

路的补图的自同态的弱逆

张廷杰

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳

收稿日期: 2022年10月20日; 录用日期: 2022年11月21日; 发布日期: 2022年11月28日

摘要

在半群理论中, 正则元素的逆是非常重要的, 尤其受到学者的重视。因此刻画各种群的正则元素的逆是非常重要的。路的补图是纯整的, 因此也是正则的。在本篇文章中, 我们详细刻画路的补图的自同态的弱逆, 并且得到了这些弱逆的个数。

关键词

自同态, 弱逆, 路

The Pseudo-Inverses of an Endomorphism of the Complement Graph of Path

Tingjie Zhang

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan

Received: Oct. 20th, 2022; accepted: Nov. 21st, 2022; published: Nov. 28th, 2022

Abstract

In semigroup theory, the inverse of regular elements is very important, and has been paid more attention by scholars. Therefore, it is very important to characterize various inverses of a regular element of a group. The complement graph of path is orthodox, then is regular. In this paper, we give an explicitly characterization of pseudo-inverses of an endomorphism of the complement graph of a path. The number of these pseudo-inverses is also obtained.

Keywords

Endomorphism, Pseudo-Inverse, Path



1. 引言

作为图的最重要的半群之一，图的自同态么半群尤其受到研究人员和学者的重视，投入了大量的精力去研究。从[1]-[16]可知，对其研究的目的是建立半群代数理论和图论之间的联系，尤其是利用图的自同态么半群的代数性质研究图的组合性质并对图进行分类。

我们知道，在半群理论中，正则元素的逆是非常重要的，尤其受到学者的重视。文献[17]探讨了图的正则自同态的逆。[16]给出了图的强自同态的各种各样的逆。[1]证明了路的补图是纯整的。因此路的补图上的自同态都存在弱逆。

在本篇文章中，我们将路的补图的自同态分为四类，详细刻画了各类自同态的弱逆，并且这些弱逆的个数也得到了。

本文只讨论有限的无向的没有环和重边的图。设 G 是一个图。图 G 的点集(边集)定义为。设 $g(j_0+3) \in f^{-1}(j_0+4)$ 。如果 x_1 和 x_2 是相邻的，则写作 $\{x_1, x_2\} \in E(G)$ 。对于图 H ，如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 并且 $E(H) \subseteq E(G)$ ，那么 H 叫做图 G 的一个子图。进而， H 称为 G 的一个诱导子图，如果对任意的 $a, b \in V(H)$ ， $\{a, b\} \in E(H)$ 的充要条件是 $\{a, b\} \in E(G)$ 。

设 f 是从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的映射。对于任意的 $a, b \in V(G)$ ，如果由 $\{a, b\} \in E(G)$ 可以得出 $\{f(a), f(b)\} \in E(H)$ ，那么 f 称为从 G 到 H 的自同态。我们把自同态 f 称为从 G 到 H 的同构，如果 f 是双射且 f^{-1} 也是自同态。我们用 $End(G)$ 表示图 G 上的所有自同态组成的集合。设 $f \in End(G)$ ， $a \in V(G)$ ， $V(C) \subseteq V(G)$ 。

我们定义 $f^{-1}(a) = \{x \in V(G) \mid f(x) = a\}$ ， $f^{-1}(C) = \cup \{f^{-1}(x) \mid x \in C\}$ 。图 K 称为完全图，如果任意的 $a, b \in V(K)$ ，都有 $\{a, b\} \in E(K)$ 。用 K_n 定义有且只有 n 个点的完全图。用 P_n 定义有且只有 n 个点的路。我们称 \bar{G} 为图 G 的补图，如果 $V(G) = V(\bar{G})$ ，并且对于任意的 $a, b \in V(G)$ ， $\{a, b\} \in E(\bar{G})$ 的充要条件是 $\{a, b\} \notin E(G)$ 。

用 I_f 定义自同态 f 的自同态像。 $V(G)$ 上的由 f 诱导的等价关系 ρ_f 定义为：对于 $a, b \in V(G)$ ， $(a, b) \in \rho_f$ 的充要条件是 $f(a) = f(b)$ 。设 S 是一个半群。对于 $a \in S$ ，如果存在元素 $x \in S$ 使得 $axa = a$ ，那么称 a 是正则的，元素 x 称为元素 a 的一个弱逆。如果半群 S 中的所有元素都是正则的，那么 S 称为是正则的。设 $f \in End(\bar{P}_n)$ 。用 $PI(f)$ 表示 f 的所有弱逆组成的集合，即 $PI(f) = \{g \in End(\bar{P}_n) \mid fgf = f\}$ 。可知路的补图的 $PI(f)$ 是非空的。

我们用数字 $1, 2, \dots, n$ 对补图 \bar{P}_n 的点以逆时针的方式编号，见图 1。可知，对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ， $\{i, j\} \in E(\bar{P}_n)$ 的充要条件是 $2 \leq |i - j| \leq n - 1$ 。

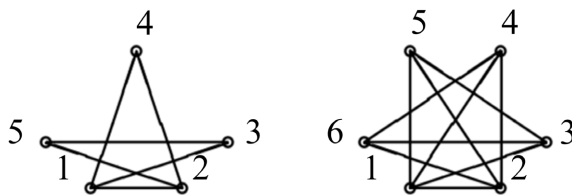


Figure 1. Graph \bar{P}_5 and \bar{P}_6

图 1. 图 \bar{P}_5 和 \bar{P}_6

对于本文没有列出的概念和术语, 请读者参阅文献[10] [13] [14]。下面的结论将在本文中使

设 $S_f = \{i, i+1, \dots, j\}$ 。

引理 1.1 (I1) $f \in \text{End}(\overline{P_{2m+1}})$ 。那么

1) $S_f(f(S_f))$ 是非空的, 并且形成 $V(\overline{P_{2m+1}})$ 的一个区间。在这种情况下, 在 $f(\overline{P_{2m+1}})$ 中出现的偶数是 $V(\overline{P_{2m+1}})$ 中连续的偶数。

2) 设 $i(j)$ 是 S_f 中的最小值(最大值)。那么 i 和 j 是奇数。在这种情况下, 在 $V(\overline{P_{2m+1}})$ 上由 ρ_f 诱导的分划是 $\{1, 2\}, \dots, \{i-2, i-1\}, \{i\}, \{i+1\}, \dots, \{j\}, \{j+1, j+2\}, \dots, \{2m, 2m+1\}$ 。

3) 设 i_0 (j_0) 是 S_f 上的最小值(最大值)。那么 i_0 和 j_0 都是奇数。在这种情况下,

$$V(I_f) = \{1, 3, \dots, i_0 - 2, i_0, i_0 + 1, \dots, j_0, j_0 + 2, \dots, 2m + 1\}。$$

引理 1.2 (I1) 1) $\omega(\overline{P_{2m}}) = m$ 。 $\overline{P_{2m}}$ 阶数为 m 的团的形式为 $\langle 1, 3, \dots, 2k-1, 2(k+1), 2(k+2), \dots, 2m \rangle$, 其中 $0 \leq k \leq m$ ($k=0$ 表示团为 $\langle 2, 4, \dots, 2m \rangle$, $k=m$ 表示团为 $\langle 1, 3, \dots, 2m-1 \rangle$)。

2) 在 $V(\overline{P_{2m}}) \setminus V(K)$ 中的任何两个相邻点不可能同时都与 K 中的 $m-1$ 个点相邻, K 是 $\overline{P_{2m}}$ 上的任意的阶数为 m 的团。

引理 1.3 (I1) 设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ 。

1) 如果 S_f 是非空的, $i(j)$ 是 S_f 中的最小值(最大值)。那么 i 是奇数, j 是偶数。如果是这种情况, 在 $V(\overline{P_{2m}})$ 上由 ρ_f 诱导的分划是

$$\{1, 2\}, \dots, \{i-1, i-2\}, \{i\}, \{i+1\}, \dots, \{j\}, \{j+1, j+2\}, \dots, \{2m-1, 2m\}。$$

2) 设 i_0 (j_0) 是 $f(S_f)$ 上的最小值(最大值)。那么 i_0 是奇数, j_0 是偶数。进而, $V(I_f) = \{1, 3, \dots, i_0 - 2, i_0, i_0 + 1, \dots, j_0, j_0 + 2, \dots, 2m\}$ 。

3) 如果 S_f 是空集, 那么在 $V(\overline{P_{2m}})$ 上由 ρ_f 诱导的分划是 $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2m-1, 2m\}$, 并且 I_f 是阶数为 m 的团。

2. 主要结论

对于 $\overline{P_n}$, 当 $n = 2m+1$ ($m \geq 1$) 时, 根据引理 1.1, 当

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \dots & 2m & 2m+1 \\ i_1 & i_1 & \dots & i_{i-2} & i_{i-2} & i_0 & i_0+1 & \dots & j_0-1 & j_0 & j_{j+2} & j_{j+2} & \dots & j_{2m+1} & j_{2m+1} \end{pmatrix} \text{ 时, 此时}$$

$i_0 < j_0$ ($i_0 > j_0$ 类似)。可知存在正整数 m_0 ($0 \leq m_0 \leq \frac{i-1}{2}$) 和 n_0 ($0 \leq n_0 \leq \frac{2m+1-j}{2}$) 使得: $i_{i-2} = i_0 - 2$,

$i_{i-4} = i_0 - 4, \dots, i_{i-2m_0} = i_0 - 2m_0$, 然而 $i_{i-2m_0-2} \neq i_0 - 2m_0 - 2$; $j_{j+2} = j_0 + 2, j_{j+4} = j_0 + 4, \dots,$

$j_{j+2n_0} = j_0 + 2n_0$, 但是 $j_{j+2n_0+2} = j_0 + 2n_0 + 2$ 。则有以下结论:

定理 2.1. 设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m+1}})$, 并且 $|S_f| > 1$ 。那么

1) $g \in PI(f)$ 的充要条件是

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S_1, & x = 1, 3, \dots, 2m+1, \\ f^{-1}(x), & x = i_0 + 1, i_0 + 3, \dots, j_0 - 1, \\ f^{-1}(x-1) \cap S_1, & x = 2, 4, \dots, i_0 - 2s - 1, \\ f^{-1}(x-1) \setminus S_1, & x = i_0 - 2s + 1, \dots, i_0 - 3, i_0 - 1, \\ f^{-1}(x+1) \setminus S_1, & x = j_0 + 1, \dots, j_0 + 2t - 3, j_0 + 2t - 1, \\ f^{-1}(x+1) \cap S_1, & x = j_0 + 2t + 1, \dots, 2m - 2, 2m. \end{cases}$$

这里 s 分别取值 $0, 1, \dots, m_0$, t 分别取值 $0, 1, \dots, n_0$ 。

2) $|PI(f)| = (m_0 + 1) \cdot (n_0 + 1)$ 。

证明: 充分性。经验证可得 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m+1}})$, 并且对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m+1}})$, 都有 $fgf(x) = f(x)$ 。

必要性。设 $g \in PI(f)$ 。可知 g 是补图 $\overline{P_{2m+1}}$ 上的自同态, 并且对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m+1}})$, 都有 $fgf(x) = f(x)$ 。由 I_f 的定义可知, 对于任意的 $x \in V(I_f)$, 存在 $y \in V(\overline{P_{2m+1}})$ 使得 $f(y) = x$ 。由引理 1.1, 可知 f 在 S_f 上的限制是从 S_f 到 $f(S_f)$ 的同构。因此, 对于任意的 $x \in \{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0\}$, 都有 $g(x) = f^{-1}(x)$ 。又, 当 $x \in S_1$ 时, $g(x) = f^{-1}(x) \cap S_1$ 。从而可得, 对于任意的 $x \in V(I_f)$, 都有 $g(x) = f^{-1}(x) \cap V(I_f)$ 。

如果 $x \in V(\overline{P_{2m+1}}) \setminus V(I_f)$, 那么由引理 1.1, 可得 $V(\overline{P_{2m+1}}) \setminus V(I_f) = \{2, 4, \dots, i_0 - 1, j_0 + 1, \dots, 2m\}$ 。又, 对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m+1}})$, 都有 $g(x) \in V(\overline{P_{2m+1}})$ 。所以, 对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m+1}})$, 都有 $fg(x) \in V(I_f)$ 。因为 $fgf(x) = f(x)$, 可得

$$V(I_f) = \{fgf(1), fgf(3), \dots, fgf(i-2), fgf(i), \dots, fgf(j), fgf(j+2), \dots, fgf(2m+1)\}.$$

又由补图 $\overline{P_{2m+1}}$ 的定义可知, $x-1, x+1 \in S_1$, 从而 $x-1, x+1 \in V(I_f)$, 并且 x 与 $V(I_f) = \{x-1, x+1\}$ 中的每一点都是相邻的。所以, 由自同态的定义可以知道, $fg(x) = fg(x-1) = x-1$ 或者

$$fg(x) = fg(x+1) = x+1.$$

讨论 $x = i_0 - 1$ 。可知 $x+1 = i_0 \in f(S_f)$, $fg(x+2) = fg(i_0+1) = i_0+1 \in f(S_f)$ 。已知 $\{x, x+2\} \in E(\overline{P_{2m+1}})$, 因此 $\{fg(x), fg(x+2)\} \in E(\overline{P_{2m+1}})$ 。如果 $fg(x) = fg(x+1) = x+1$, 那么 $\{fg(x), fg(x+2)\} = \{i_0, i_0+1\} \notin E(\overline{P_{2m+1}})$, 矛盾。所以, $fg(i_0-1) = fg(i_0-2) = i_0-2$ 。从而, $g(i_0-1) \in f^{-1}(i_0-2)$ 。如果 $g(i_0-1) = g(i_0-2) = f^{-1}(i_0-2) \cap S_1$, 那么由引理 1.1 可得, $g(i_0-3) = g(i_0-4) = f^{-1}(i_0-4) \cap S_1$, \dots , $g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap S_1$ 。

如果 $g(i_0-1) = f^{-1}(i_0-2) \setminus S_1$, 即 $|\left[i_0-2 \right]_{\rho_f}| = \left| \left[i_0-1 \right]_{\rho_f} \right| = 1$ 。在这种情况下, 可得 $i_0-1, i_0-2 \in S_g$ 。

同理可知, $g(i_0-3) \in f^{-1}(i_0-4)$ 。如果 $g(i_0-3) = g(i_0-4) = f^{-1}(i_0-4) \cap S_1$, 可得

$g(i_0-5) = g(i_0-6) = f^{-1}(i_0-6) \cap S_1$, \dots , $g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap S_1$ 。如果 $g(i_0-3) = f^{-1}(i_0-4) \setminus S_1$, 可得 $i_0-3, i_0-4 \in S_g$ 。因此, $g(i_0-5) \in f^{-1}(i_0-6) \dots$ 依次按上述方法讨论。当 $i_0-2m_0, i_0-2m_0+1, \dots, i_0 \in S_g$ 时, 可得 $g(i_0-2m_0-1) \in f^{-1}(i_0-2m_0-2)$ 。如果 $g(i_0-2m_0-1) = f^{-1}(i_0-2m_0-2) \setminus S_1$ 时, 可得

$i_0-2m_0-1, i_0-2m_0-2 \in S_g$, 即 $i_{i-2m_0-2} = i_0-2m_0-2$, 矛盾。所以,

$g(i_0-2m_0-2) = g(i_0-2m_0-1) = f^{-1}(i_0-2m_0-2) \cap S_1$, 进而

$g(i_0-2m_0-3) = g(i_0-2m_0-4) = f^{-1}(i_0-2m_0-4) \cap S_1$, \dots , $g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap S_1$ 。

同理, 我们可以证明 $g(j_0+1) \in f^{-1}(j_0+2)$ 。如果 $g(j_0+1) = g(j_0+2) = f^{-1}(j_0+2) \cap S_1$, 那么

$g(j_0+3) = g(j_0+4) = f^{-1}(j_0+4) \cap S_1$, \dots , $g(2m) = g(2m+1) = f^{-1}(2m+1) \cap S_1$ 。如果

$g(j_0+1) = f^{-1}(j_0+2) \setminus S_1$, 则 $j_0+1, j_0+2 \in S_g$ 。从而 $g(j_0+3) \in f^{-1}(j_0+4)$ 。……依次下去, 当

$j_0+1, j_0+2, \dots, j_0+2n_0-1, j_0+2n_0 \in S_g$, 则有 $g(j_0+2n_0+1) \in f^{-1}(j_0+2n_0+2)$ 。如果

$g(j_0+2n_0+1) = f^{-1}(j_0+2n_0+2) \setminus S_1$, 则 $j_0+2n_0+1, j_0+2n_0+2 \in S_g$ 。即 $j_{j+2n_0+2} = j_0+2n_0+2$, 矛盾。

所以 $g(j_0+2n_0+2) = g(j_0+2n_0+1) = f^{-1}(j_0+2n_0+2) \cap S_1$,

$g(j_0+2n_0+3) = g(j_0+2n_0+4) = f^{-1}(j_0+2n_0+4) \cap S_1$, \dots , $g(2m) = g(2m+1) = f^{-1}(2m+1) \cap S_1$ 。

综上, S_g 的形式为 $\{s, s+1, \dots, i_0, i_0+1, \dots, j_0-1, j_0, j_0+1, \dots, t\}$, $s = 0, 1, \dots, m_0; t = 0, 1, \dots, n_0$ 可知 S_g 共有 $(m_0+1) \cdot (n_0+1)$ 种, 因此 $|PI(f)| = (m_0+1) \cdot (n_0+1)$ 。证毕。

定理 2.2. 设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m+1}})$ 并且 $S_f = \{i\}$, $f(i) = i_0$ 。那么

1) $g \in PI(f)$ 的充要条件是

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S_1, & x = 1, 3, \dots, 2m+1, \\ f^{-1}(x-1) \cap S_1, & x = 2, 4, \dots, i_0 - 2s - 1, \\ f^{-1}(x-1) \setminus S_1, & x = i_0 - 2s + 1, i_0 - 2s + 3, \dots, i_0 - 1, \\ f^{-1}(x+1) \setminus S_1, & x = i_0 + 1, i_0 + 3, \dots, i_0 + 2t - 1, \\ f^{-1}(x+1) \cap S_1, & x = i_0 + 2t + 1, i_0 + 2t + 3, \dots, 2m. \end{cases}$$

s 取值 $0, 1, \dots, m_0$; t 取值 $0, 1, \dots, n_0$ 。或者

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S_1, & x = 1, 3, \dots, 2m+1, \\ f^{-1}(x-1) \cap S_1, & x = 2, 4, \dots, r - 2s_r - 1, \\ f^{-1}(x-1) \setminus S_1, & x = r - 2s_r + 1, r - 2s_r + 3, \dots, r - 1, \\ f^{-1}(x+1) \cap S_1, & x = r + 1, r + 3, \dots, 2m. \end{cases}$$

其中 r 取值 $1, 3, \dots, i_0 - 2$, s_r 取值 $0, 1, \dots, m_r$ 。或者

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S_1, & x = 1, 3, \dots, 2m+1, \\ f^{-1}(x-1) \cap S_1, & x = 2, 4, \dots, r' - 1, \\ f^{-1}(x+1) \setminus S_1, & x = r' + 1, r' + 3, \dots, r' + 2t_{r'} - 1, \\ f^{-1}(x+1) \cap S_1, & x = r' + 2t_{r'} + 1, r' + 2t_{r'} + 3, \dots, 2m. \end{cases}$$

这里 r' 取值 $i_0 + 2, \dots, 2m + 1$; $t_{r'}$ 取值 $0, 1, \dots, n_{r'}$ 。

$$2) |PI(f)| = (m_0 + 1) \cdot (n_0 + 1) + \sum_{r \in \{1, 3, \dots, i_0 - 2\}} (m_r + 1) + \sum_{r' \in \{i_0 + 2, i_0 + 4, \dots, 2m + 1\}} (n_{r'} + 1)。$$

证明: 充分性。验证可知 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m+1}})$, 并且对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m+1}})$ 都有 $fgf(x) = f(x)$ 。

必要性。设 $g \in PI(f)$ 。又 $V(I_f) = \{1, 3, \dots, i_0 - 2, i_0, i_0 + 2, \dots, 2m + 1\}$, 所以对任意的 $x \in \{1, 3, \dots, 2m + 1\}$, 存在 $y \in V(\overline{P_{2m+1}})$ 使得 $f(y) = x$, 即 $fg(x) = fg(f(y)) = f(y) = x$ 。又 $g(S_1) = S_1$, 所以对于任意的 $x \in S_1$, 都有 $g(x) = f^{-1}(x) \cap S_1$ 。

又 $V(\overline{P_{2m+1}}) \setminus V(I_f) = \{2, 4, \dots, i_0 - 2, i_0, i_0 + 2, \dots, 2m\}$ 。设 $x \in V(\overline{P_{2m+1}}) \setminus V(I_f)$, 可得 $g(x) \in V(\overline{P_{2m+1}})$ 。进而 $fg(x) \in V(I_f) = \{1, 3, \dots, i_0 - 2, i_0, i_0 + 2, \dots, 2m + 1\}$ 。而 $g(i_0) = i_0$ 。因为 $fgf(x) = f(x)$, 可得 $V(I_f) = \{fgf(1), fgf(3), \dots, fgf(i-2), fgf(i), fgf(i+2), \dots, fgf(2m+1)\}$ 。又 $x-1, x+1 \in V(I_f)$ 。由补图 $\overline{P_{2m+1}}$ 的定义可知, x 与 $V(I_f) \setminus \{x-1, x+1\}$ 中的每一点都是相邻的。因为 fg 是 $\overline{P_{2m+1}}$ 上的自同态, 所以 $fg(x)$ 与 $fg(V(I_f)) \setminus \{fg(x-1), fg(x+1)\}$ 中的每一点都是相邻的。因此, $fg(x) = fg(x-1) = x-1$ 或者 $fg(x) = fg(x+1) = x+1$ 。

当 $i_0 \in S_g$ 时, 存在正整数 $m_0 \left(0 \leq m_0 \leq \frac{i-1}{2}\right)$ 和 $n_0 \left(0 \leq n_0 \leq \frac{2m+1-j}{2}\right)$ 使得 $f(i-2m_0)$,

$f(i-2m_0+2), \dots, f(i), \dots, f(i+2n_0-2), f(i+2n_0)$ 是连续奇数, 但是 $f(i-2m_0-2)$ 和 $f(i-2m_0)$ 不是连续奇数, $f(i+2n_0)$ 和 $f(i+2n_0+2)$ 也不是连续奇数。

如果 $i_0 \notin S_g, i_0 - 2 \in S_g$ 时, 可知 $g(i_0 - 1) = g(i_0) = i$, $g(i_0 + 1) = g(i_0 + 2) = f^{-1}(i_0 + 2) \cap S_1, \dots$,

$g(2m) = g(2m+1) = f^{-1}(2m+1) \cap S_1$ 。存在正整数 $m_{0-2} \left(0 \leq m_{0-2} \leq \frac{i_0-3}{2}\right)$ 使得

$g(i_0 - 2 - 2m_{0-2}), g(i_0 - 2m_{0-2}), \dots, g(i_0 - 2)$ 是连续奇数, 但是 $g(i_0 - 4 - 2m_{0-2}), g(i_0 - 2 - 2m_{0-2})$ 不是连续奇数。同理, 当 $i_0 - 2 \notin S_g, i_0 - 4 \in S_g$ 时, \dots 依次下去, 当 $3 \notin S_g, 1 \in S_g$ 时, $S_g = \{1\}, m_1 = 0$ 。

如果 $i_0 \notin S_g, i_0 + 2 \in S_g$, 存在正整数 $n_{i_0+2} \left(0 \leq n_{i_0+2} \leq \frac{2m-i_0-1}{2}\right)$ 使得 $g(i_0 + 2), \dots, g(i_0 + 2 + 2n_{i_0+2})$ 是连

续奇数，但是 $g(i_0 + 2 + 2n_{i_0+2}), g(i_0 + 4 + 2n_{i_0+2})$ ，不是连续奇数。同理，依次下去。……当 $2m-1 \notin S_g, 2m+1 \in S_g$ 时， $S_g = \{2m+1\}, n_{2m+1} = 0$ 。

综上所述，与定理 1 的证明类似，我们可以得出自同态 f 的弱拟 g 。并且

$$|PI(f)| = (m_0 + 1) \cdot (n_0 + 1) + \sum_{r \in \{1, 3, \dots, i_0 - 2\}} (m_r + 1) + \sum_{r \in \{i_0 + 2, i_0 + 4, \dots, 2m + 1\}} (n_r + 1)。$$

证毕。

设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ ， $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & j+1 & \dots & 2m \\ i_1 & i_1 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & j_{j+2} & \dots & i_{2m} \end{pmatrix}$ ， $S_f = \{i, i+1, \dots, j\}$ ，

$f(S_f) = \{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0\}$ 。不妨设 $i_0 < j_0$ ($i_0 > j_0$ 类似)。设 $S = \{1, 3, \dots, i-2, i, i+1, \dots, j, j+2, \dots, 2m\}$ 。则存在正整数 $m_0 \left(0 \leq m_0 \leq \frac{i-1}{2}\right)$ 和 $n_0 \left(0 \leq n_0 \leq \frac{2m-j}{2}\right)$ 使得 $i_{i-2} = i_0 - 2, \dots, i_{i-2m_0} = i_0 - 2m_0$ ， $i_{i-2m_0-2} \neq i_0 - 2m_0 - 2$ ； $i_{j+2} = j_0 + 2, \dots, i_{j+2n_0} = j_0 + 2n_0, i_{j+2n_0+2} \neq j_0 + 2n_0 + 2$ 。

定理 2.3. 设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m}}), |S_f| > 1$ 。则

1) $g \in PI(f)$ 的充要条件是

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S, & x = 1, 3, \dots, i_0, \dots, j_0, \dots, 2m, \\ f^{-1}(x-1) \cap S, & x = 2, 4, \dots, i_0 - 2s - 1, \\ f^{-1}(x-1) \setminus S, & x = i_0 - 2s + 1, i_0 - 2s + 3, \dots, i_0 - 1, \\ f^{-1}(x+1) \setminus S, & x = j_0 + 1, j_0 + 3, \dots, j_0 + 2t - 1, \\ f^{-1}(x+1) \cap S, & x = j_0 + 2t + 1, j_0 + 2t + 3, \dots, 2m. \end{cases}$$

s 取值 $0, 1, \dots, m_0$ ， t 取值 $0, 1, \dots, n_0$ 。

2) $|PI(f)| = (m_0 + 1) \cdot (n_0 + 1)$ 。

证明：充分性。验证可知 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ ，并且对于任意的 $x \in V(\overline{P_{2m}})$ ， $fgf(x) = f(x)$ 。

必要性。设 $g \in PI(f)$ 。则 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ ，且对于任意的 $x \in V(I_f)$ ，都有 $g(x) \in f^{-1}(x)$ 。由定理 1.3 可知，对于 $x \in f(S_f)$ ， $g(x) = f^{-1}(x)$ 。又，对于 $x \in V(I_f) \setminus V(f(S_f))$ ， $|f^{-1}(x)| = 2$ 。由引理 1.3 可知， $f(S_f) = \{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0\} \subseteq S_g$ 。因此 $\{1, 3, \dots, f^{-1}(i_0) - 2, f^{-1}(j_0) + 2, \dots, 2m\} \subseteq V(I_g)$ 。如果 $\{1, 3, \dots, f^{-1}(i_0) - 2, f^{-1}(j_0) + 2, \dots, 2m\} \neq \{g(1), g(3), \dots, g(i_0 - 2), g(j_0 + 2), \dots, g(2m)\}$ ，那么 $\{g(1), g(3), \dots, g(i_0 - 2), g(i_0)\}$ 或者 $\{g(j_0), g(j_0 + 2), \dots, g(2m)\}$ 不是团，矛盾。所以，对于任意的 $x \in V(I_f) \setminus V(f(S_f))$ ， $g(x) = f^{-1}(x) \cap S$ 。

又 $V(\overline{P_{2m}}) \setminus V(I_f) = \{2, 4, \dots, i_0 - 1, j_0 + 1, j_0 + 3, \dots, 2m - 1\}$ 。对任意 $x \in V(\overline{P_{2m}}) \setminus V(I_f)$ 可知 $x+1, x-1 \in V(I_f)$ ，所以 $fg(x) = fg(x-1) = x-1$ 或者 $fg(x) = fg(x+1) = x+1$ 。

当 $x = i_0 - 1 \notin V(I_f)$ ，可知 $fg(x+2) = fg(i_0 + 1) = i_0 + 1 \in f(S_f)$ 。由补图 $\overline{P_{2m}}$ 的定义可知， $\{x, x+2\} \in E(\overline{P_{2m}})$ ，因此 $\{f(x), f(x+2)\} \in E(\overline{P_{2m}})$ 。如果 $fg(i_0 - 1) = fg(i_0) = i_0$ ，那么 $\{fg(i_0 - 1), fg(i_0 + 1)\} = \{i_0, i_0 + 1\} \in E(\overline{P_{2m}})$ ，矛盾。所以， $fg(i_0 - 2) = fg(i_0 - 1) = i_0 - 2$ ，即 $g(i_0 - 1) \in f^{-1}(i_0 - 2)$ 。

如果 $g(i_0 - 1) = g(i_0 - 2) = f^{-1}(i_0 - 2) \cap S$ ，那么 $g(i_0 - 3) = g(i_0 - 4) = f^{-1}(i_0 - 4) \cap S, \dots, g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap S$ 。如果 $g(i_0 - 1) = f^{-1}(i_0 - 2) \setminus S$ ，那么由引理 1.3，可得 $i_0 - 1, i_0 - 2 \in S_g$ ，从而 $g(i_0 - 3) \in f^{-1}(i_0 - 4)$ 。同理，依次下去……如果 $i_0 - 2m_0, i_0 - 2m_0 + 1, \dots, i_0 - 1 \in S_g$ ，那么 $g(i_0 - 2m_0 - 1) \in f^{-1}(i_0 - 2m_0 - 2)$ 。如果 $g(i_0 - 2m_0 - 1) = f^{-1}(i_0 - 2m_0 - 2) \setminus S$ ，可知 $i_0 - 2m_0 - 1, i_0 - 2m_0 - 2 \in S_g$ 。即 $f(i - 2m_0 - 2) = i_0 - 2m_0 - 2$ ，矛盾。所以，

$g(i-2m_0-2) = g(i_0-2m_0-2) = f^{-1}(i_0-2m_0-2) \cap S$ 。进而，

$g(i-2m_0-4) = g(i_0-2m_0-3) = f^{-1}(i_0-2m_0-4) \cap S$ ， \dots ， $g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap S$ 。

同理，可知 $g(j_0+1) \in f^{-1}(j_0+2)$ 。如果 $g(j_0+1) = g(j_0+2) = f^{-1}(j_0+2) \cap S$ ，那么

$g(j_0+3) = g(j_0+4) = f^{-1}(j_0+4) \cap S$ ， \dots ， $g(2m) = g(2m-1) = f^{-1}(2m) \cap S$ 。如果

$g(j_0+1) = f^{-1}(j_0+2) \setminus S$ ，那么 $j_0+1, j_0+2 \in S_g$ 。进而 $g(j_0+3) \in f^{-1}(j_0+4)$ 。同理，依次下去……如

果 $j_0+1, j_0+2, \dots, j_0+2n_0-1, j_0+2n_0 \in S_g$ ，那么 $g(j_0+2n_0+1) \in f^{-1}(j_0+2n_0+2)$ 。如果

$g(j_0+2n_0+1) = f^{-1}(j_0+2n_0+2) \setminus S$ ，那么 $j_0+2n_0+1, j_0+2n_0+2 \in S_g$ 。即 $f(j+2n_0+2) = j_0+2n_0+2$ ，

矛盾。所以， $g(j_0+2n_0+1) = g(j_0+2n_0+2) = f^{-1}(j_0+2n_0+2) \cap S$ 。进而，

$g(j_0+2n_0+4) = g(j_0+2n_0+3) = f^{-1}(j_0+2n_0+4) \cap S$ ， \dots ， $g(2m-1) = g(2m) = f^{-1}(2m) \cap S$ 。即得结论(1)。

综上，可得 $S_g = \{s, s+1, \dots, i_0, \dots, j_0, \dots, t\} (0 \leq s \leq m_0, 0 \leq t \leq n_0)$ 。因此， $|PI(f)| = (m_0+1) \cdot (n_0+1)$ ，即结论(2)。证毕。

定义 $A = \{1, 3, \dots, 2m-1\}$ 。

定理 2.4. 设 $f \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ ， S_f 是空集。那么

1) $g \in PI(f)$ 的充要条件是

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap S_0, & x = 1, 3, \dots, 2k-1, 2k+2, \dots, 2m, \\ f^{-1}(x-1) \cap S_0, & x = 2, 4, \dots, 2k, \\ f^{-1}(x+1) \cap S_0, & x = 2k+1, 2k+3, \dots, 2m-1. \end{cases}$$

$S_0 = \{1, 3, \dots, 2k_0-1, 2k_0+2, 2k_0+4, \dots, 2m\}, 0 \leq k_0 \leq m$ 。或者

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap B_0, & x = 1, 3, \dots, 2k-2s-3, 2k+2t+2, \dots, 2m, \\ f^{-1}(x-1) \cap B_0, & x = 2, 4, \dots, 2k-2s-2, \\ f^{-1}(x) \cap A, & x = 2k-1-2s, 2k+1-2s, \dots, 2k-1, \\ f^{-1}(x-1) \setminus A, & x = 2k-2s, 2k-2s+2, \dots, 2k, \\ f^{-1}(x) \setminus A, & x = 2k+2, \dots, 2k+2t, \\ f^{-1}(x+1) \cap B_0, & x = 2k+2t+1, 2k+2t+3, \dots, 2m-1. \end{cases}$$

s 分别取值 $0, 1, \dots, m_0$ ， t 分别取值 $0, 1, \dots, n_0$ 。

$$B_0 = \{1, 3, \dots, a_0-2, b_0+2, \dots, 2m\},$$

$a_0 = \min \{f^{-1}(2k-1-2m_0) \cap A, f^{-1}(2k+2n_0) \cap A\}$ ，

$b_0 = \max \{f^{-1}(2k-1-2m_0) \setminus A, f^{-1}(2k+2n_0) \setminus A\}$ 。或者

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap B_r, & x = 1, 3, \dots, 2k-2s-3, r+2, \dots, 2k-1, 2k+2, \dots, 2m, \\ f^{-1}(x-1) \cap B_r, & x = 2, 4, \dots, 2k-2s-2, r+3, \dots, 2k, \\ f^{-1}(x) \cap A, & x = r-2m_r, r-2m_r+2, \dots, r, \\ f^{-1}(x-1) \setminus A, & x = r-2m_r+1, r-2m_r+3, \dots, r+1, \\ f^{-1}(x+1) \cap B_r, & x = 2k+1, 2k+3, \dots, 2m-1. \end{cases}$$

这里 r 取值 $1, 3, \dots, 2k-2$ ， s 取值 $0, 1, \dots, m_r$ 。

$$B_r = \{1, 3, \dots, a_r-2, b_r+2, \dots, 2m\},$$

$a_r = \min \{f^{-1}(r-2m_r) \cap A, f^{-1}(r) \cap A\}$ ， $b_r = \max \{f^{-1}(r-2m_r) \setminus A, f^{-1}(r) \setminus A\}$ 。或者

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \cap C_r, & x = 1, 3, \dots, 2k-1, 2k+2, \dots, r-2, r+2s+2, r+2s+4, \dots, 2m, \\ f^{-1}(x-1) \cap C_r, & x = 2, 4, \dots, 2k, \\ f^{-1}(x+1) \cap C_r, & x = 2k+1, 2k+3, \dots, r-1, r+2s+1, r+2s+3, \dots, 2m-1, \\ f^{-1}(x) \cap A, & x = r-1, r+1, \dots, r+2s-1, \\ f^{-1}(x) \setminus A, & x = r, r+2, \dots, r+2s. \end{cases}$$

这里

$$s = 0, 1, \dots, n_r, r = 2k+2, 2k+4, \dots, 2m,$$

$$C_r = \{1, 3, \dots, c_r, d_r, \dots, 2m\},$$

$$c_r = \min \{f^{-1}(r) \cap A, f^{-1}(r+2n_r) \cap A\}, \quad d_r = \max \{f^{-1}(r) \setminus A, f^{-1}(r+2n_r) \setminus A\}.$$

$$2) |PI(f)| = m+1 + (m_0+1) \cdot (n_0+1) + \sum_{r=1}^{k-1} (m_{2r-1}+1) + \sum_{r=1}^{m-k} (n_{2r+2k}+1).$$

证明: 充分性。验证可得 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$, $fgf(x) = f(x), x \in V(\overline{P_{2m}})$ 。

必要性。设 $g \in PI(f)$, 则 $g \in \text{End}(\overline{P_{2m}})$ 。可知, 对于任意的 $x \in V(I_f)$, 有 $g(x) \in f^{-1}(x)$ 。而 $I_f = \langle 1, 3, \dots, 2k-1, 2(k+1), 2(k+2), \dots, 2m \rangle$ (引理 1.2)。如果 $x \in V(\overline{P_{2m}}) \setminus V(I_f)$, 可知 $fg(x) \in V(I_f)$, 那么 $x-1, x+1 \in V(I_f) (x \notin \{2k, 2k+1\})$, x 与 $V(I_f) \setminus \{x-1, x+1\}$ 中的每一点都是相邻的。而 $2k$ 与 $V(I_f) \setminus \{2k-1\}$ 中的每一点都是相邻的, $2k+1$ 与 $V(I_f) \setminus \{2k+2\}$ 中的每一点都是相邻的。由自同态的定义, 可知 $fg(x) = fg(x-1) = x-1$ 或者 $fg(x) = fg(x+1) = x+1$, $fg(2k) = fg(2k-1) = 2k-1$, $fg(2k+1) = fg(2k+2) = 2k+2$ 。从而可得, $g(x) \in f^{-1}(x-1)$ 或者 $g(x) \in f^{-1}(x+1)$, $g(2k) \in f^{-1}(2k-1)$, $g(2k+1) \in f^{-1}(2k+2)$ 。

如果 S_g 是空集, 由定理 1.3, 可得 $g(1) = g(2) \in f^{-1}(1), \dots, g(2k-1) = g(2k) \in f^{-1}(2k-1)$, $g(2k+1) = g(2k+2) \in f^{-1}(2k+2), \dots, g(2m-1) = g(2m) \in f^{-1}(2m)$ 。可知 I_g 是一个阶数为 m 团, $V(I_g) = \{1, 3, \dots, 2k_0-1, 2k_0+2, \dots, 2m\} (0 \leq k_0 \leq m)$ 。因此, $g(1) = g(2) = f^{-1}(1) \cap V(I_g), \dots, g(2k+1) = g(2k+2) = f^{-1}(2k+2) \cap V(I_g), \dots, g(2m-1) = g(2m) = f^{-1}(2m) \cap V(I_g)$ 。

如果 S_g 是非空的, 且 $2k-1 \in S_g$, 由引理 1.3, 可知 $2k \in S_g, g(2k-1) = f^{-1}(2k-1) \cap A, g(2k) = f^{-1}(2k-1) \setminus A$ 。则存在正整数 $m_0 (0 \leq m_0 \leq k-1), n_0 (0 \leq n_0 \leq m-k)$ 使得 $f^{-1}(2k-1-2m_0) \cap A, f^{-1}(2k-1-2m_0) \setminus A, \dots, f^{-1}(2k-1) \cap A, f^{-1}(2k-1) \setminus A$ 是连续数字, 但是 $f^{-1}(2k-3-2m_0) \cap A, f^{-1}(2k-3-2m_0) \setminus A, f^{-1}(2k-2m_0-1) \cap A, f^{-1}(2k-2m_0-1) \setminus A$ (不计次序)不是连续的;

$f^{-1}(2k+2) \cap A, f^{-1}(2k+2) \setminus A, \dots, f^{-1}(2k+2n_0) \cap A, f^{-1}(2k+2n_0) \setminus A$ 是连续的, 但是 $f^{-1}(2k+2n_0) \cap A, f^{-1}(2k+2n_0) \setminus A, f^{-1}(2k+2n_0+2) \cap A, f^{-1}(2k+2n_0+2) \setminus A$ (不计次序)不是连续的。设

$$a_0 = \min \{f^{-1}(2k-2m_0-1) \cap A, f^{-1}(2k+2n_0) \cap A\}$$

$$b_0 = \max \{f^{-1}(2k-2m_0-1) \setminus A, f^{-1}(2k+2n_0) \setminus A\}.$$

如果 $2k-1 \notin S_g, 2k-3 \in S_g$, 可知 $2k-2 \in S_g$ 。则存在正整数 $m_{2k-3} (0 \leq m_{2k-3} \leq k-2)$ 使得 $f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \cap A, f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \setminus A, \dots, f^{-1}(2k-3) \cap A, f^{-1}(2k-3) \setminus A$ 是连续的, 但是 $f^{-1}(2k-5-2m_{2k-3}) \cap A, f^{-1}(2k-5-2m_{2k-3}) \setminus A, f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \cap A, f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \setminus A$ (不计次序)不是连续的。设 $a_{2k-3} = \min \{f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \cap A, f^{-1}(2k-3) \cap A\}$, $b_{2k-3} = \max \{f^{-1}(2k-3) \setminus A, f^{-1}(2k-3-2m_{2k-3}) \setminus A\}$ 。如果 $2k-1, 2k-3 \notin S_g, 2k-5 \in S_g$, 同理, 依次下

去……如果 $3 \notin S_g, 1 \in S_g$, 可得 $S_g = \{1, 2\}, m_1 = 0$ 。

同理, 如果 $2k-1 \notin S_g, 2k+2 \in S_g$, 那么 $2k+1 \in S_g$ 。则存在正整数 n_{2k+2} ($0 \leq n_{2k+2} \leq m-k-1$) 使得 $f^{-1}(2k+2) \cap A, f^{-1}(2k+2) \setminus A, \dots, f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \cap A, f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \setminus A$ 是连续的, 但是 $f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \cap A, f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \setminus A, f^{-1}(2k+4+2n_{2k+2}) \cap A, f^{-1}(2k+4+2n_{2k+2}) \setminus A$ (不计次序)不是连续的。设 $c_{2k+2} = \min\{f^{-1}(2k+2) \cap A, f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \cap A\}$, $d_{2k+2} = \min\{f^{-1}(2k+2) \setminus A, f^{-1}(2k+2+2n_{2k+2}) \setminus A\}$ 。依次下去……, 直至 $2m-2 \notin S_g, 2m \in S_g$ 。

综上, 根据定理 3, 可得出结论(1)(2)。证毕。

致 谢

本人非常感谢所有提供帮助的老师和同学。

参考文献

- [1] Hou, H., Luo, Y. and Cheng, Z. (2008) The Endomorphism Monoid of \overline{P}_n . *European Journal of Combinatorics*, **29**, 1173-1185. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2007.06.026>
- [2] Gu, R. and Hou, H. (2020) Unicyclic Graphs Whose Completely Regular Endomorphisms Form a Monoid. *Mathematics*, **8**, Article No. 240. <https://doi.org/10.3390/math8020240>
- [3] Hou, H. and Gu, R. (2016) Split Graphs Whose Completely Regular Endomorphisms Form a Monoid. *Ars Combinatoria*, **127**, 79-88.
- [4] Hou, H. and Luo, Y. (2008) Graphs Whose Endomorphism Monoids Are Regular. *Discrete Mathematics*, **208**, 3888-3896. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.094>
- [5] Hou, H., Fan, X. and Luo, Y. (2009) Endomorphism Types of Generalized Polygons. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33**, 433-441.
- [6] Hou, H., Gu, R. and Song, Y. (2019) Endomorphism Spectra of Fan Graphs. *Ars Combinatoria*, **142**, 89-99.
- [7] Hou, H., Gu, R. and Shang, Y. (2014) End-Completely-Regular and End-Inverse Joins of Graphs. *Ars Combinatoria*, **117**, 387-398. <https://doi.org/10.1155/2014/432073>
- [8] Fan, S. (2001) Endomorphism Spectra of Bipartite Graph with Diameter Three and Girth Six. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **25**, 217-221. <https://doi.org/10.1007/s10012-001-0217-8>
- [9] Hou, H., Gu, R. and Song, Y. (2019) Endomorphism Spectra of Fan Graphs. *Ars Combinatoria*, **142**, 89-99.
- [10] Knauer, U. and Nieporte, M. (1989) Endomorphisms of Graphs I, the Monoid of Strong Endomorphisms. *Archiv der Mathematik*, **52**, 607-614. <https://doi.org/10.1007/BF01237575>
- [11] Kelarev, A.V., Ryan, J. and Yearwood, J. (2009) Cayley Graphs as Classifiers for Data Mining: The Influence of Asymmetries. *Discrete Mathematics*, **309**, 5360-5369. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.11.030>
- [12] Klearev, A.V. (2003) Graph Algebras and Automata. Marcel Dekker, New York. <https://doi.org/10.1201/9781482276367>
- [13] Kelarev, A.V. and Praeger, C.E. (2003) On Transitive Cayley Graphs of Groups and Semigroups. *European Journal of Combinatorics*, **24**, 59-72. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(02\)00120-8](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(02)00120-8)
- [14] Kelarev, A.V. (2004) Labelled Cayley Graphs and Minimal Automata. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **30**, 95-101.
- [15] Kelarev, A.V. (2002) Ring Constructions and Applications. World Scientific, River Edge. <https://doi.org/10.1142/4807>
- [16] Li, W. (2005) Various Inverses of a Strong Endomorphism of a Graph. *Discrete Mathematics*, **300**, 245-255. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.01.007>
- [17] Li, W. (1994) A Regular Endomorphism of a Graph and Its Inverses. *Mathematika*, **41**, 189-198. <https://doi.org/10.1112/S0025579300007282>