

锯齿形光晶格合成理论与加磁场时冷原子能带结构

周泽豪, 胡文辉, 戚 桢

天津工业大学物理科学与技术学院, 天津

收稿日期: 2023年2月7日; 录用日期: 2023年3月8日; 发布日期: 2023年3月16日

摘 要

本文提出了一种合成锯齿形光晶格的理论, 并且采用理论计算的方法探讨了冷原子在外加磁场的锯齿光晶格中的能带结构。通过对比无磁场情况, 发现磁场会在其色散关系图中产生一个空洞。并且沿锯齿势方向出现与广义Kronig-Penney模型中发现的谱带相似的能带结构。

关键词

冷原子, 光晶格, 锯齿势

Theory of Sawtooth Optical Lattice Synthesis and the Energy Band Structure of Cold Atomic Is Added with Magnetic Field

Zehao Zhou, Wenghui Hu, Zhen Qi

School of Physical Science and Technology, Tiangong University, Tianjin

Received: Feb. 7th, 2023; accepted: Mar. 8th, 2023; published: Mar. 16th, 2023

Abstract

In this paper, a theory of synthetic sawtooth optical lattice is presented and the band structure of cold atoms in sawtooth optical lattice with applied magnetic field is discussed by theoretical calculation. By comparing the absence of magnetic field, it is found that the magnetic field will produce a hole in the dispersion diagram. Band structures similar to those found in the generalized Kronig-Penney model appear along the direction of sawtooth potential.

Keywords

Cold Atom, Optical Lattice, Sawtooth Potential

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

冷原子与光晶格实验平台凭借其系统参数良好的可调性和可控性使得其在凝聚态物理、高能物理、天体物理学等领域有着广泛的应用[1] [2] [3]。其不但可以对参数不好加以控制的材料(诸如固体物理中材料特性的研究等)进行模拟[4] [5]；冷原子光晶格操作平台也可以模拟一些有意思的特殊晶格构造，本文研究的锯齿势就是其中一种，这种特殊的构造在量子棘轮[6] [7] [8]、量子电路[9]等都有良好的应用。

在本文中创新地提出了锯齿形光晶格的一般合成理论，并采用理论计算的方法探讨了冷原子在外加磁场的锯齿光晶格中的能带结构。

2. 锯齿光晶格合成理论

冷原子在由两束同频率对射激光生成的驻波场中会受到偶极力的作用。

$$E_{e(x,t)} = 2E_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (1)$$

如式(1)所示，光场的电矢量受到 $\cos(kx)$ 周期调制在 x 轴方向分布不均匀。按照正负失谐的不同，偶极力分别将原子推向波节或者波腹。二阶微扰理论中，能量的二级修正依赖于光强，能级位移受到周期性的调制。由 $F_2 = -\nabla U(R)$ 可知，原子受到的力也是周期性的，并且周期是光的半波长。这种由光位移不同而引起的周期性势能就是传统的光晶格。当原子经过冷却后速度降低，再放入该由强光组成的光晶格，阱势深度为

$$V = V_0 \cos(2kx) \quad (2)$$

其中

$$V_0 = \frac{\hbar |\delta| \Omega^2 / 2}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4 + \Omega^2 / 2} \quad (3)$$

当 $\Omega \gg \Gamma$ 时，光晶格势阱的深度渐近趋向于

$$V_0 = \hbar |\delta| \quad (4)$$

当 $|\delta| \gg \Omega, \Gamma$ 时，可得

$$V_0 \approx \hbar \Omega^2 / 2 |\delta| \quad (5)$$

这就是传统光晶格的阱势深度，对于给定的原子状态，俘陷势的调制都是依靠三角函数，其周期势场的周期都是光波长的一半 $\lambda/2$ 。而对于锯齿形阱势，将锯齿阱势进行傅里叶展开，如果单纯依靠对传统光晶格按傅里叶展开后的级数进行权重配比叠加是很难得到一个锯齿形状的周期势场的，因为锯齿波的傅里叶展开级数为

$$f(x) \sim \frac{A_{\max}}{2} - \frac{A_{\max}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nkx)}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

其需要 n 阶谐波共同参与 ($n=1, 2, 3, \dots$)，按照之前传统的方法就需要利用大量激光频率的谐波，并且由式子(6)可知，不同频率之间相差 n_i/n_j 倍，同时运用频率相差如此大的激光进行合成，这显然是难以控制且不切实际的。杂乱的频率会与非工作能级近失谐，其会产生一个散射力使得冷原子被加热，这明显是不可取的。如果换一种方法，将相同波长的光束分别按不同角度组合来合成周期势，也很难实现周期性锯齿势，因为需要对更多的光束进行十分精确的校准并保持它们相互之间相位稳定。所以需要一种具有一般操作可行性的方法来进行锯齿形光晶格的合成。

在研究早期，我们尝试过使用单频率的驻波激光依靠光位移生成锯齿势，其实施较为简单。将已经制备好的工作能级的能级差为 ω_a 的冷原子放入单频率驻波激光场中(由两束同频率激光对射组成)，激光频率 ω 与 ω_a 负失谐 $\omega < \omega_a$ 。此时冷原子的能级对比放置入光场前多了一个微扰项，其导致了能级的光位移。

如图 1 所示，假设冷原子处于基态 E_1 且右运动。从波腹到波节运动时，冷原子会经历一个势能不断抬升的过程，在该过程中动能不断转化为势能；当冷原子运动到波节，此时能级差最小，再加上多普勒补偿，原子可以吸收一个反方向的光子 $\hbar\omega$ 从基态 E_1 跃迁到激发态 E_2 ，同时损失一个光子的动量；冷原子继续从波节向波腹运动，此时对于处于激发态 E_2 的冷原子仍然是一个势能不断上升的过程；而当冷原子到达波腹，其会在自发辐射的作用下重新回到基态 E_1 。

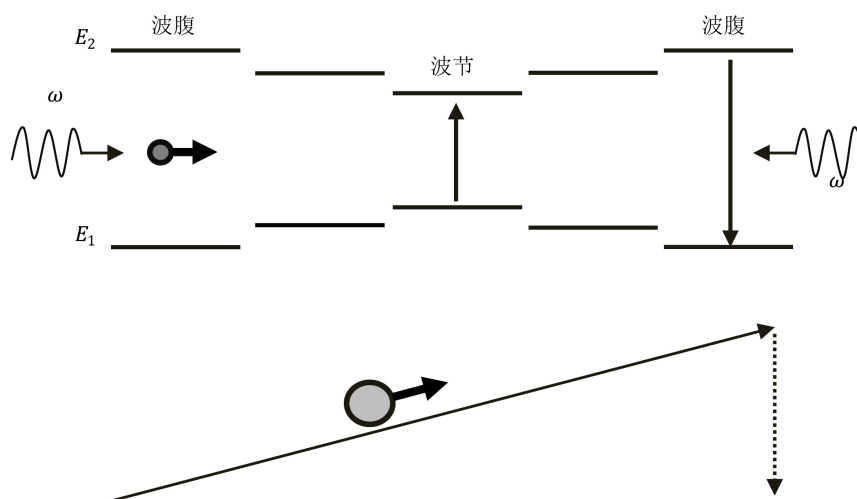


Figure 1. Schematic diagram of Rough sawtooth optical lattice

图 1. 粗糙锯齿光晶格原理图

在这整个过程中动能都在转化为势能，原子相当于在锯齿的斜面上不断爬坡，但缺少了图中垂直向下获得动能补偿的部分。如果能将位于波腹由激发态 E_2 向基态 E_1 的自发辐射调控为受激辐射，此时就能不断对冷原子进行动能补偿得到一个粗糙的锯齿势结构。

之所以粗糙是因为在波节处跃迁并不稳定，一旦冷原子在波节没有发生跃迁就要等到在下一个波节处发生跃迁，这就导致了锯齿的周期不固定。一个周期不稳定的势缺乏实用性，加之将波腹处自发辐射调控为受激辐射不可避免的会引入新的激光频率，因而该锯齿势生成方案过于粗糙。为了能够得到一个完美的锯齿光晶格，势必要在传统的光晶格势上转变思路寻求突破口。

如果只依靠传统方法很难得到一个完美的锯齿光晶格, 概括来看之前的传统光晶格利用的是光位移, 其所产生光晶格的俘陷势为

$$V = -(\alpha/2) |E_{(r)}|^2 \quad (7)$$

α 是极化率, 带入式(1)的驻波场的明显有

$$V \propto I_0 \cos^2(kx) = I_0 (1 + \cos 2kx)/2 \quad (8)$$

$$\cos 2kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda/2} x \quad (9)$$

如上式所示传统光晶格势的周期 $\lambda/2$, 在上一节中假设使用傅里叶合成的办法生成锯齿光晶格必须要用到多种周期长度的光晶格进行叠加。由式(9)可知, 晶格周期受到 λ 的调制, 多周期就意味着参与合成的激光波长也要多。得到的锯齿势最终是由多个波长相差整数倍的 λ/N 传统晶格叠加, 叠加后杂乱的频率是该方案的重大缺陷, 但也是解决问题的突破口。

仍然以晶格周期为 $\lambda/2$ 的传统光晶格做傅里叶级数的基波, 其由两束频率为 $\nu = V/\lambda$ 的对射激光组成。如果二次谐波、三次谐波等高次谐波都能够用频率为 ν 或与 ν 相近频率的激光合成那么频率杂乱的问题就迎刃而解。

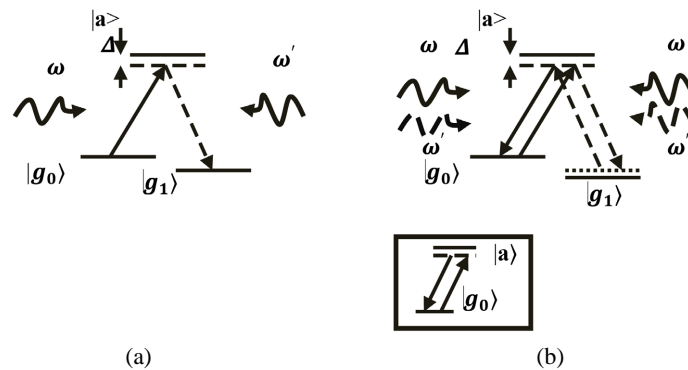


Figure 2. (a) Second order process; (b) Fourth order process
图 2. (a) 二阶过程; (b) 四阶过程

首先考察如何依然以生成基波的激光频率来产生二次谐波的光晶格, 有一种可以获得二倍波矢的方法 $k' = 2k$, 即使用一个电子的激发态当中间能级, 再利用两个稳定的基态能级之间多普勒敏感的受激拉曼跃迁。

如图 2(a)所示, 该受激拉曼跃迁过程由两束频率相差不大分别为 ω 与 ω' 的对射光束驱动, $\omega \approx \omega' = c \cdot k$ 。当失谐 Δ 较大时, 基态两个能级处于一个叠加的暗态, 此时尽管有对射光束的驱动, 两个基态能级也不会发生向激发态的跃迁, 但会得到一个 $|g_0\rangle$ 到 $|g_1\rangle$ 的拉曼受激跃迁, 其等效频率 $\omega_{\text{eff}} = \omega - \omega'$, 等效波矢为 $k_{\text{eff}} = k - k' \approx 2 \cdot k$ 。显然二倍波矢 $2 \cdot k$ 的色散关系可以有助于构造一个与传统光学晶格不同周期的势。

但想要构成光晶格势, 只有一束等效波矢为 $2 \cdot k$ 的光是不够的, 在图 2(a)的基础上再加上一束对射光形成图 2(b)的四阶构造。由二阶微扰论可知能级位移

$$V \propto \cos^2(k_{\text{eff}} \cdot z) = (1 + \cos 4kz)/2 \quad (10)$$

此时就获得了一个空间周期为 $\lambda/4$ 的光晶格，其周期长度只有传统光晶格周期长度 $\lambda/2$ 的一半。但由于驻波效应 $|g_0\rangle$ 和激发态 $|a\rangle$ 之间的交流斯塔克位移将占主导，式(10)的高阶周期性的作用就会被二阶过程的传统晶格势掩盖，这就是图 2(b)所示方案的缺陷。

为了消除驻波效应，使用双光子拉曼方案加以改进，依靠三个激光频率实现四阶过程。如图 3(a)所示，有一个三能级原子，对其左边施加频率分别为 $\omega + \Delta\omega$ 与 $\omega - \Delta\omega$ 的两束光。由于左右光束频率不完全一致，不存在驻波效应。基态 $|g_0\rangle$ 原子经历了四阶能量转移，获得了一个 $\lambda/4$ 的空间周期势。直观来看，考虑该原子在这闭环过程中的动量改变可以看出，在初始状为 $|g_0\rangle$ 的原子经历了虚过程，其吸收了一个频率为 $\omega + \Delta\omega$ 的光子并发射了一个频率为 ω 的光子。由此原子获得了两个光子的反冲动量，处于一个能量接近 $|g_1\rangle$ 的虚态。然后又继续吸收一个频率为 $\omega - \Delta\omega$ 的光子，并发射一个频率为 ω 的光子，最终达到了稳定的基态。经历该四光子共振过程后，原子内部状态不变，但获得了 $4\hbar k$ 的动量(如果是相反的过程则获得了 $-2\hbar k$ 的动量)。在驻波之中，动量的转移只有 $2\hbar k$ 和 $-2\hbar k$ 的虚过程，晶格势和空间域呈现 $V \propto (1 + \cos 2kz)$ 的依赖性，而通过上述四阶过程获得了一个 $V \propto (1 + \cos 4kz)$ 的双重空间周期性。

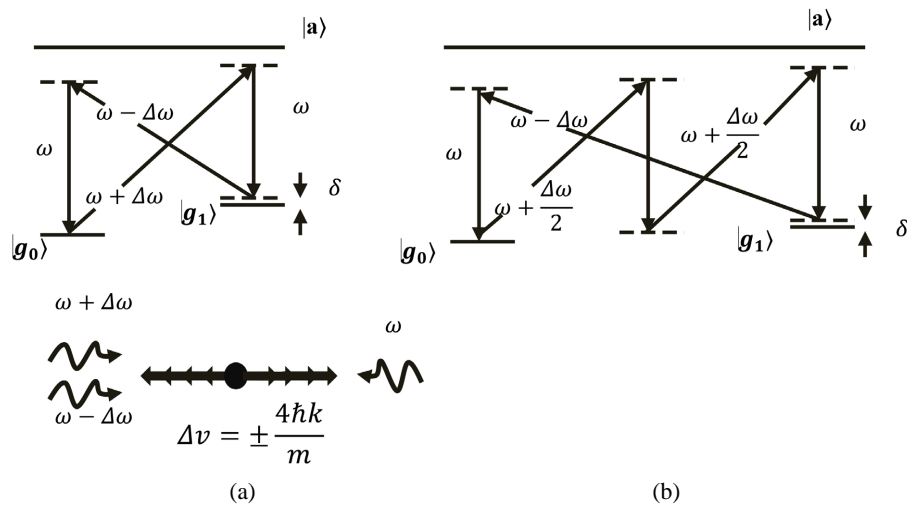


Figure 3. (a) Fourth order resonant optical lattice; (b) Sixth order resonant optical lattice
图 3. (a) 四阶共振光晶格; (b) 六阶共振光晶格

构造多光子共振的过程是通过选择恰当的光束频率来实现的，其中频率差 $\Delta\omega$ 接近于基态 $|g_0\rangle$ 和 $|g_1\rangle$ 之间的能级分裂，且远小于 ω 。

有了 $\lambda/4$ 的空间周期势，其周期是 $\lambda/2$ 的一半，可作为合成锯齿势的二次谐波。继续推广其它高阶多光子共振晶格，以期获得其它高次谐波。依靠之前的经验，空间周期为 $\lambda/2N$ 的晶格需要进行 $2N$ 阶的多光子跃迁。通过将图 3(b)四光子共振构造中频率为 $\omega + \Delta\omega$ 的光束替换为 $\omega + \Delta\omega/(N-1)$ ，其中 $N \geq 2$ 。通过图上过程，并且按照该期望的跃迁顺序，才能实现能量守恒。与前面一样，假设 $\delta \ll \Delta\omega/(N-1)$ ，在这种情况下，期望的跃迁顺序能够占主导。同时为了要达到合理的势深，由式(7)可知基态 $|g_0\rangle$ 与 $|g_1\rangle$ 之间的能量分裂应相对较小，即双光子拉比频率应该相当，这可以通过使用 $|g_0\rangle$ 与 $|g_1\rangle$ 两个态的超精细结构中能级分裂实现。同时光束的频率相较于基态到激发态的能级差应该大失谐，其是为了抑制自发辐射，使得只发生 $|g_0\rangle$ 与 $|g_1\rangle$ 两个态的拉曼跃迁。

采用半经典的方法定量计算多光子晶格的光位移势。设哈密顿量为

$$H = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_z |g_1\rangle\langle g_1| - er \cdot E \quad (11)$$

ω_a 与 ω_z 分别是 $|a\rangle$ 与 $|g_1\rangle$ 相较于 $|g_0\rangle$ 的能级差的频率。激光的电场为

$$E = E_{0,0} \cos(\omega t + kz) + E_{0,+} \cos[(\omega + \Delta\omega/(N-1))t - kz] + E_{0,-} \cos[(\omega - \Delta\omega)t - kz] \quad (12)$$

且继续假定 $\Delta = \omega_a - \omega \gg \Delta\omega/(N-1) \gg \delta = \Delta\omega - \omega_z$ 。为了求解含时薛定谔方程，使用了与光场相关的相互作用绘景。

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i[n\Delta\omega/(N-1)]t} (g_{n,0}|g_0\rangle + g_{n,1}|g_1\rangle + a_n e^{-i\omega t}|a\rangle) \quad (13)$$

在简化的三能系统中，所有的态都可以表示为 $|g_0\rangle$ 、 $|g_1\rangle$ 和 $|a\rangle$ 三个态的线性组合， $g_{n,0}$ 、 $g_{n,1}$ 、 a_n 分别是三个态的系数(概率幅)，其中 $g_{0,1} = g_{N-1,0} = 0$ ， g_{n,S_n} 和 a_n 都只随时间缓慢变化。由于光束频率相比拉比频率大失谐，两个基态形成一个叠加的暗态，由此可以绝热的消除激发态 $|a\rangle$ 。再运用旋波近似由式(13)可得

$$\dot{g}_{0,0} = \frac{i}{4\Delta} \left[(|\Omega_{0,0}|^2 + |\Omega_{0,+}|^2) g_{0,0} + \Omega_{0,0} \Omega_{-,1}^* e^{2ikz} g_{N-1,1} + \sum_{S'_1=0}^1 \Omega_{+,0} \Omega_{0,S'_1}^* e^{-2ikz} g_{1,S'_1} \right] \quad (14)$$

对于 $1 \leq n \leq N-2$,

$$\begin{aligned} \dot{g}_{n,S_n} = & i \left(\frac{n\Delta\omega}{N-1} - s_n \omega_z \right) g_{n,S_n} + \frac{i}{4\Delta} \left[\sum_{S'_n=0}^1 (\Omega_{0,S_n} \Omega_{0,S'_n}^* + \Omega_{+,S_n} \Omega_{+,S'_n}^*) g_{n,S'_n} \right. \\ & \left. + \sum_{S_{n-1}=0}^1 \Omega_{0,S_n} \Omega_{0,S_{n-1}}^* e^{2ikz} g_{n-1,S_{n-1}} + \sum_{S_{n+1}=0}^1 \Omega_{+,S_n} \Omega_{0,S_{n+1}}^* e^{-2ikz} g_{n+1,S_{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

最后

$$\begin{aligned} \dot{g}_{N-1,1} = & i\Delta\omega - \omega_z g_{N-1,1} + \frac{i}{4\Delta} \left[(|\Omega_{0,1}|^2 + |\Omega_{-,1}|^2) g_{N-1,1} + \sum_{S_{N-2}=0}^1 \Omega_{0,1} \Omega_{+,S_{N-2}}^* e^{2ikz} g_{N-2,S_{N-2}} \right. \\ & \left. + \Omega_{-,1} \Omega_{0,0}^* e^{-2ikz} g_{0,0} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

用上述公式，可以得到产生与位置无关的交流斯塔克位移项。例如从 $g_{0,0}$ 到最低阶，我们就能得到传统的二阶频移，

$$\Delta\omega_{AC,2} \approx -\frac{1}{4\Delta} (|\Omega_{0,0}|^2 + |\Omega_{0,+}|^2) \quad (17)$$

这种频移肯定比所有高阶效应都要大，但对于一个准直激光束，只能得到一个绝对的能量位移，这并不妨碍获得原子在更高阶带的晶格势能。为了推导出空间相关的光位移势，需要使用一种新的相互作用绘景，其所有的空间常数项都被放在哈密顿量之外。

这个新的相互作用绘景的基态系数(概率幅) \tilde{g}_{n,S_n} 的运动方程用式(14)、(15)、(16)表示的同时省略掉所有不含 $\exp(\pm 2ikz)$ 因子的项，我们现在绝热的消除所有中间基态项的系数振幅(\tilde{g}_{n,S_n} ，且 $n \geq 1$)。通过迭代，能够推导出概率振 $\tilde{g}_{0,0}$ (只保留位置相关的项目)，它可以写成带有位置依赖的斯塔克位移 $\tilde{g}_{0,0} = \Delta\omega_{AC,2N} \tilde{g}_{0,0}$

$$\Delta\omega_{AC,2N} = -\frac{1}{(4\Delta)^N} \sum_{s_1, \dots, s_{N-2}} \left[e^{i2Nkz} \Omega_{0,0} \Omega_{-,1}^* \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\Omega_{0,S_n} \Omega_{+,S_{n-1}}^*}{s_n \omega_z - \frac{n\Delta\omega}{N-1}} + \text{c.c.} \right] \quad (18)$$

其中 $s_{N-1} = 1$ 。这个表达式是绝热极限下得到的多光子晶格的光位移式的最终结果。晶格势的空间周期性为 $\lambda/2N$ ，比常规晶格势的空间周期性高 N 倍。周期势场的相位(例如，一个波腹的精确位置)能通过改变光场的相位来调整，这导致了公式(18)中相应的拉比频率的相移。由于除了 $\tilde{g}_{0,0}$ (或 $g_{0,0}$) 外所有的基态概率幅都很小(这可以允许绝热的消去他们)，对 $|g_0\rangle$ 与位置无关的斯塔克位移项则由式(17)给出。

由式(6)可知，在通过傅里叶合成周期锯齿光晶格时，必须结合无穷多高阶谐波才能得到一个完美的锯齿光晶格。与图 3(b) $N = 3$ 的单周期方案相比，频率为 $\omega + \Delta\omega/(N-1)$ 的光束被一系列频率为 ω ， $\omega + \Delta\omega$ ， $\omega + \Delta\omega/2$ ， \dots ， $\omega + \Delta\omega/(N_{\max} - 1)$ 的控制光束所替代，其中每个分量的相位和振幅都被设置为其在锯齿势展开中相应的权重。再加上额外的频率为 $\omega - \Delta\omega$ 的同向传播光束和一个频率为 ω 的反向传播光束，形成了周期势的叠加：两束频率为 ω 的光束形成了周期为 $\lambda/2$ 的传统光晶格，这与空间的基频相对应。此外，频率为 $\omega + \Delta\omega/(N-1)$ 且 $N \geq 2$ 的同向传播光束和 $\omega - \Delta\omega$ 的同向传播光束一起与频率为 ω 的反向传播光束则组成周期性更高的谐波 $\lambda/2N$ 。控制波束的相位和振幅被调控成以产生相应的谐波所需的势的总和。这样一个完美的锯齿光晶格就产生了。

以展开到四阶谐波为例，使用周期为 $\lambda/2$ 的光晶格做基波，使用光晶格空间周期分别为 $\lambda/4$ 、 $\lambda/6$ 、 $\lambda/8$ 的三组光晶格分别做二阶、三阶与四阶谐波即可叠加成一个非对称的锯齿波， $\lambda/2$ 、 $\lambda/4$ 、 $\lambda/6$ 空间周期光晶格合成原理前文已讨论。

$\lambda/8$ 光子共振方案如图 4 所示，依靠三个激光频率实现四阶过程。有一个三能级原子，对其左边施加频率分别为 $\omega + \Delta\omega/3$ 与 $\omega - \Delta\omega$ 的两束光，再加上额外的一个频率为 ω 的反向传播光束。由于左右光束频率不完全一致，不存在驻波效应。基态 $|g_0\rangle$ 原子经历了八阶能量转移，获得了一个 $\lambda/8$ 的空间周期势。

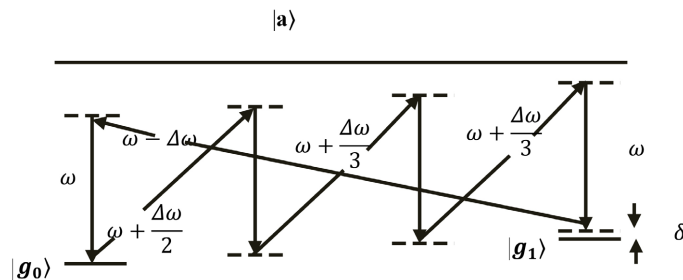


Figure 4. Eighth order resonant optical lattice
图 4. 八阶多光子共振晶格的生成方案

由此，有了 $\lambda/2$ 、 $\lambda/4$ 、 $\lambda/6$ 、 $\lambda/8$ 四个光晶格，并将上述四个光晶格叠加且按式(6)傅里叶展开进行强度分配，参照图 5 的流程即可产出图 6 形的锯齿形周期光晶格。原则上叠加足够多的空间周期为 $\lambda/2N$ 阱势，即可得到一个完美的周期锯齿波。其中 FG 变频函数发生器可以获得所需要的各个与 ω_{FG} 相近的频率；VCO 压控振荡器保持对射光束相位同步；AOM 声光调制器作为控制开关的同时还能 AOM1 和 AOM2 同时等比的放大输出光强，可以对傅里叶合成后的总光强起调控作用。

正如图 5 所示，使用该理论进行锯齿形光晶格的优点显而易见：

简洁：只需要六束频率相差极小的激光就可实现四阶锯齿光晶格的叠加。并且对于更高阶更加完美的锯齿波来说， N 阶锯齿光晶格也只需要 $2 + N$ 束激光即可。

普适：其对冷原子的种类和具体的工作能级的能级差大小也没有特殊的要求，只需要找到与之合适的拉曼跃迁的激光频率即可。

稳定：而且较之前粗糙锯齿光晶格来说其晶格长度保持恒定。

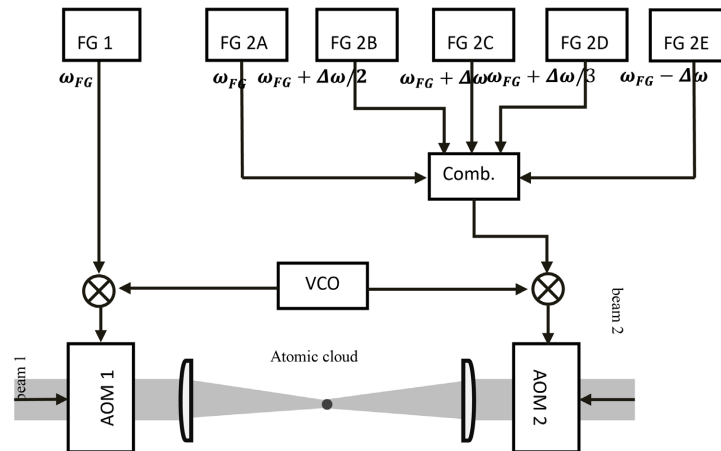


Figure 5. Flow diagram of synthetic sawtooth optical lattice

图 5. 锯齿光晶格理论合成流程图

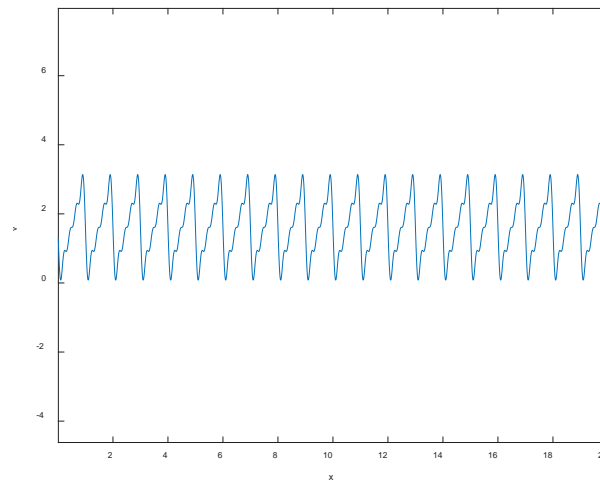


Figure 6. Optical lattice potential

图 6. 光晶格势

在实验上，可以通过观察冷原子在该光晶格势的远场衍射图样来还原光势，通过对比该理论与实际生成光势之间的数值差异来验证该方案的准确性和科学性。

3. 锯齿光晶格外加磁场时冷原子能带结构

同固体物理类似，超冷原子气依然可以用紧束缚近似看作一个冷原子。冷原子在外加磁场的锯齿形光晶格中的模型如图 7 所示

光晶格所产生的锯齿形周期势场在理想模型下(叠加足够多的空间周期为 $\lambda/2N$ 的光晶格做高次谐波)为

$$V_L(x) = \frac{V_0}{a}x \quad (19)$$

$$V_L(r+a) = V_L(r)$$

其中 V_0 是最大势阱深度， a 是光晶格的空间周期，且 $V_0 > 0$ ， $a > 0$ 为常数。再对其施加沿 z 轴方向的匀强磁场

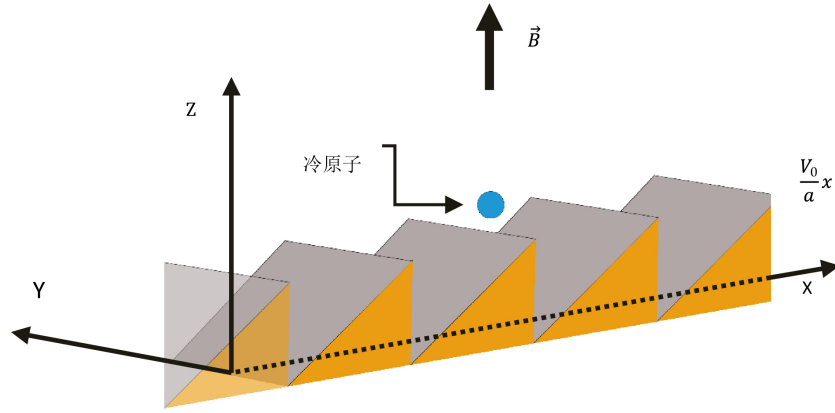


Figure 7. Sawtooth optical lattice with applied magnetic field
图 7. 外加磁场的锯齿形光晶格

$$B = \nabla \times A \quad (20)$$

$$A = (0 \quad Bx \quad 0) \quad (21)$$

其中 A 为磁矢势(此处已取朗道规范), B 为磁感应强度。用第一性原理计算, 冷原子在该光晶格下的哈密顿量为

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(P_y - eBx)^2 + \frac{V_0}{a}x \quad (22)$$

其中 P_x 为冷原子在 x 方向的动量, P_y 为冷原子在 y 方向的动量。很明显, 哈密顿量 H 中不显含 y , 由对易关系可知 P_y 与 H 对易, 可以求得与时间无关的薛定谔方程的定态通解应该有如下的形式

$$\psi(x) = e^{ik_y y} \varphi(x) \quad (23)$$

在将式(23)带入式(22)整理后, 对 $\varphi(x)$ 求解二阶偏微分方程并加以推导可得其在一个光晶格中态矢量的解析通解为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha M(x) + \beta W(x) \\ M(x) &= \frac{A(x)}{\sqrt{x - \frac{k_y}{Be\hbar} - \frac{V_0 m}{aB^2 \hbar^2 e^2}}} \\ W(x) &= \frac{B(x)}{\sqrt{x - \frac{k_y}{Be\hbar} - \frac{V_0 m}{aB^2 \hbar^2 e^2}}} \end{aligned} \quad (24)$$

$A(x)$ 与 $B(x)$ 是惠克函数中的惠泰克 M 以及惠泰克 W 函数, 因为在求通常的能带关系过程中 E 为自变量, 而 k_y 则是式(23)中的自由平面波的波矢, 其也是自变量, 所以在后续推导中为了便于标记下标, 简略了 $M(x)$ 与 $W(x)$ 函数对 k_y 以及 E 的依赖。

有了一个光晶格中的通解, 对于周期性势场自然而然的可以运用布洛赫定理推广到整个实空间, 求得其在整个光晶格中的通解。由一般的平移算符理论可知, $\psi(x)$ 沿 y 方向的平移算符 Ta_2 依旧与哈密顿量 H 对易。但是, 由于磁矢量势式(21)的存在, x 方向传统的平移算符 Ta_1 不再与哈密顿量 H 对易。因此必须使用磁平移算符

$$T_{a_1}\psi(r) = e^{i\left(\frac{e}{\hbar}\right)\Delta A \cdot r} \psi(r+a) \quad (25)$$

$$T_{a_2}T_{a_1} = T_{a_1}T_{a_2} \exp\left(i\frac{e}{\hbar}\oint A \cdot dr\right) \quad (26)$$

其中 $\oint A \cdot dr = Ba_1a_2$, 当 $Ba_1a_2 = (p/q)\phi$ 时 ($\phi = h/e$, p 与 q 互质), 有 $\exp\left(i\frac{e}{\hbar}\oint A \cdot dr\right) = \exp(i2\pi)$, 此时 T_{a_2} 、 T_{a_1} 对易。且

$$H\psi_{nk} = E_{nk}\psi_{nk} \quad (27)$$

$$T_{a_1}\psi_{nk} = e^{ik_x a_1}\psi_{nk} \quad (28)$$

$$T_{a_2}\psi_{nk} = e^{ik_y q a_2}\psi_{nk} \quad (29)$$

因为势场 V_L 没有无穷大点, ψ_k 与其导数 $d\psi_k/dx$ 必然是连续函数, 结合布洛赫周期条件得到连续方程

$$\alpha M(a_1) + \beta W(a_1) = e^{ik_x a_1} [\alpha M(0) + \beta W(0)] \quad (30)$$

$$\alpha M'(a_1) + \beta W'(a_1) = e^{ik_x a_1} [\alpha M'(0) + \beta W'(0)] \quad (31)$$

M' 是 M 对 x 的一阶导数 dM/dx , 同样的 W' 对 x 的一阶导数 dW/dx , 解使用线性代数的技巧解上述连续方程组可以得到

$$e^{ik_x a_1} = r_{\pm} = \frac{-\eta_{a_1} \pm \sqrt{\eta_{a_1}^2 - 4\zeta\mu}}{2\mu} \quad (32)$$

其中

$$\eta_a = M'(0)w(a_1) - M(0)W'(a_1) + M'(a_1)W(0) - M(a_1)W'(0)$$

$$\mu = M(0)W'(0) - M'(0)W(0)$$

$$\zeta = M(a_1)W'(a_1) - M'(a_1)W(a_1)$$

由此, 便得到了式(32)所呈现的色散关系, 容易证明 r_+ 与 r_-^* 共轭 ($r_+ = r_-^*$)。当 x 方向的晶格波矢 k_x 跨越整个布里渊区, 那么两个根是冗余的, 我们只需要考虑其中一个, 就能运用共轭关系得到另一个。

将相应的光晶格参数与匀强磁场大小带入到式(32)即可得到对应的能带结构图。本文取 x 方向光晶格周期为 $a_1 = 1$, y 方向光晶格的周期为 $a_2 = 2\pi$, 取磁场大小为 $B = 1$, 取光晶格最大势深为 $V_0 = 1$, $\hbar^2/2m = 1$ 很明显此处已满足式(26)磁平移算符的要求 ($Ba_1a_2 = \phi$), 与求解一般能带结构的运算一样, E 为自变量, 筛选合适的 k_x , 即可获得图 8 所示的能带色散关系。

如图 9 换一个角度观察图 8, 还注意到其能带结构在 k_x - k_y 平面有一个四边形空洞, 其受到 k_y 的调制, 贯穿了不同能带。如图 10 所示, 当磁场逐渐减小为零后, 能带结构中的空洞消失。证明了图 9 的空洞是由朗道能级产生的, 其反应了 k_y 对 k_x - E 色散关系的调制不仅仅只是对其能带进行二次抛物线型的抬高和降低, 还会在 k_y 的负半轴的特殊点处使其坍塌为 $k_x = \pm\pi/2$ 的竖线。

同时可以观察到图 8 在 k_x - E 截面有着特殊的色散关系, 单独选取其 E - k_x 截面, 取 $B = 1$, $V_0 = 1$ 并取 $k_y = \pi$ 时的 4 条能带, 可以得图 11, 该能带结构与广义 Kronig-Penney 模型中发现的谱带相似。已经被证明, 在广义克罗尼格-彭尼势中, 电子的贝瑞相在函数上取决于所占据的能带, 因此有理由认为图 11 由周期锯齿势外加磁场描述的系统应该存在类似的依赖关系。

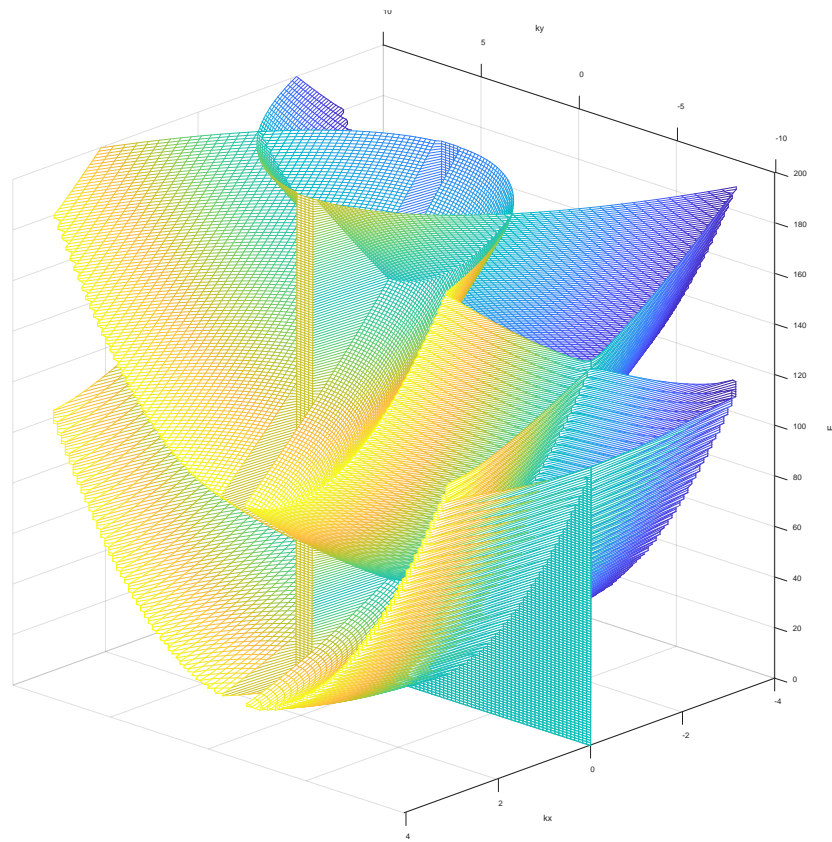


Figure 8. Energy band diagram
图 8. 能带结构图

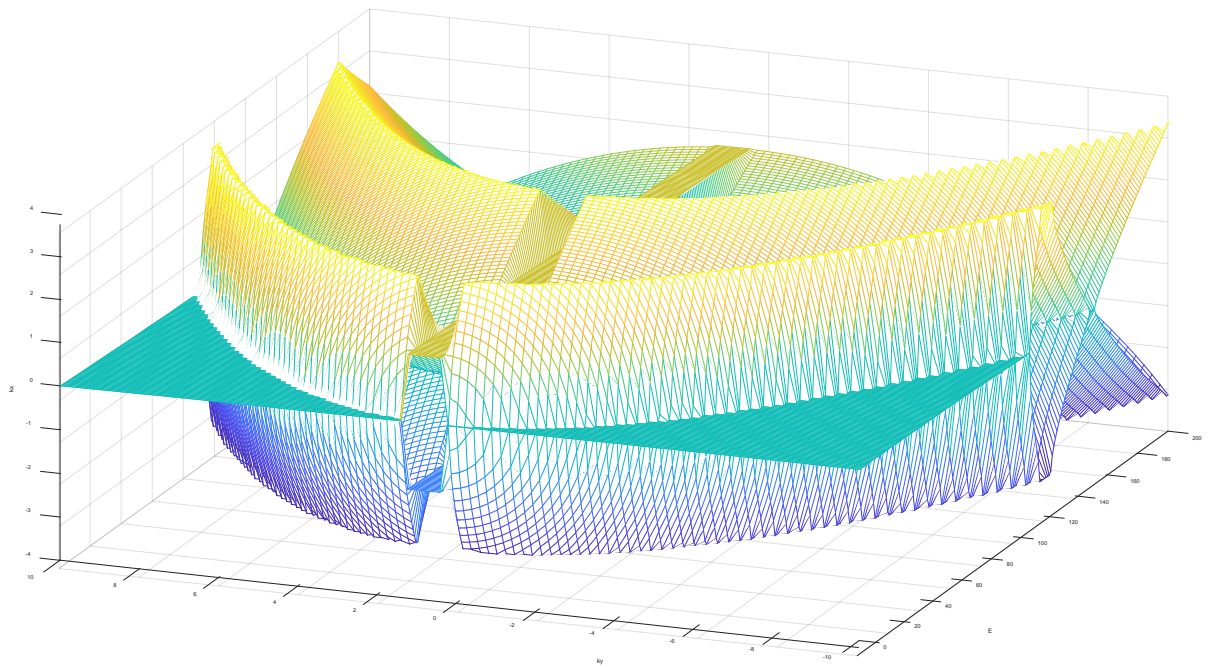


Figure 9. Energy band diagram $B = 1, V = 1$
图 9. 能带结构图 $B = 1, V = 1$

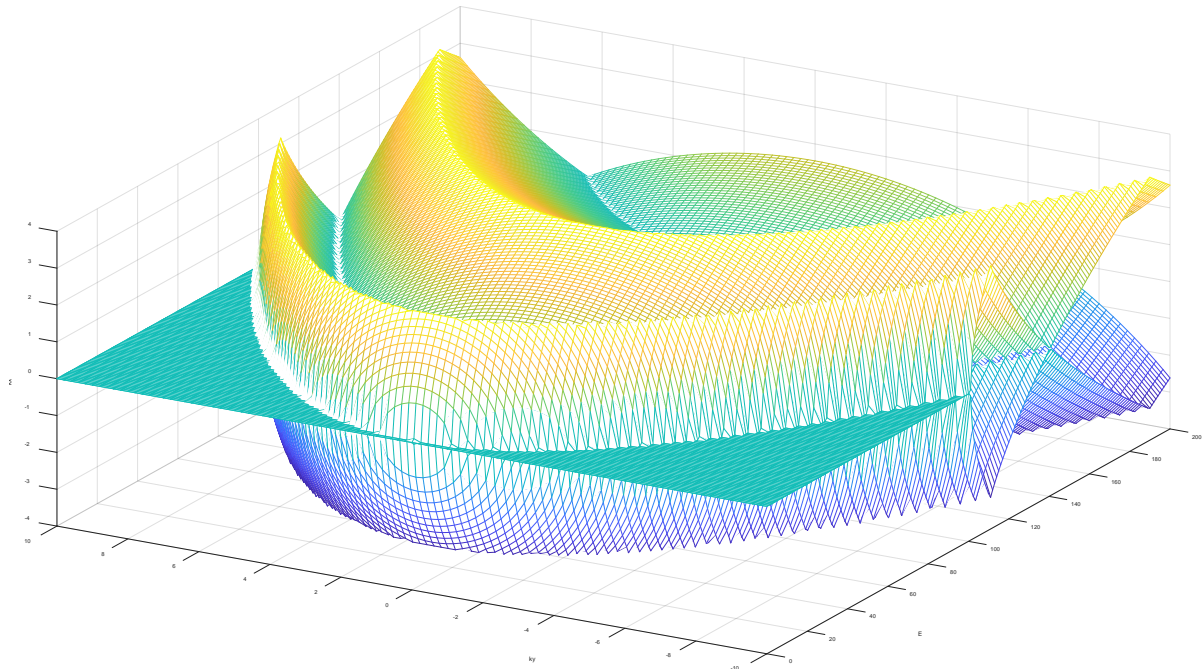


Figure 10. Diagram of band structure without magnetic field
图 10. 不含磁场的能带结构图 $B = 0$, $V = 1$

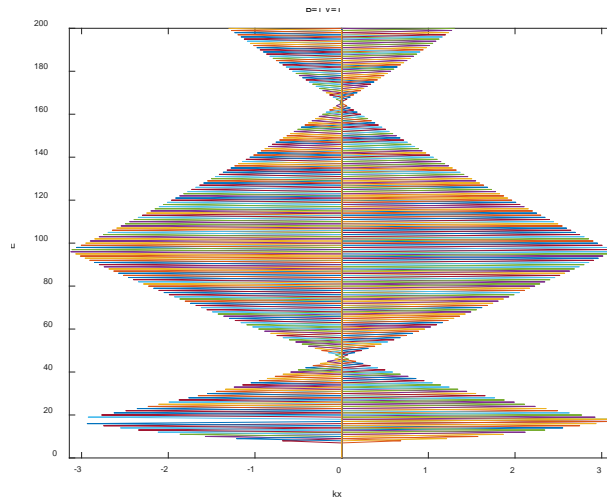


Figure 11. Band structure diagram of $E-k_x$
图 11. $E-k_x$ 截面能带结构图

观察图 11 可以看出第一条能带与第二条能带在 $k_x \pm \pi$ 出能带出现简并点，而更高的能带之间正在 $k_x = 0$ 处为简并点。由贝里相理论[10]可知当两个能级 $\varepsilon_n(\mathbf{R})$ 与 $\varepsilon_{n'}(\mathbf{R})$ 在 \mathbf{R} 的一定值处聚集在一起时， \mathbf{R} 就变为奇异点，这个简并点可以对应于参数空间里的一个单极子。

4. 总结

本文给出了如何构造周期性锯齿形光晶格的理论方案：通过使用多光子拉曼跃迁构造出傅里叶合成锯齿形阱势的各个谐波，再对其进行叠加。相较于直接使用傅里叶将不同周期的传统光晶格叠加，其不

但简洁、稳定拥有良好的可行性，还有着广泛的普适性，对于绝大多数冷原子都能构建起该模型。

在给出周期性锯齿形光晶格的构造理论后，本文讨论了此理论上构建的外加磁场的周期性锯齿光晶格，并对冷原子在其中的运动进行理论计算，求得了其波函数的解析解，且依靠理论计算分析了其能带结构。通过对比无磁场情况，发现磁场会在其色散关系图 k_y 的负半轴中产生一个空洞，且在 k_x - E 截面出现与广义 Kronig-Penney 模型中发现的谱带相似的能带结构。

参考文献

- [1] Greiner, M., Mandel, O., Esslinger, T., *et al.* (2002) Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms. *Nature*, **415**, 39-44. <https://doi.org/10.1038/415039a>
- [2] Giovanazzi, S. (2005) Hawking Radiation in Sonic Black Holes. *Physical Review Letters*, **94**, 61302-61302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.061302>
- [3] Zohar, E., Cirac, J.I. and Reznik, B.J.R. (2016) Quantum Simulations of Lattice Gauge Theories Using Ultracold Atoms in Optical Lattices. *Reports on Progress in Physics*, **79**, 014401. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/1/014401>
- [4] Randeria, M. and Taylor, E. (2014) Crossover from Bardeen-Cooper-Schrieffer to Bose-Einstein Condensation and the Unitary Fermi Gas. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, **5**, 209-232. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031113-133829>
- [5] Zoller, P., Budich, *et al.* (2016) Topological Quantum Matter with Ultracold Gases in Optical Lattices. *Nature Physics*, **12**, 639-645.
- [6] Reimann, P. (2002) Brownian Motors: Noisy Transport Far from Equilibrium. *Physics Reports*, **361**, 57-265. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00081-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00081-3)
- [7] Salger, T., Kling, S., Hecking, T., *et al.* (2009) Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet. *Science*, **326**, 1241-1243. <https://doi.org/10.1126/science.1179546>
- [8] Yukawa, S., Tatara, G., Kikuchi, M., *et al.* (2000) Quantum Ratchet. *Physica B: Condensed Matter*, **284**, 1896-1897. [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(99\)02982-8](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(99)02982-8)
- [9] Zhou, W.H., Wang, X.W., Gao, J., *et al.* (2021) Topologically Protecting Quantum Resources with Sawtooth Lattices. *Optics Letters*, **46**, 1584-1587. <https://doi.org/10.1364/OL.418488>
- [10] Berry, M.V. (1984) Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proceedings of the Royal Society of London*, **392**, 45-57.