Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2018, 8(2), 45-53
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2018.82006

Online List Colouring of Graphs with Crossing Number

Jianzhang Hu

Department of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 17855868690@163.com

Received: Mar. 28th, 2018; accepted: Apr. 13th, 2018; published: Apr. 20th, 2018

Abstract

The concept of online list colouring was introduced in 2009 by U. Schauz [1] and independently by X. Zhu [2]. Since the concept of online list colouring is put forward, many scholars have studied the online list colouring of the related graphs. For example, U. Schauz [1] has proved that each planar graph is online 5-paintable; M. Han and X. Zhu [3] have proved that locally planar graphs are 5-paintable; M. Han and X. Zhu [4] have proved that every planar graph is 1-defective (9,2)-paintable, etc. In this paper we prove that G is 5-paintable with crossing number at most one.

Keywords

List Colouring, Online List Colouring, Crossings Number, Independent Set

含有交叉数的图的在线列表染色

胡建章

浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江 金华
Email: 17855868690@163.com

收稿日期：2018年3月28日；录用日期：2018年4月13日；发布日期：2018年4月20日

摘 要

在线列表染色概念是由U. Schauz [1]和X. Zhu [2]于2009年分别提出。在线列表染色概念提出以来，不少学者研究了相关图的在线列表染色。例如，U. Schauz [1]证明了平面图是在线5-可选的，M. Han和X. Zhu [3]证明了局部平面图是在线5-可选的，M. Han和X. Zhu [4]证明了每个平面图是1-缺陷在线(9,2)可选的，等相关性成果。在本文中我们证明了含有至多一个交叉的图是在线5-可选的。

文章引用：胡建章. 含有交叉数的图的在线列表染色[J]. 运筹与模糊学, 2018, 8(2): 45-53.
DOI: 10.12677/orf.2018.82006

关键词

列表染色，在线列表染色，交叉数，独立集

1. 引言

本文中所考虑的图都是简单图，即没有环和重边。我们分别用$V(G)$和G表示图G的点集和边集。两条边交叉指的是当图G嵌入到平面中时两条边相交不在端点处。当图G嵌入到平面中且每条边至多被相交一次，则我们称是图G的一个好的嵌入。我们用$cr(G)$表示图G的一个好的嵌入中的交叉次数。

对于一个图G，给图G的每一个顶点v指定一个颜色列表$L(v)$。称φ是G的一个L-点染色，是指对每一个点$v\in V(G)$，都存在一个颜色$\varphi(v)\in L(v)$，使得若$xy\in E(G)$，则$\varphi(x)\neq\varphi(y)$。也称G是L-点可染的。若对任意指定的颜色列表L，使得对每一个$v\in V(G)$有$|L(v)|\geq k$，G都存在一个L-点染色，则称G是k-列表点可染的，或称G是k-点可选的。G的列表色数或选择数定义为最小的整数k，使得G是k-点可选的，用$\chi_l(G)$表示。图G的列表染色概念是1970年由Vizing [5]提出，同时由Erdős，Rubin和Taylor [6]独立提出。

定义 1： 设f是$V(G)$到N上的一个映射。图G上的f列表染色游戏定义如下：

1) 该游戏有两位玩家 Lister 和 Painter；

2) 起始时刻，G中的所有点都未染色且任意顶点v有$f(v)$个筹码；

3) 在任意一个回合 Lister 选取图G中未染色顶点集的一个非空子集M，M中的每一个顶点减少一个筹码。Painter 从M中选取一个独立集I，I中的顶点被染色；

4) 若某一个回合后，有一个未染色的顶点v没有筹码，则 Lister 赢得比赛。若某一回合后，所有顶点都染色了，则 Painter 赢得比赛。

定义 2： 对于图G上的f在线列表染色游戏，若 Painter 有一个赢得策略，则称G是在线f可选的。若对于$f(v)\equiv k$且G是在线f可选的，则称G是在线k可选的。G的在线列表色数或选择数定义为最小的整数k，使得G是在线k-可选的，用$\chi_p(G)$表示。

在线列表染色概念是由 U. Schauz [1]和 X. Zhu [2]于 2009 年分别提出。由列表染色和在线列表染色定义，我们可得出$\chi_l(G)\leq\chi_p(G)$，即G的在线列表染色结果比G的列表染色结果要强。但是有时候他们是相等的，例如 U. Schauz [1]在文章中证明了平面图是在线 5-可选的。对于在线列表染色，文献[3] [4] [7]-[11]等给出了一些结果。

2. 主要引理

为了证明平面图是在线 5-可选的，Uwe Schauz [1]证明了一下这个更强的结果：

引理 1： 令 G 是一个平面图，F是G的一个面并且$e=xy$是F上的一条边。对于f是$V(G)$到N的一个映射且使得：

- 对于$v\in V(G)-V(F)$，$f(v)\geq5$，
- 对于$v\in V(F)-\{x,y\}$，$f(v)\geq3$，
- $f(x)=1$和$f(y)=1$，则$G-e$是在线f-可选的。

假设点 v 是 G 某的个子图 H 中的点且在第 i 步中被 Lister 选中，但这并不意味着 Painter 在选出相应独立集时 I 被选中。这是因为可能当我们在图 H 中考虑点 v 时，v 被看作一个未被选中的点。这个情况发生是因为 v 有一个邻点 u 在另一个子图 H 中被 Painter 选中，这样我们说 v 因为 u 丢掉一个筹码。设 $S \subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示由 S 诱导出的子图。由引理 1 我们可得出一个重要的观察结论。

观察 1：令 G 是一个图。f 是 $V(G)$ 到 N 的一个映射。令 $G' = G - S$，并且对于任意 $v \in V(G')$ 满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$。如果 $G[S]$ 是在线 f-可选的并且 (G', f') 满足引理 3.1 的条件，那么 G 是在线 f-可选的。

证明：假设在第 i 步，玩家 Lister 选出一个未染顶点集 L_i。Painter 需要从 L_i 中选出一个相应的独立集 I_i，对于独立集 I_i 的选择需要一些步骤才能完成。Painter 按照以下步骤先后考虑 L_i 中的点：

1) Painter 从 $V(S) \cap L_i$ 中选出一个独立集 I_S。

2) Painter 从 $V(G') \cap (L_i - I_S)$ 中选出一个独立集 $I_{G'}$。

以上两步骤选出的独立集 $I_S \cup I_{G'}$，即 Painter 所对应选出的独立集 I_i。接下来我们需要说明按照以上策略是玩家 Painter 在 G 的 f-在线游戏中的一个赢得策略。我们说对于任意 $v \in V(G)$，v 有足够的筹码可用。这是因为如果 $v \in S$，那么因为 $G[S]$ 是在线 f-可选的，从而 Painter 在 $G[S]$ 中有一个赢得策略，所以点 v 有足够的筹码可用。如果 $v \in V(G')$，那么因为 (G', f') 都满足引理 3.1 的条件，从而 Painter 在图 G' 中有一个赢得策略，所以点 v 有足够的筹码可用。因此以上策略是玩家 Painter 的一个赢得策略，G 是在线 f-可选的。

根据引理 1 和观察 1，我们可以证出下面这个定理。

定理 1：若图 G 满足 $cr(G) = 1$，那么 G 是在线 5-选的。

证明：假设 G 满足 $cr(G) = 1$。令边 $e = xx'$ 和 $e' = yy'$ 相互交叉。这样我们令 $S = \{x, y\}$，以及 $G' = G - S$，并且 $f': V(G') \to N$ 满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$。我们可以很容易验证出 $G[S]$ 是在线 5-可选的，以及 (G', f') 满足引理 1 的条件。因此根据观察 1，我们得出 G 是在线 5-选的。

在研究含有交叉图的在线染色的过程中，我们发现了一个重要的定理。

定理 2：令 G 是一个满足 $cr(G) \le 1$ 的图，$T = t_1t_2t_3$ 为 G 中的一个三角形。若 f 是 $V(G)$ 到 N 的一个映射且使得对于 $v \in V(T)$ 满足 $f(v) = 1$，对于 $v \in V(G) - V(T)$ 满足 $f(v) = 5$，那么 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的。

3. 极小反例的性质

假设定理 3 是不正确的和 G 是定理 3 的反例且满足：

1) $|V(G)|$ 是最小的；

2) 在满足(1)的前提下，$|E(G)|$ 是最大的。

假设 G 是一个连通图，因为否则我们可以考虑 G 的每一个连通分支且根据 G 的极小性，我们得出每一个连通分支是在线 f-可选的，因此 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的。对于所有 $v \in V(G) - V(T)$ 有 $d_G(v) \ge 5$。如果存在 v 有 $d_G(v) = 4$，那么根据 G 的极小性 $(G - \{v\}) - E(T)$ 是在线 f-可选的，由于 $f(v) > d(v)$，所以 $G - E(T)$ 也是在线 f-可选的。

引理 2：$cr(G) = 1$。

证明：假设 $cr(G) = 0$，则 G 是平面图。令 $S = t_1$，我们容易得出 $G[S]$ 是在线 f-可选的。令 $G' = G - S$ 以及 f' 是 $V(G')$ 到 N 上的一个映射且满足。由于对于任意 $v \in V(G')$ 在 S 中至多一个邻点，因此 (G', f') 满足引理的条件。根据观察 1，我们得出 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

引理 3：如果 $e = xy$ 是一条交叉边，那么 $e \notin E(T)$。

证明：假设这个引理不正确，那么我们不妨设 $e = t_1t_2$ 并且被令一条边 $e' = x'y'$ 交叉。根据对称性，我们假设 $x \neq t_3$ 和 x 落在 T 的内部。令 G_1 是由 T 的外部以及 T 上的点所得到的 G 的一个诱导子图。根据 G 的极小性，我们有 $G_1 - E(T)$ 是在线 f-可选的。令 $S = V(G_1) - \{t_2, t_3\}$ 且 $G[S]$ 是在线 f-可选的。令 $G' = G - S$ 以及 f' 是 $V(G')$ 到 N 的一个映射且满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$。由于对于任意 $v \in V(G')$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G', f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

为了方便后面的证明，我们把交叉边和 T 都称作是坏的构型。

引理 4：G 没有分离 3-圈。

证明：假设 G 存在一个分离三圈 $C = xyz$ 且令 $G^* = \mathrm{int}[C]$。

如果两个坏的构型都在 G^* 内，那么根据 G 的极小性，我们有 $G^* - E(T)$ 是在线 f-可选的。令 $S = G^* - \{x, y\}$ 且 $G[S]$ 是在线 f-可选的。令 $G' = G - S$ 以及 f' 是 $V(G)$ 到 N 的一个映射满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$ 以及 $f'(x) = 1$，$f'(y) = 1$。由于对于任意 $v \in V(G')$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G', f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

如果只有一个坏的构型在 G^* 内，那么根据对称性我们假设 T 在 G^* 内。根据 G 的极小性，我们有 $G^* - E(T)$ 是在线 f-可选的。令 $G' = G - \mathrm{int}[C]$。根据 G 的极小性，我们有 $G' - E(C)$ 是在线 f-可选的，因为 C 在 G' 中充当着 T 的角色。因此 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的。

引理 5：设 C 是 G 的一个分离圈。如果坏的构型都在 C 的一侧，那么 $l(C) \geq 5$。

证明：假设 G 中存在一个分离 4-圈 $C = v_1v_2v_3v_4$。令 $G^* = \mathrm{int}[C]$ 且坏的构型都在 G^* 内。根据 G 的极小性，我们有 $G^* - E(T)$ 是在线 f-可选的。令 $S = V(G^*) - \{v_1, v_2\}$，从而 $G[S]$ 是在线 f-可选的。令 $G' = G - S$，以及 f' 是 $V(G')$ 到 N 上的一个映射满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$ 且 $f'(v_1) = 1$，$f'(v_2) = 1$。由于对于任意 $v \in V(G')$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G', f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

令 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，且边 $e = x_1x_3$ 和 $e' = x_2x_4$ 相互交叉。因为我们假设 G 的边数尽可能的多，所以我们可假设 $G[X]$ 是一个完全图。

引理 6：令 $e = uv \in E(G[X])$。如果 e 是交叉边，那么不存在 $x \in G - X$ 使得 x 与 u 和 v 相邻。

证明：假设存在点 $w \in G - X$ 使得 w 与 u，v 相邻。令 X 上按顺时针方向的点为 x, u, y, v。那么 $xuwv$ 和 $yuwv$ 之间，由对称性我们假设坏的构型在 $yuwv$ 的一侧。根据引理 5 我们有 $yuwv$ 不是一个分离圈。这样我们得出 $d_G(y) \leq 4$，从而产生矛盾。

引理 7：如果 C 是 G 的一个分离 4-圈，那么 $|V(C) \cap X| \leq 1$。

证明：令 C 是 G 的一个分离 4-圈并且 $V(C) \cap X = \{u, v\}$。根据引理 5 以及 T 和 X 之间的对称性，我们假设 T 在 $G' = \mathrm{int}[C]$ 内以及 X 在 $G'' = ext[C]$ 内。根据 G 的极小性，我们有 $G' - E(T)$ 是在线 f-可选的。因为 $G[X]$ 是一个完全图，所以 uv 是 G 中的边。根据引理 6，我们有 uv 不是交叉边并且 $uv \in E(C)$。根据引理 4，从而 C 在 G'' 中是一个诱导子图。我们假设 $C = uvxy$，令 $V(G') - \{x, y\}$ 以及令 $G_1 = G - S$。以及 f' 是 $V(G_1)$ 到 N 上的一个映射满足 $f'(v) = f(v) - |N_G(v) \cap S|$ 且 $f'(x) = 1$，$f'(y) = 1$。由于对于任意 $v \in V(G_1)$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G_1, f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G - E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

引理 8：$X \cap T = \varnothing$。

证明：假设 $X \cap T=\{u\}$。令 $T=ut_2t_3$，以及 $uv\in E(G[X])$ 且 uv 不是交叉边。令 $S=\{u,v\}$，很显然 $G[S]$ 是在线 f-可选的。令 $G'=G-S$ 以及 f' 是 $V(G)$ 到 N 上的一个映射且满足 $f'(v)=f(v)-|N_G(v)\cap S|$ 且 $f'(t_2)=1$，$f'(t_3)=1$。由于对于任意 $v\in V(G')$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G',f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G-E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

引理 9：G 中不存在边 $e=uv$ 使得 $u\in T$ 且 $v\in X$。

证明：假设 t_1x_1 是 G 中的一条边。根据引理 6 以及 x_2 和 x_4 之间的对称性，我们假设 t_1x_4 不是 G 中的边。令 $S=\{t_1,x_1,x_2\}$。

情形 1：G 中不存在点 w 与 t_1,x_1,x_2 都相邻。

令 $G'=G-S$，且 f' 是 $V(G')$ 到 N 上的一个映射且满足 $f'(v)=f(v)-|N_G(v)\cap S|$ 并且 $f'(t_i)=1$ ($i=2,3$)。由于对于任意 $v\in V(G')$ 在 S 中至多两个邻点，因此 (G',f') 满足引理 1 的条件。根据观察 1，我们得出 $G-E(T)$ 是在线 f-可选的，与 G 是极小反例相矛盾。

情形 2：G 中存在点点 w 与 t_1,x_1,x_2 都相邻。

根据引理 6，我们有 t_1x_3 不是 G 中的一条边，从而 $w\neq t_3$。由于我们的假设 t_1x_4 不是 G 中的边，所以 $w\neq x_4$。根据引理 7，对于 $i=2,3$ 我们有 x_2t_i 不是 G 中的边。根据引理 4，我们有 t_3x_1 不是 G 中的边，并且 w 是唯一的。令 $G'=G-S$，以及 f' 是 $V(G')$ 到 N 上的一个映射且满足对于 $v\in V(G')-\{w\}$ 都有 $f'(v)=f(v)-|N_G(v)\cap S|$ 以及对于 $i=2,3$ 有 $f'(t_i)=1$。在第 i 回合玩家 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，玩家 Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i\in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i\subseteq S$，那么玩家 Painter 按照顺序 t_1,x_1,x_2 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i\not\subset S$。玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点以及当 $x_2,w\in L_i$，Painter 优先考虑 w。当 $x_1,w\in L_i$ 时，此时我们需要考虑两种特殊情况：1) $t_2x_1\in E(G)$，那么根据引理 4，我们有 $t_2w\notin E(G)$。如果 $t_2,x_1,w\in L_i$，Painter 优先考虑 t_2,w；2) $t_2x_1\notin E(G)$ Painter 优先考虑 x_1。

由以上的策略，S 中的点有足够的筹码可用，因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G' 中的点，我们需要说明 (G',f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G' 中的点除了 w 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 w 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 w 最多因为 t_1,x_1 丢掉 2 个筹码，所以 w 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

设 P 为 G 中的一条路且 $P=p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k$，其中 $p_1\in T$ 和 $p_{k-1},p_k\in X$ 并且 P 上的边都不是交叉边。$W(P)$ 表示 P 的跨度。如果 $p_{k-2}p_k\in E(G)$，那么 $W(P)=2k-1$；如果 $p_{k-2}p_k\notin E(G)$，那么 $W(P)=2k$。我们选择一条路 P 使得 $W(P)$ 最小。根据引理 9，我们有令 $k\geq 4$，令 $\bar{P}=p_1p_2\cdots p_{k-1}$，根据 P 的选择我们得出 $\bar{P}$ 是 G 的一条诱导路。我们假设 $p_1=t_1$。

引理 10：如果 p_i,p_j 是 $v\in V(G)-V(P)$ 的邻点，那么 $|i-j|\leq 2$。

证明：如果 $|i-j|\geq 3$ 并且 $i>j$，那么 $W(\bar{P})<W(P)$ 的，这与 P 的选择相矛盾。

引理 11：任意 $v\in V(G)-V(P)$ 在 P 上最多有三个邻点。

证明：假设存在 $v\in V(G)-V(P)$ 在 P 上有四个邻点。根据引理 10 以及 P 的选择，这四个邻点是 $p_{k-3},p_{k-2},p_{k-1},p_k$。由于 $p_1p_2\cdots p_{k-3}vp_kp_{k-1}$ 的跨度不小于 P 的跨度，所以 $p_{k-2}p_k\in E(G)$。我们有 $p_{k-2}p_kv$ 或者 $p_{k-2}p_{k-1}v$ 的 G 的一个分离圈，与引理 4 相矛盾。

根据 P 的选择，对于 $i=2,3$，t_i 在 P 上最多两个邻点并且这两个邻点是 t_1,p_2。根据引理 4，p_2 最多与 t_2,t_3 中一个相邻。根据 P 的选择，$v\in X-\{p_{k-1},p_k\}$ 在 P 上有两个邻点。对于每个点 $V(G)-V(P)$，如

果 v 在 P 上有三个点，那么令 $\sigma(v)=p_i$，其中 p_i 是 v 在 P 上下标最大的邻点；如果 v 在 P 上最多两个邻点，那么令 $\sigma(v)=v$。

引理 12： 如果 $u\neq v$，那么 $\sigma(u)\neq\sigma(v)$。

证明：如果 $u\neq v$ 且 $\sigma(u)=\sigma(v)=p_i$，那么 u,v 在 P 上都有三个邻点。如果 $p_i\neq p_k$，那么 $d_G(p_{i-1})\leq 4$，从而产生矛盾。因此 $p_i=p_k$。由于 P 的选择，所以 u,v 邻点在 $\{p_{k-3},p_{k-2},p_{k-1},p_k\}$ 中。根据引理 4，u,v 不会都与 p_{k-1} 相邻。不失一般性我们假设 $up_{k-1}\notin E(G)$。因此 u 的邻点是 p_{k-3},p_{k-2},p_k。根据引理 7，我们得出 $vp_{k-1}\notin E(G)$。这样 $p_{k-2}p_{k-1}p_ku$ 或者 $p_{k-2}p_{k-1}p_kv$ 是一个分离 4-圈并且坏的构型在分离 4-圈的一侧，与引理 5 相矛盾。

4. 定理 2 的证明

证明： 令 $S=V(P)$。令 $G'=G-S$，以及 f' 是 $V(G')$ 到 N 上的一个映射且满足对于 $v\in V(G')$ 都有 $f'(v)=f(v)-|N_G(v)\cap S|$ 除了那些在 S 上有三个邻点的点，以及对于 $i=2,3$，$f'(t_i)=1$。

情形 1： $p_{k-2}p_k\notin E(G)$。

1.1 t_2p_2,t_3p_2 中一个是 G 中的边。

我们假设 $t_2p_2\in E(G)$。在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i\in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i\subseteq S$，那么玩家 Painter 按照顺序 $p_1,p_2,\cdots,p_{k-1},p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i\not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i,p_{i+1},p_{i+2}，其中 $2\leq i\leq k-2$。如果 $p_i,p_{i+1},y\in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i,p_{i+1}；如果 $p_{i+2},y\in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。当 y 在 P 上的邻点是 p_1,p_2,p_3，因为 $t_2p_2\in E(G)$ 以及根据引理 4，我们有 $t_2y\notin E(G)$。如果 $t_2,p_2,y\in L_i$，那么 Painter 优先考虑 t_2,y；如果 $p_2,y\in L_i$，Painter 优先考虑 p_2。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i,p_{i+1},p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G',f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i,p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

1.2 t_2p_2,t_3p_2 都不是 G 中的边。

在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i\in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i\subseteq S$，那么玩家 Painter 按照顺序 $p_1,p_2,\cdots,p_{k-1},p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i\not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i,p_{i+1},p_{i+2}，其中 $1\leq i\leq k-2$。如果 $p_i,p_{i+1},y\in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i,p_{i+1}；如果 $p_{i+2},y\in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i,p_{i+1},p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G',f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i,p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

情形 2： $p_{k-2}p_k \in E(G)$。

A 不存在点 $v \in V(G)-V(P)$ 使得 $\sigma(v)=p_k$。

A1 t_2p_2, t_3p_2 中一个是 G 中的边。

我们假设 $t_2p_2 \in E(G)$。在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么玩家 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $2 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。当 y 在 P 上的邻点是 p_1, p_2, p_3，因为 $t_2p_2 \in E(G)$ 以及根据引理 4，我们有 $t_2y \notin E(G)$。如果 $t_2, p_2, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 t_2, y；如果 $p_2, y \in L_i$，Painter 优先考虑 p_2。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G', f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

A2 t_2p_2, t_3p_2 都不是 G 中的边。

在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么玩家 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $1 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G', f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

B 存在点 $v \in V(G)-V(P)$ 使得 $\sigma(v)=p_k$。

B1 存在点 $w \in V(G)-V(P)$ 使得 $\sigma(w)=p_{k-2}$。

B1.1 t_2p_2, t_3p_2 中一个是 G 中的边。

我们假设 $t_2p_2 \in E(G)$。在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$ 选择在 I_i 中，对于 p_{k-1}, p_k，Painter 优先考虑 p_k。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $2 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。当 y 在 P 上的邻点是 p_1, p_2, p_3，因为 $t_2p_2 \in E(G)$ 以及根据引理 4，我们有 $t_2y \notin E(G)$。如果 $t_2, p_2, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 t_2, y；如果 $p_2, y \in L_i$，Painter 优先考虑 p_2。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G', f') 满足引理 1 的条件。

由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

B1.2 t_2p_2, t_3p_2 都不是 G 中的边。

在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$ 选择在 I_i 中，对于 p_{k-1}, p_k，Painter 优先考虑 p_k。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $1 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G', f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

B2 不存在点 $w \in V(G)-V(P)$ 使得 $\sigma(v)=p_{k-2}$。

B2.1 t_2p_2, t_3p_2 中一个是 G 中的边。

我们假设 $t_2p_2 \in E(G)$。在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $2 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。当 y 在 P 上的邻点是 p_1, p_2, p_3，因为 $t_2p_2 \in E(G)$ 以及根据引理 4，我们有 $t_2y \notin E(G)$。如果 $t_2, p_2, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 t_2, y；如果 $p_2, y \in L_i$，Painter 优先考虑 p_2。当 y 在 P 上的邻点是 p_{k-3}, p_{k-2}, p_k。如果 $p_{k-3}, p_k, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_{k-3}, p_k；如果 $p_{k-2}, y \in L_i$，Painter 优先考虑 y。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2} 还有筹码可用。因此 $G[S]$ 是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明 (G', f') 满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点除了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

B2.2 t_2p_2, t_3p_2 都不是 G 中的边。

在第 i 回合 Lister 选中一个未染顶点集 L_i，Painter 按照以下策略选择 I_i：

1) 对于 $i=1,2,3$ 有 $t_i \in L_i$，玩家 Painter 优先选择 t_i 在 I_i 中。

2) 如果 $L_i \subseteq S$，那么 Painter 按照顺序 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k$ 选择在 I_i 中。

3) 如果 $L_i \not\subset S$，玩家 Painter 一般优先考虑 S 中的点。当 y 在 P 上的邻点是 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}，其中 $1 \le i \le k-2$。如果 $p_i, p_{i+1}, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_i, p_{i+1}；如果 $p_{i+2}, y \in L_i$，那么玩家 Painter 优先考虑 y。当 y 在 P 上的邻点是 p_{k-3}, p_{k-2}, p_k。如果 $p_{k-3}, p_k, y \in L_i$，那么 Painter 优先考虑 p_{k-3}, p_k；如果 $p_{k-2}, y \in L_i$，Painter 优先考虑 y。

由以上的策略，S 中的点一般只会因为它前面的邻点丢失 1 个筹码。只有当 y 在 P 上有三个邻点 p_i, p_{i+1}, p_{i+2} 时，p_{i+2} 会因为 y 丢失 3 个筹码，根据引理 12，y 是唯一的，所以 p_{i+2} 最多丢失 4 个筹码，p_{i+2}

还有筹码可用。因此$G[S]$是在线 f-可选的。对于 G 中的点，我们需要说明(G', f')满足引理 1 的条件。由 f' 定义可知 G 中的点了 y 都有足够的筹码可用，因此我们只需要说明 f' 在 G' 中至少有 3 个筹码可用。根据以上的策略，点 y 最多因为 p_i, p_{i+1} 丢掉 2 个筹码，所以 y 在 G' 中至少有 3 个筹码。从而 $G-E(T)$ 在线 f-可选的，与 G 是反例相矛盾。

致　谢

感谢浙江师范大学“千人计划”朱绪鼎教授对本文的帮助，也感谢所有匿名审稿人对本文的指导意见。

基金项目

国家自然科学基金项目资助(CNSF 00571319)。

参考文献

[1] Schauz, U. (2009) Mr. Paint and Mrs. Correct. *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 18.

[2] Zhu, X. (2009) On-Line List Colouring of Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 3665-3677.

[3] Han, M. and Zhu, X.D. (2015) Locally Planar Graphs Are 5-Paintable. *Discrete Mathematics*, **338**, 1740-1749. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.11.015

[4] Han, M. and Zhu, X. (2016) Every Planar Graph Is 1-Defective (9,2)-Paintable. arXiv:1605.04415 [math.CO]

[5] Vizing, V.G. (1976) Coloring the Vertices of a Graph in Prescribed Colors. *Diskret. Analiz.*, No. 29. (In Russian)

[6] Erdős, P., Rubin, A.L. and Taylor, H. (1979) Choosability in Graphs. *Congressus Numerantium*, **26**, 125-157.

[7] Chang, T. and Zhu, X. (2012) On-Line 3-Choosable Planar Graphs. T*aiwanese Journal of Mathematics*, **16**, 511-519. https://doi.org/10.11650/twjm/1500406598

[8] Han, M. and Zhu, X. (2016) Locally Planar Graphs Are 2-Defective 4-Paintable. *European Journal of Combinatorics*, **54**, 35-50. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.12.004

[9] Wong, T. and Zhu, X. (2013) Partial Online List Coloring of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **74**, 359-367. https://doi.org/10.1002/jgt.21714

[10] Kim, S., Kwon, Y.S., Liu, D.D., *et al.* (2012) On-Line List Colouring of Complete Multipartite Graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**.

[11] Lason, M. and Lubawski, W. (2017) On-Line List Coloring of Matroids. *Discrete Applied Mathematics*, **217**, 353-355. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.08.002