Management Science and Engineering 管理科学与工程, **2022, 11(4), 613-622**
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mse
https://doi.org/10.12677/mse.2022.114074

梯形直觉模糊偏好信息下的双边匹配决策

陶 媛，乐 琦，黄 鹤

上海工程技术大学，上海

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月16日；发布日期：2022年12月27日

摘 要

本文的主要内容是在梯形直觉模糊数信息的基础上提供了一种双边匹配决策方式。在梯形直觉模糊数和双边匹配的理论的基础上，给出梯形直觉模糊双边匹配问题；以实现梯形直觉模糊满意度最大为目标，构建多目标双边匹配模型；根据梯形直觉模糊数的运算，通过利用梯形模糊数去模糊化方法以及线性加权法，对所建模型转化得到单目标模型；求解该模型，做出"最佳"匹配决策。最后结合普惠金融公司与小微企业的匹配的算例，说明所提双边匹配决策的可行性和实用性。

关键词

双边匹配决策，梯形直觉模糊数，双边匹配模型

Two-Sided Matching Decision under the Condition of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Preference Information

Yuan Tao, Qi Yue, He Huang

Shanghai University of Engineering Science, Shanghai

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 16th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

This paper creates a two-sided matching decision method based on the trapezoidal intuitionistic fuzzy number information. The two-sided matching problem with trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers is described on the basis of the presented related theories of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and two-sided matchings. Then, the multi-objective two-sided matching model to maximizing the satisfaction degrees of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers can be established. The multi-objective two-sided matching model can be transformed into a single-objective two-

文章引用: 陶媛, 乐琦, 黄鹤. 梯形直觉模糊偏好信息下的双边匹配决策[J]. 管理科学与工程, 2022, 11(4): 613-622.
DOI: 10.12677/mse.2022.114074

sided matching model according to the operational laws of trapezoidal intuitionistic fuzzy number, the defuzzification method of trapezoidal fuzzy number and the linear weighted method. Moreover, the "best" two-sided matching scheme can be determined through solving the model. The feasibility and utility of the displayed two-sided matching decision is explained by the matching example between inclusive finance companies and small micro-enterprises.

Keywords

Two-Sided Matching Decision, Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Number, Two-Sided Matching Model

1. 引言

双边匹配决策研究从一开始就具有很深的管理科学背景，近年来通过各学者的深入研讨和应用，已经构成了管理实践的重要内容[1]。在政府、企事业单位的日常管理及工作部门中经常存在双方主体的相互匹配情形，并且随着互联网科技的高速发展，互联网+充斥于人们的工作、生活，双边匹配决策过程中也涌现出了一系列新的问题，体现在各个行业中，例如电子商务中交易双方的匹配[2]、风险投资内部的匹配问题[3] [4]、服务供应商和顾客之间的供需交易匹配矛盾[5]、稳定婚姻家庭里的消费匹配[6]、复杂产品的供需匹配问题[7]等。鉴于其广泛的现实背景，对双边匹配决策的具体研究具有非常丰富的理论意义和实践价值。

2. 文献综述

在早期的研究过程中，双边匹配决策主要针对的是双方主体的排序值信息[8] [9] [10] [11] [12]，决策者依据排序值偏好信息来搜寻稳定的双边匹配方案。而在近些年的研究中，众多学者将视角转向不同背景不同偏好下的双边匹配问题，从多方面展开讨论，并取得了丰富的科研成果[13]-[18]。例如，文献[13]讨论了排序值偏好信息下，基于失望理论及行为决策理论，在构建双边匹配模型的过程中，引入双方主体的心理因素，从而提出考量主体心理行为的稳定双边匹配方法。文献[14]研究基于强、弱、无差异和未知偏好序信息的情况，给出多满意稳定导向双边匹配决策思路，即通过计算四种决策导向的优化模型，提供了一种新的决策方法。文献[15]是以 Borda 分值转换为视角，通过对 Borda 分值矩阵的规范化处理，并结合差异度矩阵，针对双方主体提供的无差异序关系信息，创造了以匹配度为基础的决策方法。文献[16]研究了特定条件下基于排序值信息的多对多双边匹配问题，并得到研究结论：在此情形下存在广义中值稳定匹配。文献[17]给出了完全双边匹配的概念及其存在性理论，讨论了完全双边匹配存在与否两种情形下的双边匹配决策，进而给出了基于不完全序值情况下的决策方法。文献[18]主要研究了双边匹配市场中的公司和员工的面试问题。

然而，在具体的现实问题中，由于双方主体在各方面的不对称性，造成双方得到的信息往往具有模糊性，并且加之决策环境的局限和约束，双边匹配问题通常更为复杂。在实际情况下对双方主体的偏好信息经过分析统计处理，最终形成的数据可能是以梯形直觉模糊集信息的形式出现。目前在多属性决策[19] [20] [21] [22]中梯形直觉模糊集理论已得到大量应用，但在双边匹配决策中对于梯形直觉模糊集的理论运用还不太成熟。针对上述考虑，本文主要研究基于梯形直觉模糊偏好下的双边匹配问题：通过建立

多目标双边匹配模型，经过模型转换及求解，最终形成双边匹配方案，进而得出梯形直觉模糊下双边匹配问题的决策方法。

3. 理论基础

3.1. 定义

定义 1. 若实数集 R 上的直觉模糊数 $\tilde{a}$ 的隶属度和非隶属度表示为：

$$\phi_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}(x-\underline{a})\omega_{\tilde{a}}/(a'-\underline{a}), & \underline{a}\le x<a' \\ \omega_{\tilde{a}}, & a'\le x\le a'' \\ (\overline{a}-x)\omega_{\tilde{a}}/(\overline{a}-a''), & a''<x\le\overline{a} \\ 0, & x<\underline{a}, x>\overline{a}\end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\left[a'-x+u_{\tilde{a}}(x-\underline{a})\right]/(a'-\underline{a}) & \underline{a}\le x<a' \\ u_{\tilde{a}} & a'\le x\le a'' \\ \left[x-a''+u_{\tilde{a}}(\overline{a}-x)\right]/(\overline{a}-a'') & a''\le x\le\overline{a} \\ 1 & x<\underline{a}, x>\overline{a}\end{cases} \tag{2}$$

这里，$\omega_{\tilde{a}}$ 表示 $\tilde{a}$ 的最大隶属度、$u_{\tilde{a}}$ 表示为 $\tilde{a}$ 的最小非隶属度，满足 $0\le\omega_{\tilde{a}}\le1$、$0\le u_{\tilde{a}}\le1$，$0\le\omega_{\tilde{a}}+u_{\tilde{a}}\le1$，那么 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 称之为梯形直觉模糊数[20] [21] [22]。

进一步地，记

$$\pi_{\tilde{a}}(x)=1-\phi_{\tilde{a}}(x)-\varphi_{\tilde{a}}(x) \tag{3}$$

则称 $\pi_{\tilde{a}}(x)$ 为 $\tilde{a}$ 在 x 处的犹豫度，即是否属于 $\tilde{a}$ 的犹豫程度（也称直觉模糊指标）。

若 $\underline{a}\ge0$ 且 $\overline{a}>0$ 则称 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 为正梯形直觉模糊数，记为 $\tilde{a}>0$。同样地，如果 $\overline{a}\le0$ 且 $\underline{a}<0$，则称 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 为负梯形直觉模糊数，记为 $\tilde{a}<0$。明显地，在 $\omega_a=1$ 和 $u_a=0$ 的情况，$\phi_{\tilde{a}}+\varphi_{\tilde{a}}=1$，则 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 退化成梯形模糊数 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});1,0\right\rangle$。

定义 2. 设 $\tilde{a}=\left\langle(\underline{a},a',a'',\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 和 $\tilde{b}=\left\langle(\underline{b},b',b'',\overline{b});\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}}\right\rangle$ 为两个梯形直觉模糊数，λ 是常数，$\lambda\ne0$，则四则运算及数乘运算法则[23] [24]如下

$$\tilde{a}+\tilde{b}=\left\langle(\underline{a}+\underline{b},a'+b',a''+b'',\overline{a}+\overline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle \tag{4}$$

$$\tilde{a}-\tilde{b}=\left\langle(\underline{a}-\overline{b},a'-b'',a''-b',\overline{a}-\underline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle \tag{5}$$

$$\tilde{a}\times\tilde{b}=\begin{cases}\left\langle(\underline{a}\underline{b},a_1b_1,a_2b_2,\overline{a}\overline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}>0,\tilde{b}>0 \\ \left\langle(\underline{a}\overline{b},a_1b_2,a_2b_1,\overline{a}\underline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}<0,\tilde{b}>0 \\ \left\langle(\overline{a}\overline{b},a_2b_2,a_1b_1,\underline{a}\underline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}<0,\tilde{b}<0\end{cases} \tag{6}$$

$$\tilde{a}\div\tilde{b}=\begin{cases}\left\langle(\underline{a}/\overline{b},a_1/b_2,a_2/b_1,\overline{a}/\underline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}>0,\tilde{b}>0 \\ \left\langle(\overline{a}/\overline{b},a_2/b_2,a_1/b_1,\underline{a}/\underline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}<0,\tilde{b}>0 \\ \left\langle(\overline{a}/\underline{b},a_2/b_1,a_1/b_2,\underline{a}/\overline{b});\omega_{\tilde{a}}\wedge\omega_{\tilde{b}},u_{\tilde{a}}\vee u_{\tilde{b}}\right\rangle, & \tilde{a}<0,\tilde{b}<0\end{cases} \tag{7}$$

$$\lambda\tilde{a}=\begin{cases}\left\langle(\lambda\underline{a},\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda\overline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle, & \lambda>0 \\ \left\langle(\lambda\overline{a},\lambda a_2,\lambda a_1,\lambda\underline{a});\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle, & \lambda<0\end{cases} \tag{8}$$

$$\tilde{a}^{-1}=\left\langle\left(1/\bar{a},1/a_2,1/a_1,1/\underline{a}\right);\omega_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle,\ \tilde{a}\neq 0 \tag{9}$$

3.2. 梯形模糊数去模糊化方法

因为三角模糊数、区间数都可作为梯形模糊数的特例存在。基于此，据文献[25] [26]可知，梯形模糊数 $\hat{M}=(\underline{a},a',a'',\bar{a})$ 的去模糊化计算公式为：

$$C\left(\hat{M}\right)=\frac{\underline{a}+4a'+4a''+\bar{a}}{10} \tag{10}$$

3.3. 双边匹配理论

在双边匹配问题中，双方主体集合用 $\tau=\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m\}$ 和 $\varepsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ $(m,n\geq 2)$表示，其中 τ_i 和 ε_j 表示第 i 个 τ 方和第 j 个 ε 方主体；设 $m\leq n$，记 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$。

定义 3. 设 $\ell:\tau\cup\varepsilon\to\tau\cup\varepsilon$ 为一一映射，如 $\forall\tau_i$，$\forall\varepsilon_j$ 满足下列条件：1) $\ell(\tau_i)\in\varepsilon$，2) $\ell(\varepsilon_j)\in\tau\cup\{\varepsilon_j\}$，3) $\ell(\tau_i)=\varepsilon_j$ 当且仅当 $\ell(\varepsilon_j)=\tau_i$，那么称 ℓ 为双边匹配[27] [28]；定义中的 $\ell(\tau_i)=\varepsilon_j$ (或 (τ_i,ε_j))代表 τ_i 和 ε_j 匹配，$\ell(\varepsilon_j)=\varepsilon_j$ (或 $(\varepsilon_j,\varepsilon_j)$)代表 ε_j 未匹配（单身）。

定义 4. 设 ℓ 双边匹配，则 $\ell=\ell_{Two}\cup\ell_{One}$ [28] [29]，其中 ℓ_{Two} 代表匹配对集合，ℓ_{One} 代表未匹配对（单身对）集合。

4. 梯形直觉模糊偏好下的双边匹配决策

4.1. 梯形直觉模糊双边匹配问题

对于梯形直觉模糊双边匹配问题，设 $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ 为 τ 方到 ε 方的梯形直觉模糊矩阵，这里梯形直觉模糊数 $\tilde{a}_{ij}=\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle$，$\omega_{\tilde{a}_{ij}}$ 表示主体 τ_i 对于 ε_j 的最大隶属满意度，$u_{\tilde{a}_{ij}}$ 表示主体 τ_i 对于 ε_j 的最小隶属不满意度；设 $\tilde{B}=\left[\tilde{b}_{ij}\right]_{m\times n}$ 为 ε 方到 τ 方的梯形直觉模糊矩阵，这里 $\tilde{b}_{ij}=\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle$，$\omega_{\tilde{b}_{ij}}$ 表示主体 ε_j 对于 τ_i 的最大隶属满意度，$u_{\tilde{b}_{ij}}$ 表示主体 ε_j 对于 τ_i 的最小隶属不满意度。设 ℓ^* 为“最佳”双边匹配。

本文待解决以下问题：已知梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ 以及 $\tilde{B}=\left[\tilde{b}_{ij}\right]_{m\times n}$，利用何种决策方式，得到“最佳”双边匹配 ℓ^*。

4.2. 建立梯形直觉模糊双边匹配模型

首先，引入双边匹配矩阵 $\Theta=\left[\rho_{ij}\right]_{m\times n}$，其中 $\rho_{ij}=\begin{cases}1, & \ell(\tau_i)=\varepsilon_j\\ 0, & \ell(\tau_i)\neq\varepsilon_j\end{cases}$。根据梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{m\times n}$、$\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\tilde{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{m\times n}$，以及引入的双边匹配矩阵 $\Theta=\left[\rho_{ij}\right]_{m\times n}$，构建出双边匹配模型。将满意程度最大作为目标，将一对一匹配作约束条件，即可得到双边匹配模型(M-1)如下：

$$\text{(M-1)}\begin{cases}\max\quad D_{\tau_i}=\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij},i\in M\\ \max\quad D_{\varepsilon_j}=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij},j\in N\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}\leq 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}$$

由梯形直觉模糊数定义可知，在模型(M-1)中：$\max D_{\tau_i}=\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$ 相当于 $\max\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$ 以及 $\min\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$；$\max D_{\varepsilon_j}=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$ 相当于 $\max\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$ 以及 $\min\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$。

4.3. 求解梯形直觉模糊双边匹配模型

如果深入考虑到各方主体的同等地位，那么根据式(4)和(8)，可以利用线性加权对模型(M-1)转化为双目标双边匹配模型(M-2)：

$$
(\text{M-2})\begin{cases}\max\quad D_\tau=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}\\ \max\quad D_\varepsilon=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}\le 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

在模型(M-2)的求解过程中，由于系数$\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle$与$\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle$量纲一致，那么再次利用线性加权法可以进一步加权。目标 D_τ 和 D_ε 的权重用 w_τ、w_ε 表示，满足 $0<w_\tau,w_\varepsilon<1$，$w_\tau+w_\varepsilon=1$，则模型(M-2)进一步转化为单目标模型(M-3)：

$$
(\text{M-3})\begin{cases}\max D=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}\le 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

模型中的 $\tilde{c}_{ij}=\left\langle\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\bar{c}_{ij}\right);\omega_{\tilde{c}_{ij}},u_{\tilde{c}_{ij}}\right\rangle=w_\tau\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle+w_\varepsilon\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle$ 是根据式(4)和(8)计算得出的。

在模型(M-3)中，$\max\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\bar{c}_{ij}\right);\omega_{\tilde{c}_{ij}},u_{\tilde{c}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$ 相当于 $\max\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\bar{c}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$、$\min\sum_{j=1}^{n}\left\langle\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\bar{c}_{ij}\right);u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij}$。考虑到 $\omega_{\tilde{c}_{ij}}(x)$ 和 $u_{\tilde{c}_{ij}}(x)$ 是属于同一直觉梯形模糊数，一般情况下应视其权重相等。因而，模型(M-3)的求解转换为求解单目标双边匹配模型(M-4)：

$$
(\text{M-4})\begin{cases}\max D=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{d}_{ij}\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}\le 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

其中梯形模糊数系数 $\hat{d}_{ij}=\left(\underline{d}_{ij},d'_{ij},d''_{ij},\bar{d}_{ij}\right)=\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\bar{c}_{ij}\right)\left(\omega_{\tilde{c}_{ij}}-u_{\tilde{c}_{ij}}\right)$。

而求解(M-4)，需要对模型中的梯形模糊数系数 $\hat{d}_{ij}=\left(\underline{d}_{ij},d'_{ij},d''_{ij},\bar{d}_{ij}\right)$ 进行去模糊化处理，因此，根据式(10)，将模型(M-4)进一步转化为模型(M-5)：

$$(\text{M-5})\begin{cases}\max \quad D=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\rho_{ij} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1, i\in M; \sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}\le 1, j\in N; \rho_{ij}\in\{0,1\}, i\in M, j\in N\end{cases}$$

由于模型(M-5)是一 mn 个变量的0~1整数规划，其最多有 2^{mn} 个可行解，且 $\rho_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+1 \\ 0, & 其他\end{cases}(i\in M, j\in N)$ 是可行解。由此可知，模型(M-5)存在最优解。

目前利用 Lingo 等软件可求解模型(M-5)。通过求解，可获得“最优”匹配矩阵 $\Theta^*=\left[\rho_{ij}^*\right]_{m\times n}$。

4.4. 梯形直觉模糊双边匹配决策的具体操作

综上，总结梯形直觉模糊双边匹配决策的操作如下：

操作 1： 根据梯形直觉模糊矩阵 $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij}, \bar{a}_{ij}\right); \omega_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{m\times n}$、$\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij}, b'_{ij}, b''_{ij}, \bar{b}_{ij}\right); \omega_{\tilde{b}_{ij}}, u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{m\times n}$，及双边匹配矩阵 $\Theta=\left[\rho_{ij}\right]_{m\times n}$，构建多目标双边匹配模型(M-1)；

操作2： 根据式(4)和(8)及线性加权法，对多目标双边匹配模型(M-1)转化，得到双目标模型(M-2)；

操作3： 再次利用式(4)和(8)及线性加权法，将模型(M-2)转化为单目标模型(M-3)；

操作4： 将模型(M-3)进一步转化为单目标模型(M-4)；

操作5： 根据式(10)，将模型(M-4)转化为模型(M-5)；

操作6： 利用软件对模型(M-5)进行求解，得到“最优”双边匹配决策。

5. 实例分析

根据深圳某咨询投资公司公开的相关信息，收到4家小微企业($\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4$)资金需求申请，收到6家普惠金融公司($\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6$)的出借贷款需求，以更好的实现普惠金融的服务。双方通过进行满意度评价，来最大程度地实现双方实际需求的成功匹配。小微企业(τ 方)通过评价其信用、当前盈利临界点、可贷资金量以及贷款利率等因素，根据评价结果得到了如表1所示的 τ 方到 ε 方的梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij}, \bar{a}_{ij}\right); \omega_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times 6}$；而另一方普惠金融公司($\varepsilon$ 方)的综合评价针对的是其信誉级别、管理能力、履约能力和市场前景等因素，同样根据结果给出了如表2所示的 ε 方到 τ 方的梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij}, b'_{ij}, b''_{ij}, \bar{b}_{ij}\right); \omega_{\tilde{b}_{ij}}, u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times 6}$；其中，满意度从低到高用1-10分来表示。最终的决策过程由该咨询投资公司操作，以促成双方的“最佳”匹配。

Table 1. Trapezoidal intuitionistic fuzzy number matrix $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij}, \bar{a}_{ij}\right); \omega_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times 6}$

表 1. 梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij}, a'_{ij}, a''_{ij}, \bar{a}_{ij}\right); \omega_{\tilde{a}_{ij}}, u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times 6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	$\langle(2,3,5,7);0.5,0.3\rangle$	$\langle(4,6,6,9);0.6,0.3\rangle$	$\langle(4,5,5,7);0.5,0.4\rangle$	$\langle(2,3,4,6);0.4,0.2\rangle$	$\langle(3,4,5,8);0.7,0.1\rangle$	$\langle(3,4,7,8);0.6,0.2\rangle$
τ_2	$\langle(3,4,5,8);0.5,0.2\rangle$	$\langle(3,6,8,9);0.5,0.4\rangle$	$\langle(3,4,6,9);0.7,0.2\rangle$	$\langle(7,8,9,9);0.8,0.1\rangle$	$\langle(2,3,4,5);0.4,0.1\rangle$	$\langle(3,5,6,8);0.6,0.3\rangle$
τ_3	$\langle(3,4,6,8);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,6,7,9);0.7,0.2\rangle$	$\langle(4,5,6,8);0.8,0.1\rangle$	$\langle(2,4,5,7);0.5,0.2\rangle$	$\langle(3,5,6,9);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,4,7,8);0.7,0.2\rangle$
τ_4	$\langle(2,5,6,7);0.5,0.4\rangle$	$\langle(3,4,6,8);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,4,4,6);0.4,0.3\rangle$	$\langle(3,4,5,6);0.4,0.2\rangle$	$\langle(2,4,5,8);0.5,0.2\rangle$	$\langle(4,7,8,9);0.8,0.1\rangle$

Table 2. Trapezoidal intuitionistic fuzzy number matrix $\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times6}$

表 2. 梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	$\langle(4,5,6,8);0.6,0.2\rangle$	$\langle(3,4,5,7);0.5,0.1\rangle$	$\langle(4,5,8,9);0.7,0.1\rangle$	$\langle(5,7,8,9);0.8,0.1\rangle$	$\langle(3,5,7,9);0.5,0.3\rangle$	$\langle(4,7,8,9);0.7,0.2\rangle$
τ_2	$\langle(2,3,4,5);0.4,0.1\rangle$	$\langle(3,4,6,7);0.5,0.3\rangle$	$\langle(3,5,6,8);0.6,0.3\rangle$	$\langle(4,5,6,7);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,5,7,8);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,4,8,9);0.5,0.4\rangle$
τ_3	$\langle(3,4,5,6);0.5,0.3\rangle$	$\langle(5,6,7,8);0.7,0.2\rangle$	$\langle(5,6,8,9);0.8,0.1\rangle$	$\langle(3,5,6,8);0.6,0.2\rangle$	$\langle(3,4,6,9);0.5,0.2\rangle$	$\langle(1,3,5,7);0.5,0.4\rangle$
τ_4	$\langle(4,6,8,9);0.8,0.1\rangle$	$\langle(2,3,5,6);0.4,0.1\rangle$	$\langle(3,5,7,9);0.6,0.2\rangle$	$\langle(2,3,4,5);0.4,0.3\rangle$	$\langle(2,3,4,6);0.4,0.1\rangle$	$\langle(5,6,7,8);0.6,0.3\rangle$

下面具体展示用本匹配决策来解决该问题。

操作1：根据梯形直觉模糊数矩阵 $\tilde{A}=\left[\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times6}$、$\tilde{B}=\left[\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{b}_{ij}},u_{\tilde{b}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times6}$ 以及双边匹配矩阵 $\Theta=\left[\rho_{ij}\right]_{4\times6}$，构建多目标双边匹配模型(M-1)：

$$
\text{(M-1)}\begin{cases}\max\quad D_{\tau_i}=\sum_{j=1}^{6}\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij},i\in M\\ \max\quad D_{\varepsilon_j}=\sum_{i=1}^{4}\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{a}_{ij}},u_{\tilde{a}_{ij}}\right\rangle\rho_{ij},j\in N\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{6}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{4}\rho_{ij}\le1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

其中 $M=\{1,2,3,4\}$， $N=\{1,2,\cdots,6\}$ 。

操作 2 和 3: 根据公式(4)和(8)以及线性加权法，对模型(M-1)进行转换得到单目标双边匹配模型(M-3)：

$$
\text{(M-3)}\begin{cases}\max\quad D=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}\tilde{c}_{ij}\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{6}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{4}\rho_{ij}\le1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

模型中的梯形直觉模糊数系数矩阵

$\tilde{C}=\left[\tilde{c}_{ij}\right]_{4\times6}=\left[w_\tau\left\langle\left(\underline{a}_{ij},a'_{ij},a''_{ij},\bar{a}_{ij}\right);\omega_{\tilde{c}_{ij}},u_{\tilde{c}_{ij}}\right\rangle+w_\varepsilon\left\langle\left(\underline{b}_{ij},b'_{ij},b''_{ij},\bar{b}_{ij}\right);\omega_{\tilde{c}_{ij}},u_{\tilde{c}_{ij}}\right\rangle\right]_{4\times6}$，$w_\tau=0.6,w_\varepsilon=0.4$，如表 3 所示。

Table 3. Trapezoidal intuitionistic fuzzy number coefficient matrix $\tilde{C}=\left[\tilde{c}_{ij}\right]_{4\times6}$

表 3. 梯形直觉模糊数系数矩阵 $\tilde{C}=\left[\tilde{c}_{ij}\right]_{4\times6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	<(2.8,3.8,5.4,7.4); 0.5,0.3>	<(3.6,5.2,5.6,8.2); 0.5,0.3>	<(4,5,6.4,7.8); 0.5,0.4>	<(3.2,4,5.6,7.2); 0.4,0.2>	<(3,4.4,5.8,8.4; 0.5,0.3>	<(3.4,5.2,7.4,8.4); 0.6,0.2>
τ_2	<(2.6,3.6,4.6,6.8); 0.4,0.2>	<(3,5.2,7.2,8.2); 0.5,0.4>	<(3,4.4,6,8.6); 0.6,0.3>	<(5.8,6.8,7.8,8.2); 0.6,0.3>	<(2.4,3.8,5.2,6.2); 0.4,0.3>	<(3,4.6,6.8,8.4); 0.5,0.4>
τ_3	<(3,4,5.6,7.2); 0.5,0.3>	<(3.2,6,7,8.6); 0.7,0.2>	<(4.4,5.4,6.8,8.4); 0.8,0.1>	<(2.4,4.4,5.4,9); 0.5,0.2>	<(3,4.6,6,9); 0.5,0.3>	<(2.2,3.6,6.2,7.6); 0.5,0.4>
τ_4	<(2.8,5.4,6.8,7.8); 0.5,0.4>	<(2.6,3.6,5.6,7.2); 0.4,0.3>	<(3,4.4,5.2,7.2); 0.4,0.3>	<(2.6,3.6,4.6,5.6); 0.4,0.2>	<(2,3.6,4.6,7.2); 0.4,0.2>	<(4.4,6.6,7.6,8.6); 0.6,0.3>

操作 4：对模型(M-3)进行转化，得到单目标双边匹配模型(M-4)：

$$
(\text{M-4})\begin{cases}\max\quad D=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\overline{c}_{ij}\right)\left(\omega_{\tilde{c}_{ij}}-u_{\tilde{c}_{ij}}\right)\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{4}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{j=1}^{6}\rho_{ij}\le 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

模型中的梯形模糊数系数矩阵 $\hat{D}=\left[\hat{d}_{ij}\right]_{4\times 6}=\left[\left(\underline{d}_{ij},d'_{ij},d''_{ij},\overline{d}_{ij}\right)\right]_{4\times 6}=\left[\left(\underline{c}_{ij},c'_{ij},c''_{ij},\overline{c}_{ij}\right)\left(\omega_{\tilde{c}_{ij}}-u_{\tilde{c}_{ij}}\right)\right]_{4\times 6}$，如表 4 所示。

Table 4. Trapezoidal fuzzy number coefficient matrix $\hat{D}=\left[\hat{d}_{ij}\right]_{4\times 6}$

表 4. 梯形模糊数系数矩阵 $\hat{D}=\left[\hat{d}_{ij}\right]_{4\times 6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	(0.56, 0.76, 1.08, 1.48)	(0.72, 1.04, 1.12, 1.64)	(0.4, 0.5, 0.64, 0.78)	(0.64, 0.8, 1.12, 1.44)	(0.6, 0.88, 1.16, 1.68)	(1.36, 0.88, 2.96, 3.36)
τ_2	(0.52, 0.72, 0.92, 1.36)	(0.3, 0.52, 0.72, 0.82)	(0.9, 1.32, 1.8, 2.58)	(1.74, 2.04, 2.34, 2.46)	(0.24, 0.38, 0.52, 0.62)	(0.3, 0.46, 0.68, 0.84)
τ_3	(0.6, 0.8, 1.12, 1.44)	(1.6, 3, 3.5, 4.3)	(3.08, 3.78, 4.76, 5.88)	(0.72, 1.32, 1.62, 2.7)	(0.6, 0.92, 1.2, 1.8)	(0.22, 0.36, 0.62, 0.76)
τ_4	(0.28, 0.54, 0.68, 0.78)	(0.26, 0.36, 0.56, 0.72)	(0.3, 0.44, 0.52, 0.72)	(0.52, 0.72, 0.92, 1.12)	(0.4, 0.72, 0.92, 1.44)	(1.32, 1.98, 2.28, 2.58)

操作 5：根据公式(10)，将模型(M-4)进一步转换为单目标模型(M-5)；

$$
(\text{M-5})\begin{cases}\max\quad D=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}f_{ij}\rho_{ij}\\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}=1,i\in M;\sum_{i=1}^{4}\rho_{ij}\le 1,j\in N;\rho_{ij}\in\{0,1\},i\in M,j\in N\end{cases}
$$

这里系数矩阵 $F=\left[f_{ij}\right]_{4\times 6}=\left[\dfrac{\underline{d}_{ij}+4d'_{ij}+4d''_{ij}+\overline{d}_{ij}}{10}\right]_{4\times 6}$，如表 5 所示。

Table 5. Coefficient matrix $F=\left[f_{ij}\right]_{4\times 6}$

表 5. 系数矩阵 $F=\left[f_{ij}\right]_{4\times 6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	0.94	1.1	0.574	0.976	1.044	2.008
τ_2	0.844	0.608	1.596	2.172	0.446	0.57
τ_3	0.972	3.19	4.312	1.518	1.088	0.49
τ_4	0.594	0.466	0.486	0.82	0.84	2.094

操作 6：通过双边匹配模型(M-5)的求解，得到最优双边匹配矩阵 $\Theta^*=\left[\rho^*_{ij}\right]_{4\times 6}$，结果如表 6 所示。

因此，“最优”双边匹配为 $\ell^*=\ell^*_{Two}\cup\ell^*_{One}$，其中 $\ell^*_{Two}=\{(\tau_1,\varepsilon_2),(\tau_2,\varepsilon_4),(\tau_3,\varepsilon_3),(\tau_4,\varepsilon_6)\}$，$\ell^*_{One}=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_1),(\varepsilon_5,\varepsilon_5)\}$；即小微企业 τ_1 与普惠金融公司 ε_2 匹配，小微企业 τ_2 与普惠金融公司 ε_4 匹配，小微企业 τ_3 与普惠金融公司 ε_3 匹配，小微企业 τ_4 与普惠金融公司匹配 ε_6，普惠金融公司 ε_1 和 ε_5 未匹配。

Table 6. Optimal bilateral matching matrix $\Theta^* = \left[\rho_{ij}^*\right]_{4\times6}$

表 6. 最优双边匹配矩阵 $\Theta^* = \left[\rho_{ij}^*\right]_{4\times6}$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
τ_1	0	1	0	0	0	0
τ_2	0	0	0	1	0	0
τ_3	0	0	1	0	0	0
τ_4	0	0	0	0	0	1

6. 结论

本文研究了梯形直觉模糊偏好下的双边匹配问题，并阐述了对应的决策方式。即将实现主体双方的梯形直觉模糊满意度最大化作为目标，以一对一双边匹配作为约束，建立了多目标双边匹配模型；以梯形直觉模糊数的基本运算法则作为理论基础并利用梯形模糊数去模糊化手段，利用线性加权法对模型进行转化，得到单目标双边匹配模型；最终通过模型求解得到该问题的“最佳”双边匹配方案。本文研究得到的主要结论如下：1) 将双方主体的偏好信息以梯形直觉模糊数的形式表示，能够更准确地反映复杂环境下双方主体的匹配需求意愿。2) 将梯形直觉模糊集理论与双边匹配问题结合，本文的研究成果对其作了进一步的发展并取得了一点改进。3) 本文只针对梯形直觉模糊数形式偏好的情形作了初步讨论，对于双边匹配问题中的其他类型梯形直觉模糊偏好信息情况仍然需要进一步地深入思考和研究。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(71261007)。

参考文献

[1] 赵晓冬, 吕爱国, 訾琪. 基于组合分析的多边匹配决策分析方法[J]. 管理世界, 2017(5): 174-175.

[2] Wu, J., Chiclana, F., Fujita, H. and Herrera-Viedma, E. (2017) A Visual Interaction Consensus Model for Social Network Group Decision Making with Trust Propagation. *Knowledge-Based Systems*, **122**, 39-50. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.01.031

[3] 万树平, 李登峰. 具有不同类型信息的风险投资商与投资企业多指标双边匹配决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(2): 40-47.

[4] 汪兰林, 李登峰. 具有异质信息的风险投资商与投资企业双边匹配方法研究[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(7): 43-55.

[5] Xu, X.K., Wang, C., Zeng, Y., *et al*. (2015) Matching Service Providers and Customers in Two-Sided Dynamic Markets *IFAC-PapersOnLine*, **48**, 2208-2213. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.06.416

[6] Laurens, C., Thomas, D., Bram, D.R., *et al*. (2017) Household Consumption When the Marriage Is Stable. *American Economic Review*, **107**, 1507-1534. https://doi.org/10.1257/aer.20151413

[7] 单晓红, 王非, 何喜军, 蒋国瑞. 基于稳定双边匹配的供应链产销合作研究[J]. 计算机工程与运用, 2016, 52(23): 260-265.

[8] Gale, D. and Shapley, L.S. (1962) College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly*, **69**, 9-15. https://doi.org/10.1080/00029890.1962.11989827

[9] Roth, A.E. (1986) On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets. *Econometrica*, **54**, 425-427. https://doi.org/10.2307/1913160

[10] Van Raalte, C. and Webers, H. (1998) Spatial Competition with Intermediated Matching. *Journal of Economic Behavior & Organization*, **34**, 477-488. https://doi.org/10.1016/S0167-2681(97)00080-2

[11] Yashiv, E. (2007) Labor Search and Matching in Macroeconomics. *European Economic Review*, **51**, 1859-1895. https://doi.org/10.1016/j.euroecorev.2007.06.024

[12] Roth, A.E. (2012) Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis. *Games & Economic Behavior*, **4**, 510-514.

[13] 李铭洋, 樊治平. 考虑双方主体心理行为的稳定双边匹配方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2591-2599.

[14] 梁海明, 姜艳萍, 孔德财. 考虑偏好序的多满意稳定导向双边匹配决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(6): 1535-1546.

[15] 乐琦. 基于序关系信息的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2015, 30(5): 601-606.

[16] Chen, P., Egesdal, M., Pycia, M., *et al*. (2016) Median Stable Matchings in Two-Sided Markets. *Games and Economic Behavior*, **97**, 64-69. https://doi.org/10.1016/j.geb.2016.03.004

[17] 乐琦, 樊治平. 基于不完全序值信息的双边匹配决策方法[J]. 管理科学学报, 2015, 18(2): 23-35.

[18] Lee, R.S. and Schwarz, M. (2017) Interviewing in Two-Sided Matching Markets. *RAND Journal of Economics*, **48**, 835-855. https://doi.org/10.1111/1756-2171.12193

[19] Lakshmana, G.N.V., Jeevaraj, S. and Dhanasekaran, P. (2016) A Linear Ordering on the Class of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. *Expert Systems with Applications*, **60**, 269-279. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.05.003

[20] Li, X.H. and Chen, X.H. (2018) Value Determination Method Based on Multiple Reference Points under a Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Environment. *Applied Soft Computing*, **63**, 39-49. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.11.003

[21] Kahraman, C., Cebi, S., Onar, S.C. and Oztaysi, B. (2018) A Novel Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Information Axiom Approach: An Application to Multicriteria Landfill Site Selection. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **67**, 157-172. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.09.009

[22] Liu, J.C. and Zhao, W.J. (2016) Cost-Sharing of Ecological Construction Based on Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Cooperative Games. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, **13**, 1-12. https://doi.org/10.3390/ijerph13111102

[23] Govindan, K., Jepsen, M.B. and Brandt, M. (2016) Supplier Risk Assessment Based on Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and ELECTRE TRI-C: A Case Illustration Involving Service Suppliers. *Journal of the Operational Research Society*, **67**, 339-376. https://doi.org/10.1057/jors.2015.51

[24] Wan, S.P. and Dong, J.Y. (2015) Power Geometric Operators of Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers and Application to Multi-Attribute Group Decision Making. *Applied Soft Computing*, **21**, 28-47.

[25] Cheng, C.H. (1998) A New Approach for Ranking Fuzzy Numbers by Distance Method. *Fuzzy Sets and Systems*, **95**, 307-317. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00272-2

[26] Chen, S.H., Wang, S.T. and Chang, S.M. (2006) Some Properties of Graded Mean Integration Representation of L-R Type Fuzzy Numbers. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, **22**, 185-208.

[27] Gale, D. (2001) The Two-Side Matching Problem: Origin, Development and Current Issues. *International Game Theory Review*, **3**, 237-252. https://doi.org/10.1142/S0219198901000373

[28] Yue, Q. (2022) Bilateral Matching Decision-Making for Knowledge Innovation Management Considering Matching Willingness in an Interval Intuitionistic Fuzzy Set Environment. *Journal of Innovation & Knowledge*, **7**, Article ID: 100209. https://doi.org/10.1016/j.jik.2022.100209

[29] 乐琦. 直觉模糊环境下考虑匹配意愿的双边匹配决策[J]. 中国管理科学, 2017, 25(6): 161-168.