防保养，故本研究在预防保养结合管制图的经济设计中，加入 Saniga[3]提出的统计限制，探讨制程周期成本变化。

2. 考虑预防保养 \bar{x} 管制图经济 - 统计设计

2.1. 设计模式之基本假设

- 1) 变异属于单一非机遇原因。

- 2) 产品质量服从常态分配 $N(\mu, \sigma^2)$ 。
- 3) 发生非机遇原因之机率呈指数分配
- 4) 预防保养后, 失效参数 $\lambda = r * \lambda_0$, 而 $0 \leq r \leq 1$ 。
- 5) 管制界限为 $\mu \pm k\sigma / \sqrt{n}$, 警告界限为 $\mu \pm w\sigma / \sqrt{n}$ 。
- 6) 抽样结果样本落在警告区域, 则执行预防保养。

2.2. 经济 - 统计设计

Woodall[2]指出, 在经济设计模型中, 型 I 误差(α)会比统计设计模型高, 或检定力(Power)过小的缺点。因此, Saniga[3]建议在经济设计模型中考虑统计层面, 加入适当的限制条件以解决此问题, 而限制条件可由决策者依现实状况自行决定。

由于制程在管制内状态时, 错误警报愈少发生愈好, 所以在所求得的最佳解中, 是希望 α 愈小愈好, 这样可以避免制程过度频繁调整而造成机器损坏。Power 则是相反, Power 愈大表示制程在管制外状态时, 发现异常的机率愈大。而 ATS 指的是非机遇原因发生后一直到被侦测出来的平均时间, ATS 愈小表示侦测变异所需时间愈短, 所以 ATS 愈小愈好。

综上所述, 本研究加入了三个统计限制条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \alpha_u \\ Power \geq Power_l \\ ATS \leq ATS_u \end{array} \right\},$$

其中, α_u 是指 α 的上限值, $Power_l$ 是指 Power 的下限值, ATS_u 是指 ATS 的上限值。加入愈多的统计限制会使统计制程管制愈严谨, 但加入过多的统计限制反而会提升成本, 因此, 统计限制须充分且有效的加入模式中, 使成本与限制达到最佳。

2.3. 管制图之周期时间分析

依照 Lorenzen and Vance[10]的论述, 本模式假设管制图之周期时间始于管制状态, 一直持续到非机遇原因发生, 使制程平均值产生偏移, 由管制图侦测到变异, 进行抽样、检验并解释, 接着寻找变异原因, 修复变异原因, 使制程回复到管制状态所需全部的时间。假设 P_w 为制程在管制内状态, 且抽样结果在警告界限($-w, w$)之内的机率, 则 $P_w = \varphi(w) - \varphi(-w)$, 其中, $\varphi(\bullet)$ 为常态分配之累积机率密度函数。假设 P_r 为制程在管制内状态, 且抽样结果在警告界限与管制界限之间, $(-k, -w) \cup (w, k)$ 的机率, 即制程需进行预防保养动作之机率为:

$$P_r = 2 \times [\varphi(k) - \varphi(w)]$$

令 h_0 为管制内状态之每次抽样间之期望间隔时间, 则

$$h_0 = h \times P_w + (h + Z) \times P_r$$

其中 h 为抽样时间间隔, Z 为预防保养运行时间。由于制程发生变异之机率服从指数分配, 令 τ 为变异发生前最后一次抽样到变异发生的时间, 假设变异发生在第 j 次抽样之后, 则:

$$\tau = \frac{\int_{jh_0}^{(j+1)h_0} e^{-\lambda t} \lambda (t - jh_0) dt}{\int_{jh_0}^{(j+1)h_0} e^{-\lambda t} \lambda dt}$$

因此, 管制内的时间 T_l 为:

$$T_1 = h_0(1 + e^{-\lambda h_0} + e^{-\lambda 2h_0} + e^{-\lambda 3h_0} + \dots) - (h_0 - \tau)$$

假设 P'_w 为制程在管制外状态，其抽样结果落在警告界限 $(-w, w)$ 内的机率，则：

$$P'_w = \varphi(w - \delta\sqrt{n}) - \varphi(-w - \delta\sqrt{n})$$

假设 P'_r 为制程在管制外状态下，其抽样结果落在警告界限与管制界限之间 $(-k, -w) \cup (w, k)$ 的机率，则：

$$P'_r = \varphi(-w - \delta\sqrt{n}) - \varphi(-k - \delta\sqrt{n}) + \varphi(k - \delta\sqrt{n}) - \varphi(w - \delta\sqrt{n})$$

令 h_1 为变异发生后每次抽样间之期望间隔时间，则 $h_1 = h \times P'_w + (h + Z) \times P'_r$ 。

其中 h 为抽样时间间隔， Z 为预防保养运行时间。假设 β 为型 II 误差 (Type II Error) 之机率，则 $\beta = P'_w + P'_r$ 。若 ARL_1 为变异发生后到侦测出变异之间的抽样次数，则：

$$ARL_1 = 1 / (1 - \beta)$$

所以，变异发生后到管制图侦测出异常的时间：

$$T_2 = h \times P'_w \times ARL_1 + (h + Z) \times P'_r \times ARL_1 + (h_0 - \tau)$$

抽样与检验每单位的时间为 e ，样本大小为 n ，则抽样、检验并解释结果的时间 T_3 为： $T_3 = e \times n$ 。

寻找变异来源及修复制程的时间为： $T_4 = D$ 。

管制图的总周期时间为上述四个时间函数相加，即管制图的总周期时间模式为：

$$E(T) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

2.4. 管制图之成本模式分析

成本模式以 Lorenzen and Vance[10]的管制图之经济设计模式为基础，再依预防保养策略需求加以修改，分为抽样成本、假警报之额外成本、寻找变异来源与修复制程之成本、预防保养成本、制程发生变异的额外成本。假设每次之固定成本为 a ，单位成本为 b ，则制程每次抽样成本为 $(a + b \times n)$ 。 T_1 / h_0 制程在管制内的总时间为 T_1 ，而 h_0 为管制内之每次抽样间隔时间，故管制内抽样次数为 T_1 / h_0 。而制程从管制外，到开始修复前的时间为 $(T_2 + T_3)$ ，管制外每次抽样期望间隔时间为 h_1 ，所以管制外的抽样次数为 $(T_2 + T_3) / h_1$ 。因此，抽样的总次数为 $SN = (T_1 / h_0) + [(T_2 + T_3) / h_1]$ 。则抽样之总成本为 $C_1 = (a + b \times n) \times SN$ 。

假警报是指当制程在管制内状态下，抽样样本落在管制界限外的机率，即为型 I 误差 (α) ，发生错误警报所产生之成本为 F ，而制程开始到找出变异的平均抽样次数 ARL_0 为：

$$ARL_0 = \sum_{j=0}^{\infty} j! \binom{j+1}{j} h \lambda e^{-\lambda t} dt$$

因此，假警报之额外成本 C_2 为： $C_2 = \alpha \times ARL_0 \times F$ ，假设寻找变异来源与修复制程之成本 $C_3 = V$ ，管制内执行预防保养的次数为 $P_r \times (T_1 / h_0)$ ，管制外执行预防保养的次数为 $P'_r \times ARL_1$ ，所以管制内外的预防保养总次数为 $P_r \times (T_1 / h_0) + P'_r \times ARL_1$ ，假设每次执行预防保养之成本为 C_{pm} 则预防保养之总成本 C_4 为：

$$C_4 = C_{pm} \times \left[P_r \times \left(\frac{T_1}{h_0} \right) + P'_r \times ARL_1 \right]$$

当制程发生变异而脱离管制状态后，在未被侦测出之前所产生的不良品损失即为额外成本。管制外的平均时间为 $T_2 + T_3 + T_4$ ， M 为单位时间损失成本，则制程载管制外的额外成本：

$$C_5 = (T_2 + T_3 + T_4) \times M$$

故管制图的总周期成本： $E(C) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$ ，单位时间成本为管制图的总周期时间与管制图的总周期成本相除，即： $ETC = E(C)/E(T)$ 。

3. 应用范例

本研究之范例参数以 Ben-Daya and Rahim[8]数据为参考，并加以修改部分参数数值，而统计条件是采用 Shewhart 管制图在三倍标准偏差时的统计设计做为设定。

相关参数资料分别说明如下：

- 1) 预防保养的改善因子(r)为 0.6。
- 2) 单位时间失效发生率(λ_0)为 0.05。
- 3) 变异发生时，制程平均值偏移量(δ)为 1。
- 4) 变异发生时，修正可归属原因并使制程回复到管制状态的时间(D)为 1 小时。
- 5) 抽样及检验一单位产品的时间(e)为 0.2 小时。
- 6) 预防保养时间(Z)为 0.1 小时。
- 7) 固定成本(a)为 2 元及变动成本(b)为 0.5 元。

制程变异停留在管制外期间增加的成本(M)每小时 900 元。

错误警报时，搜寻原因成本(F)为 500 元。

修正可归属原因所产生成本(V)为 1100 元。

每次预防保养(C_{pm})为 200 元。

统计限制条件假设如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq 0.003 \\ Power \geq 0.9 \\ ATS \leq 5 \end{array} \right.$$

将上述的参数数据以及限制条件，代入考虑预防保养之经济 - 统计设计模型中，由于样本数(n)2 到 18 皆无符合限制条件，而当抽样样本数(n)从 19 到 30 时，单位成本由 180.9585 增加至 256.7237，抽样间隔(h)从 1.542 增加到 3.661，管制界限(k)从 3.077 加宽到 3.5。在统计参数方面，型 I 误差(α)从 0.00209 降低到 0.00047，检定力($Power$)从 0.90006 先减少到 0.9 再开始增加到 0.97559，侦测出异常的平均讯号时间(ATS)从 1.713219 增加到 3.751063。因而在所有符合统计限制条件的参数组合中，单位时间成本在抽样样本数 19 时，成本为最低。

考虑预防保养之经济设计模式中，抽样样本数(n)从 2 到 13 时，单位成本由 190.2133 先减少至 148.8418 再增加至 156.6971，抽样间隔(h)从 1.012 先减少至 0.897 再增加至 0.982，管制界限(k)从 1.929 加宽到 3.045。在统计参数方面，型 I 误差(α)从 0.05373 降低到 0.00233，检定力($Power$)从 0.0377 增加到 0.71245，侦测出异常的平均讯号时间(ATS)从 3.332 减少到 1.378。因而单位时间成本在抽样样本数 8 时，成本为最低。

4. 结论

本研究是采用 Ben-Daya and Rahim[8]所提出的预防保养策略，并以 Lorenzen and Vance[10]的经济设计模式为基础，建构单位成本模型，在统计设计方面则加入 Saniga[3]的统计观点，在型 I 误差、检定力和平均讯号时间的限制下，求取最佳设计参数。

加入统计限制与未加入统计限制的经济 - 统计与经济设计模型之间，虽然在单位成本和侦测异常的

平均讯号时间分别增加 21.577% 和 6.743%，但在型 I 误差和检定力统计绩效方面却分别改进 71.603% 和 61.013%。使用的三个限制条件当中，平均讯号时间(ATS)的限制对于成本的敏感度是最小的，加入此限制条件不但可以弥补统计设计性的不足，也不会增加太多的成本损失。而检定力(Power)的限制对于成本较敏感，因此在订定检定力的下限值时，依决策者容许成本损失的范围来订定。至于型 I 误差(α)可依照生产者所可以承受的风险做适当的选取。

致 谢

作者们在此特别感谢国家科学委员会(NSC 102-2221-E-212-018) 及育达科技大学在经费上的支持。

参考文献 (References)

- [1] Duncan, A.J. (1956) The Economic Design of \bar{x} Charts Used to Maintain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association*, **51**, 228-242.
- [2] Woodall, W.H. (1986) Weaknesses of the Economic Design of Control Charts. *Technometrics*, **28**, 408-409.
- [3] Saniga, E.M. (1989) Economic Statistical of Control-Chart Designs with an Application to \bar{x} and R Charts. *Technometrics*, **31**, 313-320.
- [4] Montgomery, D.C, Torng J.C, Cochran J.K and Lawrence F.P. (1995) Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart. *Journal of Quality Technology*, **27**, 250-256.
- [5] Zhang, G. and Berardi, V. (1997) Economic Statistical Design of \bar{x} Control Charts for Systems with Weibull In-Control Times. *Computers and Industrial Engineering*, **32**, 575-586.
- [6] Lotka, A.J.(1939) A Contribution to the Theory of Self-Renewing Aggregates with Special Reference to Industrial Replacement. *Annals of Mathematical Statistics*, **10**, 1-25.
- [7] Barlow, R.E and Hunter, L.C. (1960) Optimum Preventive Maintenance Policies. *Operations Research*, **8**, 90-100.
- [8] Ben-Daya, M. and Rahim, M.A. (2000) Effect of Maintenance on the Economic Design of \bar{x} Control Chart. *European Journal of Operational Research*, **120**, 131-143.
- [9] 钟佳桦 (2003) 考虑预防保养之变动样本数与抽样间隔 \bar{x} 管制图经济性设计. 云林科技大学工业工程与管理研究所硕士论文.
- [10] Lorenzen, T.J and Vance, L.C. (1986) The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach. *Technometrics*, **28**, 3-10.