Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2016, 6(1), 10-14
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.61002

A Note on s2-Convex Functions

Yaowen Li[1], Yiyun Zhang[2]

[1]Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing Jiangsu
[2]Department of Applied Foreign Language Studies, Nanjing University, Nanjing Jiangsu
Email: lieyauvn@263.net

Received: Jan. 26th, 2016; accepted: Feb. 13th, 2016; published: Feb. 18th, 2016

Abstract

In this paper we study the s-Convex Functions of the second type. We show that a master theorem holds for the s-Convex Functions, and we then apply it to obtain Ky-Fan type inequalities and Milne type inequalities.

Keywords

Convex Functions, S-Convex Functions of the Second Type, Master Theorem, Milne Type Inequalities, Ky-Fan Type Inequalities

关于第二类s-凸函数的注记

李耀文[1]，张沂昀[2]

[1]南京大学数学系，江苏 南京
[2]南京大学大学外语部，江苏 南京
Email: lieyauvn@263.net

收稿日期：2016年1月26日；录用日期：2016年2月13日；发布日期：2016年2月18日

摘　要

本文中，我们研究了第二类s-凸函数，把凸函数的子母定理推广到s-凸函数的相应形式，由此证明了Ky-Fan型不等式，Milne型不等式。

文章引用：李耀文，张沂昀. 关于第二类 s-凸函数的注记[J]. 运筹与模糊学, 2016, 6(1): 10-14.
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2016.61002

关键词

凸函数，第二类s-凸函数，子母定理，Milne型不等式，Ky-Fan型不等式

1. 引言

在文献[1]中，H. Hudzik 与 L. Maligranda 考察了以下的一类函数：

定义：固定某个 $s\in(0,1]$，对于 $\forall u,v\ge 0,\alpha,\beta\ge 0,\alpha+\beta=1$，如果函数 $f:R_+\to R$ 满足：

$$f(\alpha u+\beta v)\le \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

那么称如果函数 f 为第二类 s-凸函数，记为 $f\in K_S^2$。以下简称 s-凸函数。

关于 s-凸函数，我们有如下一些性质：(参见文献[2]、[3])

(1) 若 $0<s<1$，函数 f 为 s-凸函数，则函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上非负。

(2) 若 f 是单调非减的 s-凸函数，g 是 $[0,+\infty)$ 上非负的凸函数，则复合函数 $f(g(x))$ 也是 s-凸函数。

(3) 若 f 是 φ-函数及 s-凸函数，g 是 $[0,+\infty)$ 上的 φ-函数及凸函数，则复合函数 $f(g(x))$ 也是 s-凸函数。特别地，$g(x)^s$ 是 s-凸函数。这里一个函数 h 被称为 φ-函数是指函数 $h:R_+\to R_+$、连续、单调非减，并且 $h(0)=0$。

(4) 假设函数 $f:R_+\to R_+$ 是 s-凸函数，$0<s<1$, $0<a<b$，f 在 $[a,b]$ 上可积，那么如下 Hermite-Hadamard 型不等式成立：

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

显然正的凸函数是 s-凸函数；x^s 是 s-凸函数；由性质(2)、(3)可以从已知的 s-凸函数得到新的 s-凸函数。另外 Dragomir 和 Pearce(见[2]，pp. 288-292 中的定理 190、191)还证明了所谓的 F-映射与 H-映射都保持 s-凸性质，由此派生出一些 s-凸函数，但是关于 s-凸函数非平凡的例子所知不多，我们甚至不知道简单的形如 $x^s g(x)$ 的 s-凸函数。如何给出新例子，是值得研究的问题。另外 s-凸函数在概率论的研究中也有重要应用。

另一方面，我们有如下的关于凸函数的子母定理：

定理 A(见[3] [4])：假设 $g:R_+\to R$ 是严格凸函数，并且 $f:R_+^2\to R$ 由 $f(x,y)=y\cdot g\left(\frac{x}{y}\right)$ 所定义，那么对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，不等式 $\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\ge f\left(\sum_{i=1}^n x_i,\sum_{i=1}^n y_i\right)$ 成立，且其中等式成立当且仅当序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 成比例。

定理 B(见[4])：假设 $g:R_+^{d-1}\to R,(d\ge 2)$ 是严格凸函数，并且 $f:R_+^d\to R$ 由 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)=x_d\cdot g\left(\frac{x_1}{x_d},\frac{x_2}{x_d},\cdots,\frac{x_{d-1}}{x_d}\right)$ 所定义，那么对任意正实数构成的矩阵 $Z=(z_{i,j})_{n\times d}$，不等式 $\sum_{i=1}^n f(z_{i,1},z_{i,2},\cdots,z_{i,d})\ge f\left(\sum_{i=1}^n z_{i,1},\sum_{i=1}^n z_{i,2},\cdots,\sum_{i=1}^n z_{i,d}\right)$ 成立，且其中等式成立当且仅当矩阵 $Z=(z_{i,j})_{n\times d}$ 的秩为 1。

对于凹函数，以上两个定理中的结论反向。

我们将给出关于 s-凸函数类似的子母定理，并由此证明了 Ky-Fan 型不等式，Milne 型不等式。

2. 关于 s-凸函数的子母定理

定理 2：假设 $0<a<b$，函数 $g:[a,b]\to R_+$ 是 s-凸函数，如果 $f:R_+^2\to R$ 由 $f(x,y)=y^s\cdot g\left(\frac{x}{y}\right)$ 所定

义，那么对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，不等式 $\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\ge f\left(\sum_{i=1}^n x_i,\sum_{i=1}^n y_i\right)$ 成立。

证明：只需对 n=2 情形证明。由于 g 是 s-凸函数，我们有

$$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)=y_1^s g\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+y_2^s g\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$$

$$=(y_1+y_2)^s\left(\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^s g\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+\left(\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^s g\left(\frac{x_2}{y_2}\right)\right)$$

$$\ge(y_1+y_2)^s g\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\cdot\frac{x_1}{y_1}+\frac{y_2}{y_1+y_2}\cdot\frac{x_2}{y_2}\right)=f(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

所以定理成立。

与凸函数情形不同，在 s-凸函数的子母定理中，等式成立一般不能得出两组正实数成比例。

类似地，我们定义多元函数 $f:R_+^d\to R_+,(d\ge 2)$ 是 s-凸函数，如果对某个固定 $s\in(0,1]$，不等式

$$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\le\alpha^s f(\vec{u})+\beta^s f(\vec{v})$$

对于 $\forall\vec{u},\vec{v}\in R_+^d,\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$ 都成立。当 $s=1$ 时，s-凸函数就是通常意义下的正值凸函数。对正值凸函数有

$$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\le\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})\le\alpha^s f(\vec{u})+\beta^s f(\vec{v})$$

在 $0<s<1$ 时成立，所以多元函数正值凸函数都是 s-凸函数，但是反之未必对，正值凹函数也有可能是 s-凸函数。我们知道多元函数为凸函数当且仅当它的 Hesse 矩阵是正定的，某函数的 Hesse 矩阵正定可以推论函数 s-凸。类似于一元情形，容易证明多元函数的子母定理。

定理 3：假设 $g:R_+^{d-1}\to R^+,(d\ge 2)$ 是 s-凸函数，$f:R_+^d\to R^+$ 由 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)=x_d^s\cdot g\left(\frac{x_1}{x_d},\frac{x_2}{x_d},\cdots,\frac{x_{d-1}}{x_d}\right)$ 所定义，那么对任意正实数构成的矩阵 $Z=(z_{i,j})_{n\times d}$，成立以下不等式：

$$\sum_{i=1}^n f(z_{i,1},z_{i,2},\cdots,z_{i,d})\ge f\left(\sum_{i=1}^n z_{i,1},\sum_{i=1}^n z_{i,2},\cdots,\sum_{i=1}^n z_{i,d}\right)。$$

3. 定理的应用

定理 4：对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，在 $0<s<1$ 时以下不等式都成立：

(1) Ky-Fan 型不等式：$\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_iy_i}{y_i-x_i}\right)^s\ge\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i-\sum_{i=1}^n x_i}\right)^s$，这里已假设 $\forall i,x_i<y_i$。

(2) Cauchy-Schwarz 不等式：$\sum_{i=1}^n x_i\cdot\sum_{i=1}^n y_i\ge\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{s+1}}y_i^{\frac{1}{s+1}}\right)^{s+1}$。

(3) 对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，$\forall k\in(0,2)$ 成立如下 Milne 型不等式：

$$\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n y_i\sum_{i=1}^n z_i\ge\sum_{i=1}^n(x_i+y_i+kz_i)\sum_{i=1}^n\frac{y_iz_i+z_ix_i+kx_iy_i}{x_i+y_i+kz_i}\sum_{i=1}^n\frac{x_iy_iz_i}{y_iz_i+z_ix_i+kx_iy_i}。$$

(4) 对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，成立如下 Milne 型不等式：

$$\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n y_i\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^{-2s-1}\ge\sum_{i=1}^n(x_i+y_i+z_i)\left(\sum_{i=1}^n z_i^{s+1}\frac{x_i+y_i+z_i}{y_iz_i+z_ix_i+x_iy_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n z_i^{s+1}\frac{y_iz_i+z_ix_i+x_iy_i}{x_iy_iz_i}\right)^{-1}。$$

证明：

(1) 由于 $\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}>0$，$\left(\frac{x}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}>0$，当 $x\in(0,1)$，$g(x):=\frac{x}{1-x}$ 是凸函数，显然也是 φ-函数，由性质(3)可知 $\left(\frac{x}{1-x}\right)^s$ 是 s-凸函数。由定理 2，$f(x,y)=y^s\left(\frac{x/y}{1-x/y}\right)^s=\left(\frac{xy}{y-x}\right)^s$ 即满足 Ky-Fan 型不等式。注：经典的 Ky-Fan 不等式是这里的不等式一个特殊情况。

(2) 由于 $\left(\frac{1}{x}\right)''=\frac{2}{x^3}>0$，$g(x):=\frac{1}{x}$ 是凸函数，所以也是 s-凸函数。由定理 2，$f(x,w)=w^s\cdot\left(\frac{w}{x}\right)=\frac{w^{s+1}}{x}$ 即满足次线性不等式：$\sum\frac{w_i^{s+1}}{x_i}\ge\left(\sum w_i\right)^{s+1}\Big/\sum x_i$，我们令 $y_i=\frac{w_i^{s+1}}{x_i}$，此式化为 Cauchy-Schwarz 不等式。注：这里的不等式是一个已知的结果。

(3) 由于对于 $\forall k\in(0,2)$，我们可以计算二元函数 $g_1(x,y):=\frac{kxy+x+y}{k+x+y}$ 的 Hesse 矩阵

$=k(k+x+y)^{-3}\begin{pmatrix}-2\left(y^2+ky+1\right) & 2xy+kx+ky+k^2-2\\ 2xy+kx+ky+k^2-2 & -2\left(x^2+kx+1\right)\end{pmatrix}$，其行列式 $=k^4(x+y+k)^{-4}\left(4-k^2\right)>0$，矩阵是负定的，所以函数是严格凹函数。由定理 B，对应的函数 $f_1(x,y,z):=zg_1\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=\frac{yz+zx+kxy}{x+y+kz}$ 满足超线性不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_iz_i+z_ix_i+kx_iy_i}{x_i+y_i+kz_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}x_i+k\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i+kz_i\right)}.$$

又由于 $g_2(x,y):=\frac{xy}{kxy+x+y}$ 的 Hesse 矩阵 $=(kxy+x+y)^{-3}\begin{pmatrix}-2y^2(ky+1) & 2xy\\ 2xy & -2x^2(kx+1)\end{pmatrix}$ 对于 $\forall k\in(0,2)$ 易见是负定的，所以函数是严格凹函数。由定理 B，对应的函数 $f_2(x,y,z):=zg_2\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=\frac{xyz}{yz+zx+kxy}$ 满足超线性不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_iz_i}{y_iz_i+z_ix_i+kx_iy_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}z_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}x_i+k\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

将上述两个不等式相乘即证得结论。由定理 B，对应的等式成立时，对应的三组正数 $\{x_i\},\{y_i\},\{z_i\}$ 成比例。

注：当 k=1 时，这里的不等式就是文献[4]中的 Milne 不等式。

(4) 由于 $g_1(x,y):=\frac{xy+x+y}{xy}$ 的 Hesse 矩阵显然是正定的，所以是严格凸函数，也是 s-凸函数。由定理 3，对应的函数 $f_1(x,y,z):=z^sg_1\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=z^s\frac{yz+zx+xy}{xy}$ 满足次线性不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}z_i^{s+1}\cdot\frac{y_iz_i+z_ix_i+x_iy_i}{x_iy_iz_i}\ge\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^s\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

又由于 $g_2(x,y):=\frac{1+x+y}{xy+x+y}$ 的 Hesse 矩阵 $=(xy+x+y)^{-3}\begin{pmatrix}2y^3+4y^3+4y+2 & x+y-xy+2\\ x+y-xy+2 & 2y^3+4y^3+4y+2\end{pmatrix}$ 易

见它是正定的，所以此函数也是s-凸函数。由定理3，对应的函数 $f_2(x,y,z):=z^s g_2\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=z^{s+1}\frac{x+y+z}{yz+zx+xy}$ 满足次线性不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{s+1}\cdot\frac{x_i+y_i+z_i}{y_iz_i+z_ix_i+x_iy_i}\geq\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^{s+1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i+z_i)}{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}z_i\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}.$$

将上述两个次线性不等式相乘即证得。

致　谢

本文第一作者受国家自然科学基金 No-11071112 部分资助，以及受南京大学匡亚明学院教改项目部分资助，以及受中央高校基本科研业务费专项资金资助。第二作者受南京大学翻转课堂项目部分资助，特此致谢。另外，作者对审稿人有益的建议表示感谢。

参考文献 (References)

[1] Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994) Some Remarks on S-Convex Functions. *Aequationes Mathematicae*, **48**, 100-111. http://dx.doi.org/10.1007/BF01837981

[2] Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. (2001) Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. http://rgmir.vu.edu.au/SSDragomirWeb.html

[3] Godunova, E.K. (1967) Convexity of Complex Functions and Its Use in Proving Inequalities (in Russian). Matematicheskie Zametiki, Vol. 1, 495-500. (English Translation: Mathematical Notes, Vol. 1, 326-329). http://dx.doi.org/10.1007/BF01095554

[4] Woeginger, G.J. (2009) When Cauchy and Holder Met Minkowski: A Tour through Well-Known Inequalities. *Mathematics Magazine*, **82**, 202-207. http://dx.doi.org/10.4169/193009809X468814