

# Measurement and Analysis of Natural Frequency of Damaged Cantilever Beam

Hanqing Li<sup>1</sup>, Jinwu Wu<sup>1\*</sup>, Xiaojun Guo<sup>2</sup>, Wenhao Tian<sup>1</sup>, Wei Li<sup>1</sup>, Liang Chen<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

<sup>2</sup>Zhuzhou Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou Hunan

Email: \*wujinwu@nchu.edu.cn

Received: Feb. 14<sup>th</sup>, 2019; accepted: Feb. 28<sup>th</sup>, 2019; published: Mar. 7<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

The relationship between the damage position of cantilever beam and the natural frequency change before and after structural damage is derived. In order to reduce the influence of the clamping force fluctuation of the fixed end of the cantilever beam on the measurement results, a set of natural frequency measurement method with high precision is designed. The accuracy of the method is verified by experiments. It is proved that the average relative error of the measured natural frequencies can be reduced to less than 0.7%. It calculated and analyzed the natural frequency of the cantilever beam before and after the damage. The results show that the damage position of the structure obtained by the natural frequency change is basically consistent with the actual position.

## Keywords

Cantilever Beam Structure, Natural Frequency, Vibration Measurement, Damage Detection

---

# 损伤悬臂梁固有频率精确测量与分析

李汉青<sup>1</sup>, 吴锦武<sup>1\*</sup>, 郭小军<sup>2</sup>, 田文昊<sup>1</sup>, 李威<sup>1</sup>, 陈亮<sup>1</sup>

<sup>1</sup>南昌航空大学飞行器工程学院, 江西 南昌

<sup>2</sup>株洲航空动力机械研究所, 湖南 株洲

Email: \*wujinwu@nchu.edu.cn

收稿日期: 2019年2月14日; 录用日期: 2019年2月28日; 发布日期: 2019年3月7日

---

## 摘要

本文推导了悬臂梁损伤位置与结构损伤前后固有频率变化的关系, 进而可计算悬臂梁损伤位置。为了减小悬臂梁固定端夹紧力波动对测量结果的影响, 设计了一套具有较高精度的固有频率测量方法, 并对该

\*通讯作者。

文章引用: 李汉青, 吴锦武, 郭小军, 田文昊, 李威, 陈亮. 损伤悬臂梁固有频率精确测量与分析[J]. 声学 & 振动, 2019, 7(1): 20-27. DOI: 10.12677/ojav.2019.71003

方法的精确性进行了实验验证,实验证明采用该方法可使固有频率测量值的平均相对误差降至0.7%以下。针对损伤前后悬臂梁的固有频率计算分析与测量,结果表明:通过固有频率变化得到出结构的损伤位置与实际位置基本一致。

## 关键词

悬臂梁结构,固有频率,振动测量,损伤检测

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

航空发动叶片的工作环境十分严苛,叶片发生断裂所导致的后果非常严重。因工况不同,发动机转子失效模式并不相同。其中最常发生的,危害最大的是转子叶片疲劳断裂失效[1]。航空发动机叶片的质量和性能直接影响整个飞机能否正常工作,因此准确检测航空发动机叶片的完整性和状态,提高发动机工作安全性,成为目前无损检测领域研究的一个共同热点[2]。基于振动理论可知,如果结构中存在损伤,结构系统中的动力学参数如质量、阻尼、刚度等都会发生相应改变,从而导致系统的振动模态和频响函数发生改变。固有频率是机械结构振动模态的最基本信息,是结构刚度与质量的函数,由于结构损伤的存在,导致结构的刚度减小、阻尼增大,固有频率就会有所降低[3]。对比结构损伤前后的固有频率变化情况,就能识别出结构是否存在损伤以及损伤大小情况[4]。Cawley 和 Adams [5]基于利用结构损伤前后频率变化进行损伤识别的方法,得到了结构损伤前后任意两阶频率变化仅是损伤位置函数的结论。但是在实际测量固有频率时,固定端的夹紧力波动对测量结果影响很大[6]。因此在利用叶片的固有频率检测其损伤状态时,由于固定叶片的夹紧力不稳定,叶片的固有频率测量有较大的误差。在实际的测量中,叶片一般处于一端固定,另一端自由的悬臂状态。固定装置给叶根施加的夹紧力的大小对叶片固有频率测量结果有很大影响,当夹紧力变大时,固有频率测量结果相应也会变大。

详细描述利用固有频率推导悬臂梁的损伤位置的过程。针对叶片固有频率测量时夹紧力变化会影响测量结果的这一问题,设计了一套高精度固有频率测量方法和装置,并且对该方法的可靠性进行了实验验证。同时针对简化的叶片模型,对叶片损伤检测进行了验证。

## 2. 理论分析

对于一个多自由度结构系统,忽略阻尼的影响,其振动特征方程为:

$$(K - \omega^2 M)\varphi = 0 \quad (1)$$

式中, $M$ 为质量矩阵, $K$ 为刚度矩阵, $\omega$ 为固有频率, $\varphi$ 为正则化振型。

当结构的刚度和质量发生微小变化 $\Delta K$ 和 $\Delta M$ 时,由摄动理论式(1)可知:

$$[(K + \Delta K) - (\omega^2 + \Delta\omega^2)(M + \Delta M)](\varphi + \Delta\varphi) = 0 \quad (2)$$

结构的损伤对结构的刚度影响比较大,而对结构的质量影响比较小,一般当损伤比较小的时候可忽略质量的变化。由小损伤引起的振型变化也很小,所以忽略振型的变化[7]。将式(2)两边同时左乘 $\varphi^T$ ,展开并且忽略质量的变化、振型的变化和高阶小量,则式(2)变为:

$$\Delta\omega^2 = \frac{\varphi^T \Delta K \varphi}{\varphi^T M \varphi} \quad (3)$$

对于第  $i$  阶模态, 式(3)有:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\varphi_i^T \Delta K \varphi_i}{\varphi_i^T M \varphi_i} \quad (4)$$

用  $\Delta K_n$  表示第  $n$  个单元的刚度变化, 通常情况下,  $\Delta K = \sum \Delta K_n$ , 用  $\varepsilon_n(\varphi_i)$  表示由第  $i$  阶振型  $\varphi_i$  计算得到的第  $n$  个单元的单元变形, 则  $\varphi_i^T \Delta K \varphi_i$  可表示为  $\sum_n \varepsilon_n^T(\varphi_i) \Delta K_n \varepsilon_n(\varphi_i)$  将其带入式(4)得:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\sum_n \varepsilon_n^T(\varphi_i) \Delta K_n \varepsilon_n(\varphi_i)}{\varphi_i^T M \varphi_i} \quad (5)$$

当只有第  $n$  个单元出现损伤时, 式(5)可简化为:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\varepsilon_n^T(\varphi_i) \Delta K_n \varepsilon_n(\varphi_i)}{\varphi_i^T M \varphi_i} \quad (6)$$

固有频率平方  $\omega^2$  的变化可定义为损伤位置  $n$  和损伤系数  $\alpha_n$  的函数[8], 即:

$$\Delta\omega_i^2 = \lambda_i(\alpha_n, n) \quad (7)$$

$$\alpha_n = \frac{\Delta K_n}{K_n} \quad (8)$$

式中  $K_n$  为第  $n$  个单元的刚度矩阵,  $\alpha_n$  为第  $n$  个单元的损伤系数, 表示损伤的程度。由于通常单个损伤对刚度矩阵的各个单元影响不同, 所以  $\Delta K_n/K_n$  一般是一个矩阵。但是通常结构单元损伤主要影响结构的一种刚度, 因此  $\alpha_n$  取标量。

把式(7)和式(8)带入式(6), 则可化为:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\alpha_n \varepsilon_n^T(\varphi_i) K_n \varepsilon_n(\varphi_i)}{\varphi_i^T M \varphi_i} \quad (9)$$

从式(9)可知, 固有频率变化的平方是损伤位置和损伤程度的函数[9] [10]。取任意一阶固有频率变化的平方与第一阶固有频率变化的平方的比值的算数平方根, 得到:

$$\left| \frac{\Delta\omega_i}{\Delta\omega_1} \right| = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_n^T(\varphi_i) K_n \varepsilon_n(\varphi_i)}{\varphi_i^T M \varphi_i}}{\frac{\varepsilon_n^T(\varphi_1) K_n \varepsilon_n(\varphi_1)}{\varphi_1^T M \varphi_1}}} \quad (10)$$

式(10)表明, 任意一阶固有频率变化与第一阶固有频率变化的比值的绝对值仅是结构损伤位置的函数。不同位置的损伤对应一组特定的固有频率变化比的绝对值, 根据结构的损伤前后的各阶模态对应的频率变化比的绝对值, 可识别出结构的损伤位置。为了精确地进行损伤定位, 采用如式(11)所示的偏差函数的计算值作为损伤对位的依据:

$$B = \sum_i \left[ \left( \left| \frac{\Delta\omega_i}{\Delta\omega_1} \right| \right)_O - \left( \left| \frac{\Delta\omega_i}{\Delta\omega_1} \right| \right)_C \right]^2 \quad (11)$$

式中下标  $O$  表示实验测试数据;  $C$  表示数值计算数据。

由式(11)可知,理想状态下,使 $B=0$ 的单元就是损伤所在单元。但在实际工程中,由于测量误差等原因,不可能使 $B=0$ ,一般可近似认为使 $B$ 为最小值的单元,就是损伤所在单元。

### 3. 测量方法及装置

对于旋转机构,如在测试航空发动机转子叶片性能,当利用固有频率变化检测其损伤状况时,无法实现在线实时监测,需要将转子叶片拆下然后固定在其他夹具上进行测量。因普通夹具对转子叶片的夹紧力波动比较大,对所测得数据有较大的影响。为减小夹紧力变化对测量轻小构件固有频率造成的误差,在此提供一种测量装置及其方法,有效减小在多次拆卸安装时因夹紧力的变化而造成的误差,从而提高检测精度。

针对悬臂梁,其固定端为燕尾形榫头,提供一套测量方法和装置。各部件装配关系如下图1所示。

#### 3.1. 原理及测量说明

##### 3.1.1. 原理

消除夹紧力影响的装置如图1所示,利用螺栓顶紧垫片,然后通过垫片同时将被测件和参考件压紧,使其与夹具贴紧,实现固定。当其他条件不变时,悬臂梁的固有频率和夹紧力呈正相关。因此可用参考件的固有频率来表征夹具对悬臂梁的夹紧力的变化。当同一参考件固有频率不变时,即可认为被测件的夹紧力稳定不变。

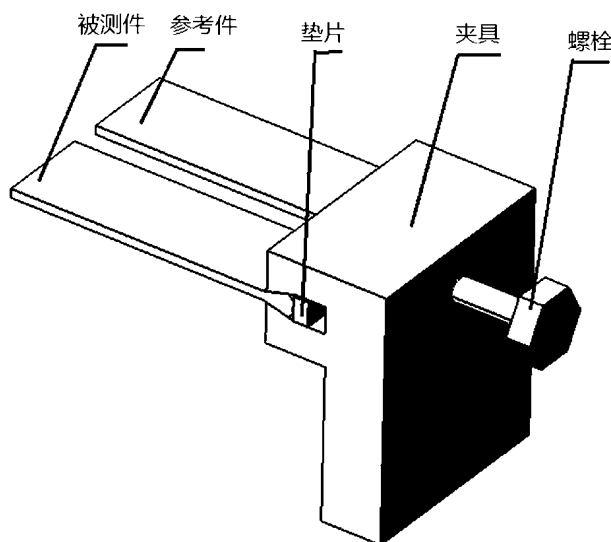


Figure 1. Measuring device and device assembly  
图1. 测量装置及被测件装配图

##### 3.1.2. 测量说明

在对被测件进行固有频率测量时,在所述装置上,同时固定与被测件相类似的参考件,如流程图2所示。选定适合的夹紧力固定参考件和被测件,然后测量参考件和被测件的初始固有频率,分别记为 $f_R$ 和 $f_O$ 。

规定当第 $i$ 次测量, $|f_{Ri} - f_R| < mf_R$ 时,夹具的夹紧力稳定,测量数据有效,其中 $m$ 为参考件固有频率允许变化范围。被测件经过一些处理或者变化后,需要再次测量固有频率时,同时固定被测件和参考件(被测件和参考件的固定位置要与第一次测量时候一致),调节螺栓使参考件测得的固有频率 $f_{Ri}$ 与初始固有频率 $f_R$ 相对误差保持在允许范围内,然后测量被测件的固有频率,得到 $f_{O_i}$ 。

### 3.2. 实验验证

对所述的测量方法及装置进行实验验证。以45号钢为材料,制作了上述测量装置以及被测件和参考件模型。

实验将压电陶瓷贴在被测件和参考件上, 进行扫频激励, 用 polytec PSV-500 激光测振仪测量, 如图 3 所示。

测量中, 在参考件的固有频率基本不变的条件下, 对被测件进行了多次安装 - 测量 - 拆卸的过程。测量中, 通过调节螺栓控制夹紧力, 使参考件第二阶固有频率稳定在适当的范围内, 记录了实验数据如表 1 所示。

由表 1 中数据可知, 当控制参考件第二阶固有频率平均相对误差小于 0.07% 时, 可确保被测件第一阶和第二阶固有频率平均相对误差小于 0.7%。综上所述: 当保持参考件固有频率稳定在一定范围内时, 被测件的固有频率具有较高的测量精度。

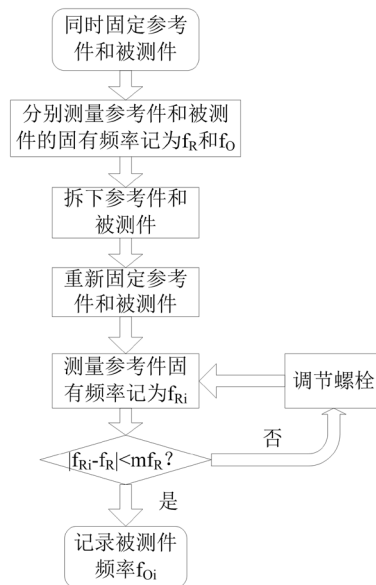


Figure 2. Measurement process

图 2. 测量流程图



Figure 3. Experimental measurement

图 3. 实验测量

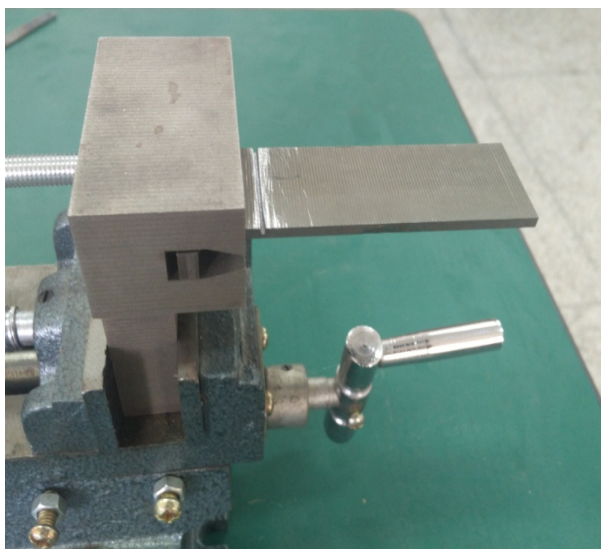
**Table 1.** Measurement data of the test piece and reference piece without damage**表 1.** 无损伤时候被测件和参考件的测量数据

测量次数	被测件		参考件
	第一阶/Hz	第二阶/Hz	第二阶/Hz
第一次	336	1970	1934
第二次	332	1964	1932
第三次	332	1964	1936
第四次	337	1978	1934
第五次	336	1970	1934
平均值	335	1969	1934
标准差	2	5	1
平均相对误差%	0.64	0.26	0.07

## 4. 利用固有频率变化对损伤悬臂梁分析

### 4.1. 对悬臂梁损伤处理

考虑悬臂梁承受载荷时，靠近固定端的地方所受应力最大，因此容易产生破坏。模拟悬臂梁产生疲劳裂纹，在靠近固定端的适当位置用钢锯制造一个宽 1.3 mm，深 1.4 mm 的凹槽如下图 4 所示。

**Figure 4.** Damaged cantilever beam**图 4.** 产生损伤后的悬臂梁

### 4.2. 分析损伤悬臂梁的固有频率变化

#### 4.2.1. 实验测量悬臂梁损伤前后频率变化

利用 2.1 所述的测量方法，测量损伤梁的固有频率。测量时按照表 1 所示测量结果，调节螺栓使参考件第二阶固有频率稳定在 1934 Hz 左右，然后测量损伤梁的前 2 阶固有频率，记录实验数据如表 2 所示。由表 1 和表 2 可知，在该加持状态下，悬臂梁损伤后相比于损伤前其第一、二阶固有频率出现下降趋势。

**Table 2.** Natural frequency of damaged cantilever beam  
**表 2.** 损伤后悬臂梁固有频率

测量次数	被测件		参考件
	第一阶/Hz	第二阶/Hz	第二阶/Hz
第六次	290	1945	1936
第七次	288	1949	1938
第八次	289	1946	1935
第九次	288	1947	1939
第十次	289	1948	1937
平均值	289	1947	1937
标准差	0.84	1.58	1.58
平均相对误差%	0.29	0.08	0.08

#### 4.2.2. 有限元分析悬臂梁频率变化

利用 COMSOL 进行有限元分析。建立了相关的计算模型，按照物理场需要划分网格。计算出悬臂梁受损伤前第一阶和第二阶固有频率值分别为 341 Hz 和 1985 Hz。损伤后第一阶和第二阶固有频率分别为 307 Hz 和 1945 Hz。

在此基础上又分别计算了裂纹相对实际位置向右偏移不同距离时，第一阶和第二阶固有频率，并且根据式 11 计算 B 值，如表 3 所示。

由表 3 可知，裂纹位置与实际位置相同时，所计算得到的 B 值最小。当裂纹相对实际位置向左或向右偏移时，所计算的 B 值会呈现不同的上升趋势。因此可根据结构损伤前后固有频率变化初步估算裂纹位置。

**Table 3.** Natural frequency calculation of cracks at different positions  
**表 3.** 裂纹在不同位置时固有频率计算结果

裂纹向右偏移距离/mm	第一阶/Hz	第二阶/Hz	B
-5	300.0	1918.0	2.52
-4	302.6	1929.5	1.95
-3	303.6	1936.1	1.59
-2	304.9	1940.8	1.39
-1	306.2	1943.6	1.31
0	307.2	1945.0	1.29
1	308.4	1945.8	1.34
2	309.7	1946.0	1.43
3	310.6	1945.3	1.59
4	311.4	1944.1	1.78
5	312.7	1943.9	1.98
10	317.2	1939.1	3.53
15	321.5	1938.5	5.48
20	325.6	1941.4	7.79
30	332.2	1949.1	16.11
40	337.0	1960.6	37.20

## 5. 结论

1) 详细推导了悬臂梁损伤定位公式, 得出了结构损伤前后固有频率变化的比值仅是损伤位置的函数。采用该方法可估算出只有单一损伤时悬臂梁损伤位置。

2) 制定了一套能够提高悬臂梁固有频率测量精度的方法。在实际工程应用中可减小由约束条件波动对测量结果造成的影响。对于文章所用试件, 可将测量的平均相对误差控制在 0.7% 以下。

3) 制作了简化的航空发动机叶片模型。采用文章所述的测量方法和损伤定位公式, 得到的损伤位置计算值与实际值一致。验证了损伤定位公式和固有频率测量方法的有效性。利用固有频率的变化计算结构的损伤位置具有定位简便, 精度高, 成本低的优点。

## 基金项目

江西省教育厅科学技术项目(DA201706712)。

## 参考文献

- [1] 马楠楠, 陶春虎, 何玉怀. 航空发动机叶片多轴疲劳试验研究进展[J]. 航空材料学报, 2012, 32(6): 44-49.
- [2] 于霞. 飞机发动机叶片缺陷的电磁检测技术研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 2014.
- [3] 尤敬业, 何娟娟. 航空发动机叶片检测与裂纹分析[J]. 计测技术, 2016, 36(S1): 74-75.
- [4] 洪杰, 刘书国, 张大义, 陈萌. 小型短寿命涡扇发动机涡轮叶片疲劳失效分析[J]. 航空动力学报, 2012, 27(3): 604-609.
- [5] 郭隆清. 基于固有频率的悬臂梁裂纹参数识别方法研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 南昌航空大学, 2016.
- [6] 黄红蓝, 赵永信, 梁巍, 等. 高阶固有频率检测评估旧零件疲劳损伤的研究[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2017, 42(3): 990-1000.
- [7] 王乐, 杨智春, 谭光辉, 等. 基于固有频率向量的结构损伤检测方法[J]. 应用力学学报, 2008, 25(4): 709-713, 742.
- [8] 韩大建, 王文东. 基于振动的结构损伤识别方法的近期研究进展[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2003(1): 91-96.
- [9] Yang, Q.W. and Liu, J.K. (2006) A Coupled Method for Structural Damage Identification. *Journal of Sound and Vibration*, **296**, 401-405. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.02.014>
- [10] Khiem, N.T. and Toan, L.K. (2014) A Novel Method for Crack Detection in Beam-Like Structures by Measurements of Natural Frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 4084-4103. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.031>

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2328-0530, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ojav@hanspub.org](mailto:ojav@hanspub.org)