

# Single-Machine Scheduling Based on Deterioration Effect and Group Technology

Yihang Tu, Boyuan Xiao, Enhua Yang, Jibo Wang\*

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning  
Email: wangjibo75@163.com

Received: Dec. 9<sup>th</sup>, 2019; accepted: Dec. 23<sup>rd</sup>, 2019; published: Dec. 30<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

This paper considers the single-machine scheduling problem with deterioration effect and group technology, where the processing time of a job within each group and the setup time of a group is a simple linear deterioration effect function of its starting time. Our objective is to determine the schedule of jobs within each group and the schedule of groups in order to minimize the weighted sum of  $k$  power of completion (waiting) time. Some optimal properties are given, and then we prove that this problem can be solved in polynomial time.

## Keywords

Scheduling, Single-Machine, Deterioration Effect, Group Technology

---

# 基于恶化效应和成组技术的单机排序问题

涂一航, 肖博元, 杨恩华, 王吉波\*

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳  
Email: wangjibo75@163.com

收稿日期: 2019年12月9日; 录用日期: 2019年12月23日; 发布日期: 2019年12月30日

---

## 摘要

研究具有恶化效应的单机成组排序问题, 其中同一组内工件的加工时间和各组之间的调整时间都是其开工时间的简单线性恶化函数。目标是确定同一组内工件的排列顺序和各组之间的排列顺序使所有工件的

\*通讯作者。

加权完工(等待)时间的 $k$ 次幂和最小。对此问题给出了一些性质,并提出了多项式时间最优算法。

## 关键词

排序, 单机, 恶化效应, 成组技术

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在经典排序中,假设工件的加工时间为常数,但有很多的实际生产过程,工件的加工时间可能与其开工时间有关。如在钢铁制造企业的连铸-轧制生产过程中,炼钢的基本单元是炉次,它是指同一座转炉一次共同冶炼的钢水。在炼钢的连铸阶段,高温熔融钢水在连铸机底部连续凝固成钢坯。当等待时间增加时(即加工开始时间延后),在连铸机上加工的炉次的温度将会降低,从而造成炉次加工时间的恶化(刘鹏等[1])。关于具有恶化效应的问题,读者可以参考文献 Ng 等[2], Sun 等[3], Pei 等[4], Gawiejnowicz [5], 王吉波等[6]。随着市场的发展,为适应顾客多品种小批量生产方式的需求,成组技术应运而生。在成组排序问题中,工件可以分成“类似”工件的工件组。同组的工件连续加工时,不需要或需要较少的安装时间;不同组的工件接连加工时,需要一定的或需要较多的安装时间(Potts 和 Van Wassenhove [7], Webster 和 Baker [8], Neufeld 等[9])。

Wu 等[10]研究了单机成组排序问题,其中组内工件加工时间和组间安装时间都为简单线性恶化效应。对最大完工时间问题和加权总完工时间问题,他们分别给出了多项式时间最优算法。Wu 和 Lee [11]研究了单机成组排序问题,其中组内工件加工时间和组间调整时间都为开工时间的线性恶化函数,其中组内工件和组间安装时间的恶化率都相同。他们证明了最大完工时间极小化问题是多项式时间可解的。他们也证明总完工时间极小化问题在每组工件个数都相同时的情况是多项式时间可解的。Lee 和 Lu [12]研究了单机成组排序问题,其中组内工件加工时间和组间安装时间都为简单恶化函数。对加权误工数问题,他们提出了启发式算法和分支定界法。Wang 等[13]研究了带有准备时间的单机成组排序问题,其中组内工件是简单线性恶化函数,组间的安装时间为独立的常数。对一种特殊情况,他们证明了最大完工时间极小化问题是多项式时间可解的。Xu 等[14]研究了同 Wang 等[13]类似的问题,只是组内工件的加工时间为开工时间的成比例恶化函数。对最大完工时间极小化问题的一种特殊情况,他们给出了多项式时间最优算法,他们还是一般情况给出了启发式算法。王吉波等[15]研究了同 Wang 等[13]一样的模型,对最大完工时间极小化问题的一般情况,他们给出了两个下界,从而提出了启发式算法和分支定界算法。

Wei 和 Wang [16]研究了具有简单线性恶化函数的单机成组排序问题,对加权完工(等待)时间的平方和极小化问题给出了多项式时间最优算法。本文将继续研究 Wei 和 Wang [16]的排序模型,对所有工件的加权完工(等待)时间的 $k$ 次幂和极小化问题进行分析,证明了这个问题是多项式时间可解的,并给出了求解算法。

## 2. 提出描述

有  $n$  个工件要在一台机器上进行加工,它们分为  $m$  个组,组  $G_i (1 \leq i \leq m)$  中包含  $n_i$  个工件,即  $\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{in_i}\}, n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ 。所有组的调整时间在  $t_0 > 0$  时刻开始,工件  $J_{ij}$  的实际加工时间为

$$p_{ij} = \alpha_{ij}t \quad (1)$$

其中  $t$  为开工时间, 其中  $\alpha_{ij}$  是工件  $J_{ij}$  的恶化率。假设同组工件必须放在一起连续加工, 组  $G_i$  有一个安装时间, 即  $s_i = \beta_i t$ , 其中  $\beta_i$  是组  $G_i$  的恶化率。令  $C_{ij}$  表示工件  $J_{ij}$  的完工时间,  $W_{ij}$  表示工件  $J_{ij}$  的等待时间 ( $W_{ij} = C_{ij} - p_{ij}$ ),  $w_{ij}$  表示工件  $J_{ij}$  的权重 (也就是它的重要程度), 目标是确定各组之间的排列顺序和同组内工件的排列顺序, 使所有工件的加权完工(等待)时间的  $k$  次幂和最小, 即  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$  ( $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ ),

其中  $k > 0$  是给定常数。利用三参数表示法, 这个排序问题可表示为  $1 | p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$  和

$1 | p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ , 其中, 1 表示一台机器,  $GT$  表示成组技术,  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$  ( $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ ) 表示目标函数。

### 3. 主要结论

**引理 1** 对于问题  $1 | p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$ , 则在最优排序中把同组内的工件按照

$\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}(1+\alpha_{ij})^k}$  非减的顺序排列, 即对组  $G_i$ , 满足

$$\frac{(1+\alpha_{i(1)})^k - 1}{w_{i(1)}(1+\alpha_{i(1)})^k} \leq \frac{(1+\alpha_{i(2)})^k - 1}{w_{i(2)}(1+\alpha_{i(2)})^k} \leq \dots \leq \frac{(1+\alpha_{i(n_i)})^k - 1}{w_{i(n_i)}(1+\alpha_{i(n_i)})^k}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

**证明 (反证法)** 假设组  $G_i$  内存在一个最优排序  $\pi_i$ , 满足相邻的两个工件  $J_{ij}$  和  $J_{ih}$ ,

$\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}(1+\alpha_{ij})^k} > \frac{(1+\alpha_{ih})^k - 1}{w_{ih}(1+\alpha_{ih})^k}$ , 其中  $J_{ij}$  排在  $J_{ih}$  的前面。设  $t$  为  $\pi_i$  中工件  $J_{ij}$  的开始加工时间, 交换工件  $J_{ij}$  和

$J_{ih}$  得到另一个排序  $\pi'_i$ , 则

$$C_{ij}(\pi_i) = t + \alpha_{ij}t = t(1+\alpha_{ij}), \quad C_{ih}(\pi_i) = C_{ij}(\pi_i) + \alpha_{ih}C_{ij}(\pi_i) = t(1+\alpha_{ij})(1+\alpha_{ih}),$$

$$C_{ih}(\pi'_i) = t(1+\alpha_{ih}), \quad C_{ij}(\pi'_i) = t(1+\alpha_{ih})(1+\alpha_{ij}).$$

在两个排序下的目标函数差为

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k(\pi_i) - \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k(\pi'_i) \\ &= w_{ij} t^k (1+\alpha_{ij})^k + w_{ih} t^k (1+\alpha_{ij})^k (1+\alpha_{ih})^k - w_{ih} t^k (1+\alpha_{ih})^k - w_{ij} t^k (1+\alpha_{ih})^k (1+\alpha_{ij})^k \\ &= w_{ih} t^k (1+\alpha_{ih})^k \left[ (1+\alpha_{ij})^k - 1 \right] - w_{ij} t^k (1+\alpha_{ij})^k \left[ (1+\alpha_{ih})^k - 1 \right] \\ &= t^k w_{ij} w_{ih} (1+\alpha_{ij})^k (1+\alpha_{ih})^k \left[ \frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}(1+\alpha_{ij})^k} - \frac{(1+\alpha_{ih})^k - 1}{w_{ih}(1+\alpha_{ih})^k} \right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

这违反了  $\pi_i$  是一个最优的排序, 引理得证。

**引理 2** 对于问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ , 则在最优排序中把同组内的工件按照  $\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}}$

非减的顺序排列。

**证明** 类似于引理 1。

**引理 3** 对于问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$ , 各组之间按照  $\frac{(1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1}{(1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k}$  非减

顺序排列得到最优组间排序。

**证明 (反证法)** 假设存在一个最优组间排序  $\pi_{GT}$ , 满足相邻的两组工件  $G_i$  和  $G_j$ ,

$\frac{(1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1}{(1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k} > \frac{(1+\beta_j)^k \prod_{l=1}^{n_j} (1+\alpha_{jl})^k - 1}{(1+\beta_j)^k \sum_{l=1}^{n_j} w_{jl} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{jh})^k}$ , 其中  $G_i$  排在  $G_j$  的前面。设  $t$  为  $\pi_{GT}$  中  $G_i$  的

开始加工时间, 交换  $G_i$  和  $G_j$  得到另一个排序  $\pi'_{GT}$ , 则

$$C_{i\theta}(\pi_{GT}) = t(1+\beta_i) \prod_{l=1}^{\theta} (1+\alpha_{il}), \quad C_{j\theta}(\pi_{GT}) = t(1+\beta_i)(1+\beta_j) \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il}) \prod_{l=1}^{\theta} (1+\alpha_{jl}),$$

$$C_{j\theta}(\pi'_{GT}) = t(1+\beta_j) \prod_{l=1}^{\theta} (1+\alpha_{jl}), \quad C_{i\theta}(\pi'_{GT}) = t(1+\beta_j)(1+\beta_i) \prod_{l=1}^{n_j} (1+\alpha_{jl}) \prod_{l=1}^{\theta} (1+\alpha_{il}).$$

在两个排序下的目标函数差为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k(\pi_{GT}) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k(\pi'_{GT}) \\ &= t^k (1+\beta_j)^k \sum_{l=1}^{n_j} w_{jl} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{jh})^k \left[ (1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1 \right] \\ & \quad - t^k (1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k \left[ (1+\beta_j)^k \prod_{l=1}^{n_j} (1+\alpha_{jl})^k - 1 \right] \\ & > 0 \end{aligned}$$

这违反了  $\pi_{GT}$  是一个最优的组间排序, 引理得证。

**引理 4** 对于问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ , 各组之间按照  $\frac{(1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1}{(1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k}$  非减

顺序排列得到最优组间排序。

由**引理 1**和**引理 3**, 我们可以给出问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$  的最优算法。

### 算法 1

- 1) 各组内的工件顺序按照  $\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij} (1+\alpha_{ij})^k}$  非减的顺序排列,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_i$ 。
- 2) 各组之间按照  $\frac{(1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1}{(1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k}$  非减的顺序排列,  $i = 1, 2, \dots, m$ 。

**定理 1** 对于问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$ , 最优解可由算法 1 得到, 并且该算法的时间复

杂度为  $O(n \log n)$ 。

**证明:** 由引理 1 和 2 可知算法 1 的正确性。步骤 1 的时间复杂度分别为  $O\left(\sum_{i=1}^m n_i \log n_i\right) \leq O(n \log n)$ ，步骤 2 的时间复杂度为  $O(m \log m) \leq O(n \log n)$ 。因此，算法 1 的总时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。

由引理 2 和引理 4，我们可以给出问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$  的最优算法。

## 算法 2

1) 各组内的工件顺序按照  $\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}}$  非减的顺序排列， $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n_i$ 。

2) 各组之间按照  $\frac{(1+\beta_i)^k \prod_{l=1}^{n_i} (1+\alpha_{il})^k - 1}{(1+\beta_i)^k \sum_{l=1}^{n_i} w_{il} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{ih})^k}$  非减的顺序排列， $i=1, 2, \dots, m$ 。

**定理 2** 对于问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} W_{ij}^k$ ，最优解可由算法 2 得到，并且该算法的时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。

**证明:** 类似于定理 1。

下面我们举个例子来说明算法 1 是如何实现的(我们只给出问题 1 |  $p_{ij} = \alpha_{ij}t, s_i = \beta_i t, GT | \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$  的求解算法)。

**例 1:** 已知  $n=8, m=3, k=1, t_0=1, G_1: [J_{11}, J_{12}], \beta_1=1, \alpha_{11}=0.1, \alpha_{12}=0.2, w_{11}=3, w_{12}=2; G_2: [J_{21}, J_{22}, J_{23}], \beta_2=2, \alpha_{21}=0.2, \alpha_{22}=0.3, \alpha_{23}=0.5, w_{21}=2, w_{22}=4, w_{23}=3; G_3: [J_{31}, J_{32}, J_{33}], \beta_3=3, \alpha_{31}=0.3, \alpha_{32}=0.4, \alpha_{33}=0.6, w_{31}=3, w_{32}=6, w_{33}=4$ 。

**解:** 由算法 1 得:

1) 组内工件排序按照  $\frac{(1+\alpha_{ij})^k - 1}{w_{ij}(1+\alpha_{ij})^k}$  非减的顺序排列得

$$G_1: [J_{11} \rightarrow J_{12}], G_2: [J_{22} \rightarrow J_{21} \rightarrow J_{23}], G_3: [J_{32} \rightarrow J_{31} \rightarrow J_{33}]$$

2) 对  $G_1$  组,  $\frac{(1+\beta_1)^k \prod_{l=1}^{n_1} (1+\alpha_{1l})^k - 1}{(1+\beta_1)^k \sum_{l=1}^{n_1} w_{1l} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{1h})^k} = 0.2531$ , 对  $G_2$  组,  $\frac{(1+\beta_2)^k \prod_{l=1}^{n_2} (1+\alpha_{2l})^k - 1}{(1+\beta_2)^k \sum_{l=1}^{n_2} w_{2l} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{2h})^k} = 0.2331$ ,

对  $G_3$  组,  $\frac{(1+\beta_3)^k \prod_{l=1}^{n_3} (1+\alpha_{3l})^k - 1}{(1+\beta_3)^k \sum_{l=1}^{n_3} w_{3l} \prod_{h=1}^l (1+\alpha_{3h})^k} = 0.1851$ , 即最优组间排序为  $G_3 \rightarrow G_2 \rightarrow G_1$ , 最优目标函数值为

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k = 24208.58。$$

## 4. 结论

本文研究了工件具有恶化效应和成组技术的单机排序问题，其中组内工件和组间的调整时间都为简单线性恶化函数。目的是求组内工件和组间工件的加工顺序使加权完工时间的  $k$  次幂和(即  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} C_{ij}^k$ )

最小, 本文证明了此问题多项式时间可解。本文只是研究简单线性恶化函数, 将来可以研究更一般的恶化函数情况, 或者将其延伸到平行机或流水作业等问题。

## 基金项目

沈阳航空航天大学大学生创新创业训练计划项目(201810143272)。

## 参考文献

- [1] 刘鹏, 周晓晔, 衣娜. 带有减少线性恶化效应的双代理调度问题[J]. 系统工程学报, 2011, 26(3): 387-392.
- [2] Ng, C.T., Wang, J.-B., Cheng, T.C.E. and Lam, S.S. (2011) Flowshop Scheduling of Deteriorating Jobs on Dominating Machines. *Computers & Industrial Engineering*, **61**, 647-654. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2011.04.020>
- [3] Sun, L.-H., Sun, L.-Y., Wang, M.-Z. and Wang, J.-B. (2012) Flow Shop Makespan Minimization Scheduling with Deteriorating Jobs under Dominating Machines. *International Journal of Production Economics*, **138**, 195-200. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2012.03.023>
- [4] Pei, J., Pardalos, P.M., Liu, X., Fan, W. and Yang, S. (2015) Serial Batching Scheduling of Deteriorating Jobs in a Two-Stage Supply Chain to Minimize the Makespan. *European Journal of Operational Research*, **244**, 13-25. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.11.034>
- [5] Gawiejnowicz, S. (2008) *Time-Dependent Scheduling*. Springer, Berlin.
- [6] 王吉波, 郭苗苗, 刘桓, 李琳, 王丹. 具有依赖开工时间恶化工件的流水作业排序问题研究综述[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2016, 33(3): 1-10.
- [7] Potts, C.N. and Van Wassenhove, L.N. (1992) Integrating Scheduling with Batching and Lot-Sizing: A Review of Algorithms and Complexity. *Journal of Operational Research Society*, **43**, 395-406. <https://doi.org/10.1057/jors.1992.66>
- [8] Webster, S. and Baker, K.R. (1995) Scheduling Groups of Jobs on a Single Machine. *Operations Research*, **43**, 692-703. <https://doi.org/10.1287/opre.43.4.692>
- [9] Neufeld, J.S., Gupta, J.N.D. and Buscher, U. (2016) A Comprehensive Review of Flowshop Group Scheduling Literature. *Computers and Operations Research*, **70**, 56-74. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2015.12.006>
- [10] Wu, C.C., Shiau, Y.R. and Lee, W.C. (2008) Single-Machine Group Scheduling Problems with Deterioration Consideration. *Computers and Operations Research*, **35**, 1652-1659. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.09.008>
- [11] Wu, C.C. and Lee, W.C. (2008) Single-Machine Group-Scheduling Problems with Deteriorating Setup Times and Job-Processing Times. *International Journal of Production Economics*, **115**, 128-133. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.05.004>
- [12] Lee, W.-C. and Lu, Z.-S. (2012) Group Scheduling with Deteriorating Jobs to Minimize the Total Weighted Number of Late Jobs. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 8750-8757. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.02.033>
- [13] Wang, J.-B., Huang, X., Wu, Y.-B. and Ji, P. (2012) Group Scheduling with Independent Setup Times, Ready Times, and Deteriorating Job Processing Times. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **60**, 643-649. <https://doi.org/10.1007/s00170-011-3639-1>
- [14] Xu, Y.-T., Zhang, Y. and Huang, X. (2014) Single-Machine Ready Times Scheduling with Group Technology and Proportional Linear Deterioration. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 384-391. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.05.064>
- [15] 王吉波, 赵伯来. 具有独立调整时间和恶化效应的单机成组排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2017, 34(4): 82-87.
- [16] Wei, C.-M. and Wang, J.-B. (2010) Single Machine Quadratic Penalty Function Scheduling with Deteriorating Jobs and Group Technology. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3642-3647. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.014>