Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2013, 3, 23-27
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2013.33004 Published Online August 2013 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

The Effect of Pollution and Capture on Biotic Population System

Lijuan Zhang, Yanyan Liu, Yanfang Zhang

Institute of Disaster Prevention, Sanhe
Email: lijuan262658@126.com

Received: Apr. 9th, 2013; revised: Jul. 30th, 2013; accepted: Aug. 12th, 2013

Abstract: Some biological aspects are not only affected by environmental pollution, but also have to meet the need of human being capture. Thus the biotic population problem in the environmental pollution has been taken so much attention. This paper has studied the dynamic model of a class of population living in a polluted environment. Based on the existing results, we have established new model with the effect of population variables on organisms and environmental toxins concentration, and with the nonlinear intrinsic growth rate and the population trapping. We have also obtained the sufficient and necessary conditions for the uniform persistence and extinction of population.

Keywords: Population; Environmental Pollution; Capture; Persistence; Extinction

污染与捕获对种群系统的影响分析

张丽娟，刘艳艳，张艳芳

防灾科技学院， 三河
Email: lijuan262658@126.com

收稿日期：2013 年 4 月 9 日；修回日期：2013 年 7 月 30 日；录用日期：2013 年 8 月 12 日

摘　要：一些生物一方面受环境污染一方面又要满足捕获的需要，从而使得环境污染中种群捕获问题备受关注。本文研究了一类污染环境中种群生存的动力学模型，基于已有结果，考虑内禀增长率为非线性函数和种群满足捕获需求的情形，加入种群变量对生物体内毒素和环境毒素浓度的影响从而建立新模型，并得到种群一致持续生存及灭绝的判别条件。

关键词：种群；环境污染；捕获；持续生存；绝灭

1. 引言

随着工农业的迅速发展，环境问题日益受到人类关注，所有生物种群的生存与发展都离不开其生存的环境，除此之外，人类对生物种群的捕获也会影响生物种群的发展。如何对环境污染进行控制才能既能维护生态平衡又满足捕获需求？很多人已经做了大量的研究，T.G. Hllam 等做了奠基工作。建模中需要考虑种群变量对生物体内毒素浓度及环境毒素浓度的影响。文[1]考虑了一类单种群在环境污染中的生存分析，但未考虑捕获对生物种群的影响。B. Buonomo 等在文[3]中考虑了捕获因素的影响，建立了数学模型进行了分析。文[2]在文[3]的基础上考虑了捕获对种群的影响。本文在前人工作的基础上考虑内禀增长率为非线性函数，这更符合实际情况，非线性函数的引入使得模型变得更加复杂，文[4]中我们采用比较定理进行了讨论。

2. 问题描述

假设生物体种群生存在一个给定的空间，密度均匀且无成员迁入迁出，$x(t)$ 为 t 时刻全体成员数，$z(t)$ 为环境毒素浓度，$c(t)$ 为生物体内毒素浓度，无毒素影响时，生物服从 Logistic 规律，环境污染下毒素对种群的影响采用非线性函数，参考文献[5]形式如下：$r(c)=\frac{r_0-r_1c}{1+c}$，$r_0,r_1$ 都是正的常数，$r(c)<0$ 种群一定灭绝，所以我们考虑 $r(c)>0$ 的情形，即：$c<\frac{r_0}{r_1}$。另 $c=0$，正如不受污染的情形，f 为食饵自身增长的抑制作用，k 为种群吸入毒素浓度系数。建立模型如下：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(\frac{r_0-r_1c(t)}{1+c(t)}-fx(t)\right)-gx(t)\\ \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}=kz-\left(r+m+\frac{r_0}{1+c(t)}-fx(t)-g\right)c(t)\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-kz(t)x(t)+\left(r+\frac{r_1c(t)}{1+c(t)}\right)c(t)x(t)-hz(t)+u(t)\end{cases} \tag{1}$$

满足初始条件 $x(0)=x_0>0,c(0)=c_0>0,z(0)=z_0>0$，$g$ 为对种群的捕获率，k 为种群对环境毒素的吸收率，r 为种群对毒素的排泄率，m 为种群自身对毒素的净化率，h 为环境毒素净化率，$u(t)$ 为 t 时刻外界向环境毒素输入率。

设生物体内毒素的平均浓度有个临界值 $\bar{c}$ ($\bar{c}$ 为常数)，当生物体内毒素大于这个值时生物体将死亡，故 $c(t)\le\bar{c}$，$\forall t\in R^+$。本文假设外界向环境的毒素输入率为一常数，即 $u(t)=Q$，分析模型。

定义 1：种群 $x(t)$ 一致持续生存，若 $\exists\delta>0,M>0,$ 使得

$0<\delta\le\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\le\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\le M$ 成立。

定义 2：种群 $x(t)$ 走向灭绝，若 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

记号：$M_n=\frac{r_0-g}{f}$，$M_c=\frac{kM_z}{r+m-g-fM_n}$，$\bar{M}_n=\frac{r_0-r_1m_c}{f(1+m_c)}-\frac{g}{f}$

$$M_z=\frac{(g+r_1)r+r_1(r_0-g)}{(g+r_1)}\frac{(r_0-g)M_n}{(g+r_1)h}+\frac{Q}{h}$$

$$Q^*=\frac{hr_1(r+m-r_0)(g+r_1)(r_0-g)-\left[(g+r_1)r+r_1(r_0-g)\right](r_0-g)^2r_1k}{r_1k(g+r_1)^2}$$

$$m_z=\frac{Q}{h+kM_n},\quad m_c=\frac{km_z}{r+m+r_0},\quad Q^*(g)=\frac{(r_0-g)(r+m+r_0)(hf+kr_0-kg)}{fk(g-r_1)}$$

3. 模型分析

显然系统(1)满足初始条件的解在 R^+ 上存在且唯一。

引理 1：若 $x_0>0,c_0>0,z_0>0$，则 $x(t)>0,c(t)>0,z(t)>0,\forall t\in R^+$。

证明：由于 $x(t)=0$ 是系统的解，由解的唯一性有 $x(t)>0,\forall t\in R^+$，又 $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\Big|_{c=0,z=0}=kz>0$，

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{z=0,c>0,x>0}=\left(1+\frac{r_1c}{1+c}\right)cx+u(t)>0$，所以系统的轨线不能穿越任何表面，即有：

$x(t)>0, c(t)>0, z(t)>0, \forall t\in R^{+}$。

定理 1：当 $Q<Q^{*}$ 时，种群将一致持续生存。

证明：由(1)中的第一个方程，$\forall t>0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<x(r_0-fx-g):=F(n)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(\frac{r_0}{1+c}-\frac{r_1c}{1+c}-fx\right)-gx:=f(n,c) \qquad (E_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(n) \qquad (E_2)$$

设(E_1)，(E_2)对应相同初始值的解分别为：$x=x(t), X=X(t)$ 由比较原理知：$\forall t>0, x(t)<X(t)$，易知：$\limsup_{t\to+\infty}x(t)\le\lim_{t\to+\infty}X(t)=M_n=\frac{r_0-g}{f}$ 即：$\forall\varepsilon>0,\exists T_1,\forall t>T_1$ 有：$x(t)<M_n+\varepsilon$，由已知得：$c(t)<\frac{r_0-g}{g+r_1},\forall t\in R$

上述结果代入(1)中第三个方程，得当 $t>T_1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}<\left(r+r_1\frac{r_0-g}{g+r_1}\right)\cdot\left(\frac{r_0-g}{g+r_1}\right)\cdot(M_n+\varepsilon)-hz+u(t)$$

当 $t>T_1$ 时，令 $\varepsilon\to0$，由比较原理得：

$$\limsup_{t\to+\infty}z(t)\le\left[\left(r+\frac{r_1(r_0-g)}{g+r_1}\right)\frac{r_0-g}{g+r_1}(M_n+\varepsilon)+Q\right]\Big/h$$

$$\limsup_{t\to+\infty}z(t)\le M_z,\quad M_z=\frac{(g+r_1)r+r_1(r_0-g)}{(g+r_1)}\frac{(r_0-g)M_n}{(g+r_1)h}+\frac{Q}{h}$$

则对 $\forall\varepsilon>0,\exists T_2>T_1$，则使得 $\forall t>T_2, z(t)<M_z+\varepsilon,$ 由(1)中第二个方程，当 $t>T_2$ 时

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}<k(M_z+\varepsilon)-\left[r+m-g-f(M_n+\varepsilon)\right]c$$

由比较原理，有 $\limsup_{t\to+\infty}c(t)\le\frac{k(M_z+\varepsilon)}{r+m-g-f(M_n+\varepsilon)}$，令 $\varepsilon\to0$，此时有

$$\limsup_{t\to+\infty}c(t)\le\frac{kM_z}{r+m-g-fM_n}=M_c$$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists T_3>T_2, t>T_3$ 时，$c(t)<M_c+\varepsilon$，由(1)中第一个方程可得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>x\left(\frac{r_0-r_1c}{1+\frac{r_0-g}{g+r_1}}-fx-g\right)>x\left[\frac{\left[r_0-r_1(M_c+\varepsilon)\right](g+r_1)}{r_1+r_0}-fx-g\right]$$

由比较原理得：$\liminf_{t\to+\infty}x(t)\ge\frac{(g+r_1)\left[r_0-r_1(M_c+\varepsilon)\right]}{(r_1+r_0)f}-\frac{g}{f}$，令 $\varepsilon\to0$ 有

$$\liminf_{t\to+\infty}x(t)\ge\frac{(g+r_1)\left[r_0-r_1M_c\right]}{(r_1+r_0)f}-\frac{g}{f}=m_n$$

$m_n>0,$ 即：$Q<Q^{*}$ 时种群将一致持续生存。

定理 2：当 $g<r_0+\frac{h}{k}f$，$Q>Q^{*}(g)$ 时，或 $g>r_0+\frac{h}{k}f$ 种群将走向灭绝。

证明：由(1)中第三个方程，$t > T_1$ 时，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} > Q - k(M_n + \varepsilon)z - hz$ 由比较原理有：

$$\liminf_{t\to+\infty} z(t) \ge \frac{Q}{h + k(M_n + \varepsilon)}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 有 $\liminf_{t\to+\infty} z(t) \ge \frac{Q}{h + kM_n} = m_z$

则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M_1 > T_1$, 使 $\forall t > M_1$，有 $z(t) > m_z - \varepsilon$，由(1)中第二个方程得当 $t > M_1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} > k(m_z - \varepsilon) - (r + m + r_0)c$$

由比较原理 $\liminf_{t\to+\infty} c(t) \ge \frac{k(m_z - \varepsilon)}{r + m + r_0}$，$\varepsilon \to 0$ 有 $\liminf_{t\to+\infty} c(t) \ge \frac{km_z}{r + m + r_0} = m_c$

则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M_2 > M_1$, 使得 $\forall t > M_2$ 有 $c(t) > m_c - \varepsilon$，由(1)中的第一个方程，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < x\left[\frac{r_0 - r_1(m_c - \varepsilon)}{1 + (m_c - \varepsilon)} - fx - g\right]$$

由比较原理得：$\limsup_{t\to+\infty} x(t) \le \frac{r_0 - r_1(m_c - \varepsilon)}{f(1 + m_c - \varepsilon)} - \frac{g}{f}$，$\varepsilon \to 0$ 有：$\limsup_{t\to+\infty} x(t) \le \bar{M}_n$，

令 $M_n^+ = \{M_n, \bar{M}_n\}$

当 $g < r_0 + \frac{h}{k} f$ 时，$M_n^+ = \bar{M}_n$，当 $M_n^+ < 0$ 即：$Q > Q_*(g)$ 种群绝灭。$g > r_0 + \frac{h}{k} f$ 时，$M_n^+ = M_n$，此时一定有 $M_n < 0$ 种群一定走向灭绝。

4. 数值模拟

为了更加清楚的观测结论的正确性，我们用计算机模拟的办法来观察结果，采用参数值：$r_0 = 0.1$，$r = 0.1$，$r_1 = 0.5$，$k = 0.3$，$f = 0.01$，$c = 0.01$，$u = 0.01$，$g = 0.01$，$m = 0.1$，$h = 0.2$，此时满足 $Q < Q^*$，得变量变化如图 1：

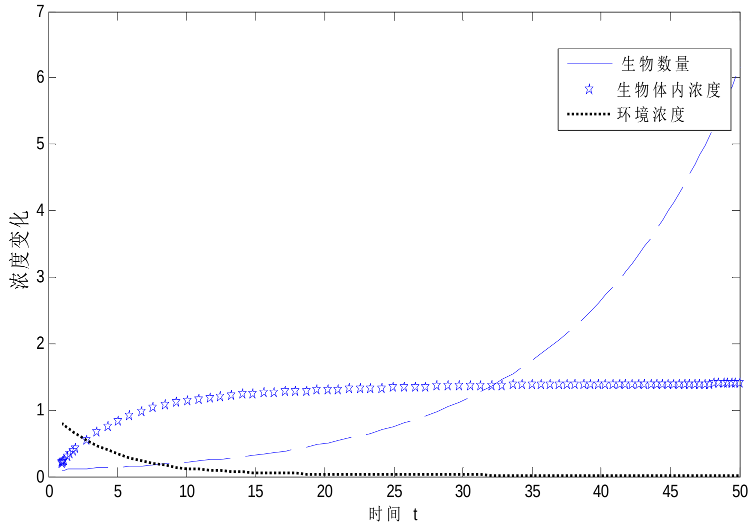

Figure 1. Simulation of the population persistence
图 1. 种群持续生存模拟图

从图中可以看到种群持续生存，从而从数值模拟的角度对理论进行了验证。

5. 结论：

综合上述两个定理，我们得到了似的种群生存与绝灭的参数关系，给出了两个控制参数 Q，g 的关系式。本文中的控制函数 Q 可以是有界连续函数，证明过程与上述类似。因此就 Q 而言本文中模型可以推广到连续有界函数类。

参考文献 (References)

[1] 燕雪飞, 殷红等. 污染环境中但种群生存分析[J]. 生物数学学报, 2009, 24(1): 87-92.

[2] 冯由玲, 王克, 孙静懿. 具污染和捕获的 Logistic 单种群持续生存与绝灭[J]. 生物数学学报, 2006, 21(3): 365-369.

[3] B. Bnonomo, A. D. Liddo and I. A. Sgura. Diffusive-convective model for the dynamics of population-toxocant intentions: Some analytical and numerical result. Mathematical Biographies, 1999, 157(1): 37-64.

[4] 马知恩. 种群生态学的建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996: 168-189.

[5] Z. Li, Z. S. Shuai and K. Wang. Persistence and exitiction of single population in a polluted environment. Electronic Journal of Differential Equation, 2004, 8: 1-5.

