Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(1), 63-69
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.111008

Hans汉斯

基于新得分函数的勾股梯形模糊数的多属性决策

王　霞，陈京荣*，陈　琼，张　继

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州
Email: *chenjr@mail.lzjtu.cn

收稿日期：2020年12月31日；录用日期：2021年1月27日；发布日期：2021年2月3日

摘　要

针对属性值为勾股梯形模糊数的多属性决策问题，重新定义了勾股梯形模糊数的期望函数、评分函数和精确函数。给出了勾股梯形模糊数的运算法则，基于这些运算法则，提出了勾股梯形模糊加权算术平均算子。利用这些聚集算子，对准则值进行聚集，得到集结的勾股梯形模糊备选数。通过比较集结模糊数的得分函数和精确函数值，可以得到整个备选集的排序。通过实例验证了该方法的可行性和有效性。

关键词

勾股梯形模糊数，集结算子，得分函数，多属性决策

Multi-Attribute Decision-Making Based on New Scoring Function of Pythagorean Trapezoidal Fuzzy Number

Xia Wang, Jingrong Chen*, Qiong Chen, Ji Zhang

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
Email: *chenjr@mail.lzjtu.cn

Received: Dec. 31st, 2020; accepted: Jan. 27th, 2021; published: Feb. 3rd, 2021

Abstract

For multi-attributes decision-making problems, in which the values of attributes are Pythagorean trapezoidal fuzzy numbers, the expected function, scoring function and accuracy function of trapezoidal fuzzy number are redefined. Their operational laws are defined. Based on these opera-

*通讯作者。

文章引用: 王霞，陈京荣，陈琼，张继. 基于新得分函数的勾股梯形模糊数的多属性决策[J]. 运筹与模糊学，2021, 11(1): 63-69. DOI: 10.12677/orf.2021.111008

tional laws, Pythagorean trapezoidal fuzzy weighted arithmetic averaging operator is proposed. By using these aggregation operators, criteria values are aggregated and integrated Pythagorean trapezoidal fuzzy numbers of alternatives are attained. By comparing score function and accuracy function values of integrated fuzzy numbers, a ranking of the whole alternative set can be attained. An example is given to show the feasibility and availability of the method.

Keywords

Pythagorean Trapezoid Fuzzy Number, Aggregation Operator, Score Function, Multi-Attributes Decision-Making

1. 引言

随着社会竞争力的不断增强，多属性决策被广泛应用到各个领域，决策理论的发展也越来越重要。如今社会提倡评选各种优秀团体、先进个人等活动，通过不同的评价指标对参赛团队或个人进行排序，评选出优秀团体或个人。为了公正、公平和大家满意期间，如何对参赛者进行择优变得尤为重要。随着人们对模糊集理论的认识，勾股模糊集也逐渐出现在人们的视线中，而且它能更加准确的反应决策者的喜好，用勾股梯形模糊集理论来解决多属性决策问题更有意义。

1965 年 Zadeh [1]提出了模糊集理论，引起了很多学者的关注。1986 年 Astanassov [2]提出了直觉模糊集，使人们解决多属性问题更加方便。1989 年 Atanassov 和 Gargov [3]提出了区间直觉模糊集，把$[0,1]$上的模糊数拓展到了区间$[0,1]$，所以在处理不确定信息时更加灵活。龚日朝等[4]运用概率论全概率公式思想提出了区间直觉模糊数的新得分函数和精确函数。Wang Jianqiang & Zhang Zhong [5]在 2009 年提出了直觉梯形模糊集并给出了它的得分函数和精确函数。周晓辉[6]等提出了直觉梯形模糊数的 Hamming 距离，根据贴近度的大小对方案进行了排序。Yager [7] [8]对直觉模糊集进行了扩展，对于隶属度和非隶属度之和大于 1 的情况，给出了勾股模糊集，它能更加准确的刻画现实问题。Rehman 等[9]研究了勾股模糊聚合算子，如勾股模糊加权几何(PFWG)算子、勾股模糊有序加权几何(PFOWG)算子、勾股模糊爱因斯坦加权几何(PFEWG)算子和区间值勾股模糊几何(IVPFG)算子。他们还提出了勾股模糊聚合算子[10]。Peng and Yang [11]提出了区间勾股模糊集的运算法则。M. Shakeel 等[12]提出了基于爱因斯坦算子的勾股梯形模糊聚合算子。Faisal Khan 等[13]提出了基于勾股梯形模糊数运算法则，并对其基本性质进行了验证。也提出了一些由勾股梯形模糊数形成决策信息的聚合算子，包括勾股梯形加权几何(PTFWG)算子，勾股梯形模糊有序加权几何(PTFOWG)算子和勾股梯形模糊混合几何(PTFHG)算子。M. Shakeel *et al.* [14]提出了勾股梯形模糊集并给出了它的加权平均算子和得分、精确函数。由于勾股模糊集比直觉模糊集更能模拟实际问题中的模糊性，本文对勾股梯形模糊多属性决策的得分函数和精确函数进行了改进，通过计算勾股梯形模糊数的期望来定义了它的得分函数和精确函数，并通过例子证明了备选方案排名的有效性。本文研究的目的是基于勾股梯形模糊数定义的得分函数和精确函数来解决属性值为勾股梯形模糊数的多属性决策问题。

2. 勾股梯形模糊集及相关理论

2.1. 勾股梯形模糊数

定义 1 [14] 设 $\tilde{\alpha}$ 是实数集上的一个勾股模糊数，它的隶属度为：

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(x)=\begin{cases} f_{\tilde{\alpha}}^{L}(x), a\le x<b \\ \mu_{\tilde{\alpha}}(x), b\le x\le c \\ f_{\tilde{\alpha}}^{R}(x), c<x\le d \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

非隶属度为：

$$v_{\tilde{\alpha}}(x)=\begin{cases} g_{\tilde{\alpha}}^{L}(x), a_1\le x<b \\ v_{\tilde{\alpha}}(x), b\le x\le c \\ g_{\tilde{\alpha}}^{R}(x), c<x\le d_1 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $f_{\tilde{\alpha}}^{L}(x)$，$g_{\tilde{\alpha}}^{R}(x)$ 是连续的单调增函数，$f_{\tilde{\alpha}}^{R}(x)$，$g_{\tilde{\alpha}}^{L}(x)$ 是连续的单调减函数，$f_{\tilde{\alpha}}^{L}(x)$，$f_{\tilde{\alpha}}^{R}(x)$，$g_{\tilde{\alpha}}^{L}(x)$，$g_{\tilde{\alpha}}^{R}(x)$ 分别是隶属函数和非隶属函数的左右基函数。勾股模糊数表示为 $\tilde{\alpha}=\left\langle\left((a,b,c,d);\mu_{\tilde{\alpha}}\right),\left((a_1,b,c,d_1);v_{\tilde{\alpha}}\right)\right\rangle$。与模糊数不同，勾股模糊数有另一个参量，非隶属函数被用来表示决策者对不属于元素 (a_1,b,c,d_1) 的满意程度。当 $\mu_{\tilde{\alpha}}=1, v_{\tilde{\alpha}}=0$，$\tilde{\alpha}$ 叫做正常的勾股模糊数，也就是传统的模糊数。当 $f_{\tilde{\alpha}}^{L}(x)=\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{\alpha}}$，$f_{\tilde{\alpha}}^{R}(x)=\dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{\alpha}}$，$g_{\tilde{\alpha}}^{L}=\dfrac{b-x+v_{\tilde{\alpha}}(x-a_1)}{b-a_1}$，$g_{\tilde{\alpha}}^{R}=\dfrac{x-c+v_{\tilde{\alpha}}(d_1-c)}{d_1-c}$ $\left(0\le\mu_{\tilde{\alpha}}\le 1, 0\le v_{\tilde{\alpha}}\le 1, \mu_{\tilde{\alpha}}^2+v_{\tilde{\alpha}}^2\le 1, a,b,c,d\in R\right)$ 这个勾股模糊数被叫做勾股梯形模糊数，表示为 $\tilde{\alpha}=\left\langle\left((a,b,c,d);\mu_{\tilde{\alpha}}\right),\left((a_1,b,c,d_1);v_{\tilde{\alpha}}\right)\right\rangle$。当 $b=c$，勾股梯形模糊数退化为勾股三角模糊数。本文中讨论的是 $[a,b,c,d]=[a_1,b,c,d_1]$ 的情形，此时勾股梯形模糊数 $\tilde{\alpha}$ 表示为 $\tilde{\alpha}=\left\langle[a,b,c,d];\mu_{\tilde{\alpha}},v_{\tilde{\alpha}}\right\rangle$。$\pi_{\tilde{\alpha}}=\sqrt{1-(\mu_{\tilde{\alpha}})^2-(v_{\tilde{\alpha}})^2}$ 称为犹豫度。

2.2. 勾股梯形模糊数的运算法则

定义 2 [12] 设 $\tilde{\alpha}_1=\left\langle[a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_{\tilde{\alpha}_1},v_{\tilde{\alpha}_1}\right\rangle$，$\tilde{\alpha}_2=\left\langle[a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_{\tilde{\alpha}_2},v_{\tilde{\alpha}_2}\right\rangle$ 为两个勾股梯形模糊数，则有如下运算法则：

1) $\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2=\left\langle[a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];\sqrt{(\mu_{\tilde{\alpha}_1})^2+(\mu_{\tilde{\alpha}_2})^2-(\mu_{\tilde{\alpha}_1})^2(\mu_{\tilde{\alpha}_2})^2},v_{\tilde{\alpha}_1}v_{\tilde{\alpha}_2}\right\rangle$；

2) $\tilde{\alpha}_1\times\tilde{\alpha}_2=\left\langle[a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2];\mu_{\tilde{\alpha}_1}\mu_{\tilde{\alpha}_2},\sqrt{(v_{\tilde{\alpha}_1})^2+(v_{\tilde{\alpha}_2})^2-(v_{\tilde{\alpha}_1})^2(v_{\tilde{\alpha}_2})^2}\right\rangle$；

3) $\lambda\tilde{\alpha}_1=\left\langle[\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];\sqrt{1-\left(1-(\mu_{\tilde{\alpha}_1})^2\right)^{\lambda}},(v_{\tilde{\alpha}_1})^{\lambda}\right\rangle$；

4) $\tilde{\alpha}_1^{\lambda}=\left\langle\left[a_1^{\lambda},b_1^{\lambda},c_1^{\lambda},d_1^{\lambda}\right];(\mu_{\tilde{\alpha}_1})^{\lambda},\sqrt{1-\left((1-v_{\tilde{\alpha}_1})^2\right)^{\lambda}}\right\rangle$。

3. 勾股梯形模糊数的集合算子

定义 3 [14] 设 $\tilde{\alpha}_i=\left\langle[a_i,b_i,c_i,d_i];\mu_{\tilde{\alpha}_i},v_{\tilde{\alpha}_i}\right\rangle$ 是一个由勾股模糊梯形数组成的集合。$\tilde{\alpha}_i$ 对应的权重设为 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$，那么勾股梯形模糊加权平均算子定义为：

$$PTFWA(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\omega_1\tilde{\alpha}_1+\omega_2\tilde{\alpha}_2+\cdots+\omega_n\tilde{\alpha}_n$$
$$=\left\langle\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i b_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i c_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_i\right];\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\tilde{\alpha}_i}^2\right)^{\omega_i}},\prod_{i=1}^{n}\left(v_{\tilde{\alpha}_i}^2\right)^{\omega_i}\right\rangle \tag{1}$$

4. 勾股梯形模糊数的得分函数和精确函数

定义 4 设 $\tilde{\alpha}=\langle[a,b,c,d];\mu_{\tilde{\alpha}},v_{\tilde{\alpha}}\rangle$ 是一个勾股梯形模糊数，将它的期望函数定义为：

$$I(\alpha)=\frac{1}{8}\left[(a+b+c+d)\times\left(1-\mu_{\tilde{\alpha}}^2-v_{\tilde{\alpha}}^2\right)\right] \tag{2}$$

定义 5 设 $\tilde{\alpha}=\langle[a,b,c,d];\mu_{\tilde{\alpha}},v_{\tilde{\alpha}}\rangle$ 是一个勾股梯形模糊数，将它的得分函数定义为：

$$S(\tilde{\alpha})=I_{\tilde{\alpha}}\times\left(\mu_{\tilde{\alpha}}^2-v_{\tilde{\alpha}}^2\right) \tag{3}$$

得分函数的值越大，表明其对应的勾股梯形模糊数越大。

定义 6 设 $\tilde{\alpha}=\langle[a,b,c,d];\mu_{\tilde{\alpha}},v_{\tilde{\alpha}}\rangle$ 是一个勾股梯形模糊数，其精确函数定义为：

$$H(\tilde{\alpha})=I_{\tilde{\alpha}}\times\left(\mu_{\tilde{\alpha}}^2+v_{\tilde{\alpha}}^2\right) \tag{4}$$

定义 7 [5] 对于任意的两个勾股梯形模糊数 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$，具有以下排序方法：

1) 如果 $S(\tilde{\alpha}_1)>S(\tilde{\alpha}_2)$，那么 $\tilde{\alpha}_1>\tilde{\alpha}_2$；

2) 若 $S(\tilde{\alpha}_1)=S(\tilde{\alpha}_2)$，那么当 $H(\tilde{\alpha}_1)=H(\tilde{\alpha}_2)$ 时，有 $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2$；当 $H(\tilde{\alpha}_1)>H(\tilde{\alpha}_2)$ 时，则 $\tilde{\alpha}_1>\tilde{\alpha}_2$。

5. 基于勾股梯形模糊数的多属性决策

对于一些模糊多属性决策问题，假设有 m 个备选方案 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，l 个决策准则 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$，相应的权重系数为 $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l\}$，$\omega_j\in[0,1]$，$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_l=1$。

在多属性决策问题中，我们通常用效益型和成本型的标准类型来消除不同物理维度对决策结果的影响。由勾股梯形模糊数构成的模糊矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times l}$，其中 $r_{ij}=\langle[a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij}];\mu_{ij},v_{ij}\rangle,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l$。对决策矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times l}$ 进行规范化处理[15]。

对于效益型指标：

$$\begin{aligned}\bar{r}_{ij}=\Bigg\langle\Bigg[&\beta_i^a+\frac{a_{ij}-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^a,\beta_i^b+\frac{b_{ij}-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^b,\\&\beta_i^c+\frac{c_{ij}-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^c,\beta_i^d+\frac{d_{ij}-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^d\Bigg];\mu_{ij},v_{ij}\Bigg\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

对于成本型指标：

$$\begin{aligned}\bar{r}_{ij}=\Bigg\langle\Bigg[&\beta_i^a+\frac{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-a_{ij}}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^a,\beta_i^b+\frac{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-b_{ij}}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^b,\\&\beta_i^c+\frac{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-c_{ij}}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^c,\beta_i^d+\frac{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-d_{ij}}{\max\limits_{1\le j\le n}(d_{ij})-\min\limits_{1\le j\le n}(a_{ij})}\cdot\gamma_i^d\Bigg];\mu_{ij},v_{ij}\Bigg\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

其中，可取 $\beta_i^x=0.2$，$\alpha_i^x=0.8$，$x=a,b,c,d;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l$。这样的极差变换法的处理方法可以使得备选方案之间保持独立性和排序的一致性。

决策步骤如下：

步骤 1：对决策矩形 $R=\left(r_{ij}\right)_{m\times l}$ 进行规范化处理。

步骤 2：使用加权平均算子

$$\tilde{\alpha}_i=PTFWA\left(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n\right)=\omega_1\tilde{\alpha}_1+\omega_2\tilde{\alpha}_2+\cdots+\omega_n\tilde{\alpha}_n$$
$$=\left\langle\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i b_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i c_i,\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_i\right];\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mu_{\tilde{\alpha}_i}^2\right)^{\omega_i}},\prod_{i=1}^{n}\left(v_{\tilde{\alpha}_i}^2\right)^{\omega_i}\right\rangle$$

用聚合标准的权重和值来得到综合勾股梯形模糊数 $\tilde{\alpha}_i, i=1,2,\cdots,m$ 。

步骤 3：分别使用得分函数和精确函数来计算得分值和精确值。

步骤 4：根据定义 7 对方案进行排序。

6. 案例分析

某校在教师节之际准备评选优秀教师，现有 4 个被选人 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 符合评选条件，经各部门研究决定，制定了 6 个评选标准 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$，各个指标对应的权重向量为 $\omega=\left(0.16,0.16,0.20,0.16,0.16,0.16\right)^{\mathrm{T}}$，且各指标为效益型指标，决策者对备选人的评价值用勾股梯形模糊数来表示，决策矩阵如表 1。

Table 1. Decision matrix
表 1. 决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
a_1	$\langle[2,3,5,6];0.5,0.3\rangle$	$\langle[2,3,4,6];0.7,0.2\rangle$	$\langle[3,4,5,8];0.8,0.1\rangle$	$\langle[2,3,4,6];0.6,0.3\rangle$	$\langle[3,4,5,6];0.5,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,7];0.9,0.2\rangle$
a_2	$\langle[1,3,4,5];0.7,0.4\rangle$	$\langle[4,5,6,7];0.5,0.4\rangle$	$\langle[1,3,4,6];0.6,0.3\rangle$	$\langle[3,4,5,7];0.5,0.2\rangle$	$\langle[2,4,5,6];0.8,0.3\rangle$	$\langle[3,5,6,7];0.6,0.3\rangle$
a_3	$\langle[1,2,3,5];0.6,0.2\rangle$	$\langle[3,4,5,6];0.8,0.3\rangle$	$\langle[2,3,4,5];0.7,0.2\rangle$	$\langle[3,4,5,6];0.6,0.1\rangle$	$\langle[2,4,5,7];0.7,0.1\rangle$	$\langle[4,5,6,8];0.8,0.2\rangle$
a_4	$\langle[2,4,5,6];0.5,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,7];0.6,0.4\rangle$	$\langle[1,2,3,4];0.7,0.1\rangle$	$\langle[2,4,6,7];0.6,0.4\rangle$	$\langle[3,4,6,7];0.8,0.2\rangle$	$\langle[2,3,4,5];0.5,0.4\rangle$

Step 1. 把决策矩阵进行规范化得到规范化的决策矩阵，由于指标均为效益型指标，则取 $\beta_i^x=0.2$，$\alpha_i^x=0.8$，由式(5)可得规范化决策矩阵如表 2。

Table 2. Normalized decision matrix
表 2. 规范化决策矩阵

	c_1	c_2	c_3
a_1	$\langle[0.200,0.333,0.600,0.733];0.5,0.3\rangle$	$\langle[0.200,0.333,0.467,0.733];0.7,0.2\rangle$	$\langle[0.333,0.467,0.600,1.000];0.8,0.1\rangle$
a_2	$\langle[0.200,0.467,0.600,0.733];0.7,0.4\rangle$	$\langle[0.600,0.733,0.867,1.000];0.5,0.4\rangle$	$\langle[0.200,0.467,0.600,0.867];0.6,0.3\rangle$
a_3	$\langle[0.200,0.314,0.429,0.657];0.5,0.2\rangle$	$\langle[0.429,0.543,0.657,0.771];0.8,0.3\rangle$	$\langle[0.314,0.429,0.543,0.657];0.7,0.2\rangle$
a_4	$\langle[0.333,0.600,0.733,0.867];0.5,0.2\rangle$	$\langle[0.333,0.467,0.600,1.000];0.6,0.4\rangle$	$\langle[0.200,0.333,0.467,0.600];0.7,0.1\rangle$

Continued

	c_4	c_5	c_6
a_1	$\langle[0.200,0.333,0.467,0.733];0.6,0.3\rangle$	$\langle[0.333,0.467,0.600,0.733];0.5,0.2\rangle$	$\langle[0.200,0.333,0.467,0.867];0.9,0.2\rangle$
a_2	$\langle[0.467,0.600,0.733,1.000];0.5,0.2\rangle$	$\langle[0.333,0.600,0.733,0.867];0.8,0.3\rangle$	$\langle[0.467,0.733,0.867,1.000];0.6,0.3\rangle$
a_3	$\langle[0.429,0.543,0.657,0.771];0.6,0.1\rangle$	$\langle[0.314,0.546,0.657,0.886];0.7,0.1\rangle$	$\langle[0.543,0.657,0.771,1.000];0.8,0.2\rangle$
a_4	$\langle[0.333,0.600,0.867,1.000];0.6,0.4\rangle$	$\langle[0.467,0.600,0.867,1.000];0.8,0.2\rangle$	$\langle[0.333,0.467,0.600,0.733];0.5,0.4\rangle$

Step 2. 利用式(1)求得决策方案 $a_i\left(i=1,2,3,4\right)$ 的综合属性值 $\tilde{a}_i$ 分别为：

$$a_1=\langle[0.248,0.381,0.536,0.628];0.732,0.039\rangle$$

$$a_2=\langle[0.371,0.595,0.728,0.909];0.639,0.095\rangle$$

$$a_3=\langle[0.369,0.502,0.616,0.785];0.509,0.029\rangle$$

$$a_4=\langle[0.328,0.504,0.680,0.856];0.413,0.059\rangle$$

Step 3. 计算 $a_i\left(1,2,3,4\right)$ 的得分值 $S\left(a_i\right)$，由式(3)可得。

$$S\left(\tilde{a}_1\right)=0.179,S\left(\tilde{a}_2\right)=0.182,S\left(\tilde{a}_3\right)=0.092,S\left(\tilde{a}_4\right)=0.058$$

Step 4. 由定义 7 排名如下：

$$a_2>a_1>a_3>a_4$$

所以该学校评选出的优秀教师为第 2 个被选人。

7. 结论

对于勾股梯形数的模糊多属性决策问题，定义了勾股梯形模糊数的期望、得分函数、精确函数，给出了勾股梯形模糊数的加权平均算子，根据加权平均算子得到集结算子，然后由得分函数计算出集结算子的得分值，最后由得分值进行排序，并通过实例验证了此方法的有效性。这种方法理论简单、易于操作，可用于优秀团体和先进个人评选等多属性决策问题中。

基金项目

国家自然科学基金(61463027，61463026)，甘肃省自然科学基金(1610RJZA038)。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-356. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Atanasso, K. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

[3] Atanassov, K.T. and Gargov, G. (1989) Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **31**, 343-349. https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90205-4

[4] 龚日朝，马霖源. 基于区间直觉模糊数的得分函数与精确函数及应用[J]. 系统工程理论与实践，2019，39(2): 463-475.

[5] Wang, J.Q. and Zhong, Z. (2009) Aggregation Operators on Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Number and Its Application to Multi-Criteria Decision Making Problems. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, **20**, 321-326.

[6] 周晓辉, 姚俭, 吴天魁. 基于梯形直觉模糊数的 TOPSIS 的多属性决策[J]. 上海理工大学学报, 2014, 36(3): 281-286.

[7] Yager, R.R. (2014) Pythagorean Membership Grades in Multiciteria Decision Making. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2278989

[8] Yager, R.R. and Abbasov, A.M. (2013) Pythagorean Membership Grades, Complex Numbers and Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, **28**, 436-452. https://doi.org/10.1002/int.21584

[9] Rahman, K., Abdullah, S., Shakeel, M., Sajjad Ali Khan, M. and Ullah, M. (2017) Interval-Valued Pythagorean Fuzzy Geometric Aggregation Operators and Their Application to Group Decision-Making Problem. *Cogent Math*, **4**, Article ID: 1338638. https://doi.org/10.1080/23311835.2017.1338638

[10] Rehman, *et al*. (2017) Multiple Attribute Group Decision-Making for Plant Location Selection with Pythagorean Fuzzy Weighted Geometric Aggregation Operator. *The Nucleus*, **54**, 66-74.

[11] Peng, X.D. and Yang, Y. (2016) Fundamental Properties of Interval Valued Pythagorean Fuzzy Aggregation Operators. *International Journal of Intelligent System*, **31**, 444-487. https://doi.org/10.1002/int.21790

[12] Shakeel, M., Abdullah, S., Shahzad, M., Amin, F., Mahmood, T. and Amin, N. (2019) Pythagorean Trapezoidal Fuzzy Geometric Aggregation Operators Based on Einstein Operations and Their Application in Group Decision Making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **36**, 309-324. https://doi.org/10.3233/JIFS-181329

[13] Khan, F., Shakeel, M. and Abdullah, S. (2019) Ranking Methodology of Irrigation Problems Based on Pythagorean Trapezoidal Fuzzy Aggregations Operators. *Computational and Applied Mathematics*, **38**, Article No. 147. https://doi.org/10.1007/s40314-019-0920-7

[14] Shakeel, M., Abduulah, S., Shahzad, M., Mahmood, T. and Siddiqui, N. (2018) Averaging Aggregation Operators with Pythagorean Trapezoidal Fuzzy Numbers and Their Application to Group Decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **36**, 1899-1915. https://doi.org/10.3233/JIFS-17238

[15] 张伟竞. 基于直觉梯形模糊数的多属性决策方法[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2013.