

求解单调变分不等式问题的修正惯性次梯度外梯度算法

邓雲方, 李 锋*

云南师范大学数学学院, 云南 昆明
Email: 646056617@qq.com, *lf_2360@126.com

收稿日期: 2021年7月1日; 录用日期: 2021年7月30日; 发布日期: 2021年8月6日

摘 要

本文提出了一种修正的惯性次梯度外梯度算法,用以求解实Hilbert空间中的具有Lipschitz连续和单调的变分不等式问题。我们在惯性次梯度外梯度算法的基础上,结合粘度逼近法,构造了一种具有强收敛性的算法。

关键词

单调变分不等式, 惯性次梯度外梯度算法, 粘度逼近法, 强收敛

A Modified Inertial Subgradient Extragradient Algorithm for Solving Monotone Variational Inequality Problems

Yunfang Deng, Feng Li*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 646056617@qq.com, *lf_2360@126.com

Received: Jul. 1st, 2021; accepted: Jul. 30th, 2021; published: Aug. 6th, 2021

Abstract

In this paper, a modified inertial subgradient extragradient algorithm is proposed for solving the Lipschitz-continuum and monotone variational inequality problems in real Hilbert space. On the

*通讯作者。

basis of the inertial subgradient extragradient algorithm and the viscosity approximation method, we construct an algorithm with strong convergence.

Keywords

Monotone Variational Inequality, Inertial Subgradient Gradient Algorithm, Viscosity Approximation Method, Strong Convergence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

令 H 为一个实 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积和诱导范数, $C \subset H$ 是非空闭凸子集. 令 $A: H \rightarrow H$ 为单调映射, 变分不等式问题就是找到一点 $x^* \in C$, 满足不等式

$$\langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$$

我们把上式称为单调变分不等式, 其解集用 $VI(C, A)$ 表示.

变分不等式(Variational Inequalities)具有非常广泛的应用背景, 是在 1966 年首次被 Hartman 和 Stampacchia [1] 提出的, 从被提出以来就被学者们经常应用于最优化领域中, 是研究工程力学、物理、经济学、优化理论和应用科学的重要工具. 从二十世纪六十年代开始至今, 怎么求解变分不等式问题已经成为许多学者的研究方向, 其理论和方法已经被国内外许多专家所研究.

投影算法及其变形形式为我们寻找变分不等式的近似解提供了重要的工具, 投影算法的迭代格式为:

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \tau Ax_n)$$

其中 $\tau > 0$ 表示步长, $P_C(\cdot)$ 表示到非空凸集 C 上的投影, 即:

$$P_C(x) = \text{Arg min} \{ \|x - y\| \mid y \in C \}$$

那么有: $\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$ 成立.

因为基本投影算法的条件较强, 它需要映射 A 为 Lipschitz 连续和强单调的, 所以为了减弱条件, Korpelevich [2] 就基于 n 维欧式空间 R^n 中提出了外梯度算法, 受到了许多学者的关注([3] [4] [5]), 其迭代格式为:

$$\begin{aligned} y_n &= P_C(x_n - \tau Ax_n) \\ x_{n+1} &= P_C(x_n - \tau Ay_n) \end{aligned}$$

其中 $\tau \in (0, 1/L)$, L 为 Lipschitz 常数, 它只需要映射 A 是 Lipschitz 连续和一般单调的. Nadezhkina 和 Takahashi [6] 把外梯度方法推广到了无穷维的 Hilbert 空间.

又因为外梯度方法要计算两个到非空闭凸集 C 上的正交投影, 这两个投影在一般情况下比较难计算, 所以为了克服这个困难, Censor [7] 就对外梯度算法进行了扩展, 称为次梯度外梯度算法:

$$\begin{aligned} y_n &= P_C(x_n - \tau Ax_n) \\ x_{n+1} &= P_{T_n}(x_n - \tau Ay_n) \end{aligned}$$

其中: $T_n := \{w \in R^n \mid \langle (x_n - \tau Ax_n) - y_n, w - y_n \rangle \leq 0\}$ 该名称源于将外梯度算法中 C 上的第二个正交投影替换为一个特定的次梯度投影, 即构造一个特殊的半空间 T_n (详细见[7]), 把第二个正交投影的投影平面改为 T_n , 这就避免了每次向非空闭凸集作投影的困难。后来 Censor [8]又把该算法推广到了 Hilbert 空间。因为次梯度外梯度算法的计算量大大减少了, 所以有许多学者对其进行了改进([9] [10] [11])。

到了后来, 为了加快算法的收敛速度, 人们在原有算法的基础上加入了惯性算法, 它是基于二阶动力系统在时间上的重球法[12] [13] [14], 并且在没有惯性效应的情况下加快了原算法的收敛速度。Alvarez 和 Attouch [13]应用惯性技术, 得到了一种用于求解极大单调算子零点问题的惯性近端方法, 其主要工作如下: 令 $x_{n+1}, x_n \in H$, $\theta_n \in [0,1)$, $\lambda_n > 0$, 找到点 $x_{n+1} \in H$, 使得:

$$0 \in \lambda_n A(x_{n+1}) + x_{n+1} - x_n - \theta_n(x_n - x_{n-1})$$

上式可以等价地写成如下形式:

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n}^A(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}))$$

其中 $J_{\lambda_n}^A$ 是参数 λ_n 在 A 上的解, 而惯性是由 $\theta_n(x_n - x_{n-1})$ 引起的。

Duong 和 Dang [15]就在 Censor [8]和 Alvarez [13]的启发下, 结合惯性技术和次梯度外梯度算法提出了一种惯性次梯度外梯度算法, 并创建了算法的弱收敛性, 算法迭代格式为:

选择点 $x_0, x_1 \in H$, 计算

$$\begin{aligned} w_n &= x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n &= P_C(w_n - \tau Aw_n) \\ T_n &= \{x \in H \mid \langle w_n - \tau Aw_n - y_n, x - y_n \rangle \leq 0\} \\ x_{n+1} &= P_{T_n}(w_n - \tau Ay_n) \end{aligned}$$

其中 $\tau > 0$, $\alpha_n \geq 0$ 。

粘度逼近法[16]是求非扩张自映射 P 的不动点的一种方法, 即要找到一点 x^* , 使得 $x^* = P(x^*)$, 其迭代格式为: 选取迭代点 x_n , 计算:

$$x_{n+1} = \theta P(x_n) + (1-\theta)f(x_n)$$

其中 $f: H \rightarrow C$ 为一个压缩映射, 文章证明了迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* 。

本文在惯性次梯度外梯度算法的基础上, 结合并运用两次粘度逼近法, 提出了一种用于求解单调变分不等式的修正惯性次梯度外梯度算法, 本文提出的算法提高了原算法的收敛性, 并证明了由算法生成的序列强收敛于一个特定的解。

2. 预备知识

令 H 为一个实 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示为 H 中的内积, $\|\cdot\|$ 表示为 H 中的诱导范数, $C \subset H$ 是非空闭凸子集。 $\{x_n\}$ 强收敛到 x , 记为 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$; $\{x_n\}$ 弱收敛到 x , 记为 $x_n \rightharpoonup x (n \rightarrow \infty)$ 。

对 $\forall x, y \in H$ 和 $\alpha \in R$, 有:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \tag{1}$$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y \rangle \tag{2}$$

命题 2.1 设 $\alpha, \beta \in R$, 对任意的 $x, y, z \in H$, 有

$$\|(1-\alpha)x + \alpha[(1-\beta)y + \beta z]\|^2 \leq (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha(1-\beta)\|y\|^2 + \alpha\beta\|z\|^2$$

证明: 使用两次(1)式, 得

$$\begin{aligned} \|(1-\alpha)x + \alpha[(1-\beta)y + \beta z]\|^2 &= \|(1-\alpha)x + \alpha[(1-\beta)y + \beta z]\|^2 \\ &\leq (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|(1-\beta)y + \beta z\|^2 \\ &\leq (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha(1-\beta)\|y\|^2 + \alpha\beta\|z\|^2 \end{aligned} \quad \square$$

引理 2.1 [17] 设 $C \subset H$ 是闭凸集, 则对 $\forall x \in H$, 有

$$(1) \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle, \forall y \in H$$

$$(2) \|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2, \forall y \in H$$

$$(3) z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \forall y \in C$$

定义 2.1 令 $T: H \rightarrow H$ 是一个映射, 对 $\forall x, y \in H$, 有

(1) 若存在常数 $L > 0$, 有下面式子成立, 则称映射 T 是 Lipschitz 连续的

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$$

(2) 若有下面式子成立, 则称映射 T 是单调的

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0$$

引理 2.2 [18] 设 Ω 是 Hilbert 空间中 H 上的一个闭凸集, $A: H \rightarrow H$ 是 Ω 上的一个单调且 Lipschitz 连续的映射, $VI(\Omega, A) \neq \emptyset$ 且 τ 为一个正实数, 使得 $\tau \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$ 。令 $\{x_n\} \subset H$ 定义为:

$$\begin{aligned} x_0 &\in H \\ y_n &= P_\Omega(x_n - \tau Ax_n) \\ T_n &= \{x \in H : \langle x_n - \tau Ax_n - y_n, x - y_n \rangle \leq 0\} \\ z_n &= P_{T_n}(x_n - \tau Ay_n) \end{aligned}$$

那么, 对 $\forall p \in VI(\Omega, A)$, 我们有:

$$\|z_n - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - (1-\tau L)\|y_n - x_n\|^2 - (1-\tau L)\|z_n - y_n\|^2$$

3. 修正的惯性次梯度外梯度方法

设 $A: H \rightarrow H$ 为一个在 H 上单调且 Lipschitz 连续的映射, $VI(\Omega, A) \neq \emptyset$ 。 $f: H \rightarrow H$ 是一个压缩映射, 压缩系数为 $\kappa \in [0, 1)$ 。

算法 3.1 (修正的惯性次梯度外梯度算法):

Step 0 (初始化): 设置 $\tau \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$, $\{\alpha_n\} \subset [0, \alpha)$ 其中 $\alpha > 0$, $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$, $\{\theta_n\} \subset (\tilde{\theta}, 1]$, $0 < \tilde{\theta} < 1$, 满足

以下条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$$

设置初始点 $x_0, x_1 \in C$ 和 $n := 1$ 。

Step 1: 计算:

$$\begin{aligned} w_n &= x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n &= P_C(w_n - \tau Aw_n) \end{aligned}$$

如果 $y_n = w_n$, 迭代停止(y_n 即为变分不等式的解)。否则进行 Step 2。

Step 2: 构造半空间:

$$T_n = \{z \in R^n \mid \langle w_n - \tau Aw_n - y_n, z - y_n \rangle \leq 0\}$$

计算: $z_n = P_{T_n}(w_n - \tau Ay_n)$ 。

Step 3: 计算:

$$x_{n+1} = (1 - \theta_n)x_n + \theta_n[(1 - \beta_n)z_n + \beta_n f(z_n)]$$

令 $n := n + 1$, 回到 Step 1。

定理 3.1: 假设序列 $\{\alpha_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| = 0 \tag{3}$$

由算法生成的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $p \in VI(C, A)$, 其中 $p = P_{VI(C, A)} \circ f(p)$ 。

要证明这个定理, 我们首先证明以下几个引理:

引理 3.1 由算法生成的序列 $\{x_n\}$ 都是有界的。

证明: 因为 $p \in VI(C, A)$, 通过引理 2.2, 我们有:

$$\|z_n - p\|^2 \leq \|w_n - p\|^2 - (1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 - (1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 \tag{4}$$

即有:

$$\|z_n - p\| \leq \|w_n - p\| \tag{5}$$

通过 w_n 的定义得:

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) - p\| \leq \|x_n - p\| + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| \\ &= \|x_n - p\| + \beta_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| \end{aligned} \tag{6}$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$, 所以存在常数 $M_1 \geq 0$, 对任意的 $n \geq 0$, 使得

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| \leq M_1 \tag{7}$$

结合(5)、(6)和(7)式, 我们得到:

$$\|z_n - p\| \leq \|w_n - p\| \leq \|x_n - p\| + \beta_n M_1 \tag{8}$$

通过 x_{n+1} 和 f 的定义可得:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \theta_n)(x_n - p) + \theta_n[(1 - \beta_n)(z_n - p) + \beta_n(f(z_n) - p)]\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n(1 - \beta_n)\|z_n - p\| \\ &\quad + \theta_n \beta_n \|f(z_n) - f(p)\| + \theta_n \beta_n \|f(p) - p\| \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n(1 - (1 - \kappa)\beta_n)\|z_n - p\| + \theta_n \beta_n \|f(p) - p\| \end{aligned} \tag{9}$$

把(8)代入(9)式, 得到:

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n(1 - (1 - \kappa)\beta_n)\|x_n - p\| + \theta_n\beta_n M_1 + \theta_n\beta_n\|f(p) - p\| \\
 &= (1 - (1 - \kappa)\theta_n\beta_n)\|x_n - p\| + (1 - \kappa)\theta_n\beta_n \frac{(M_1 + \|f(p) - p\|)}{1 - \kappa} \\
 &\leq \max\left\{\|x_n - p\|, \frac{M_1 + \|f(p) - p\|}{1 - \kappa}\right\} \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \max\left\{\|x_0 - p\|, \frac{M_1 + \|f(p) - p\|}{1 - \kappa}\right\}
 \end{aligned} \tag{10}$$

由此可以推出 $\{x_n\}$ 有界, 也可以顺便推出 $\{z_n\}, \{f(z_n)\}, \{w_n\}$ 有界。 □

引理 3.2 对于由算法生成的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{w_n\}$, 以及 $p \in VI(C, A)$, 有以下不等式成立:

$$\theta_n(1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 + \theta_n(1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 + \beta_n M_4$$

$$\text{其中: } M_2 := 2\|f(p) - p\| \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\|z_n - p\|\} + \|f(p) - p\|^2$$

$$M_3 := \sup_{n \in \mathbb{N}}\{2M_1\|x_n - p\| + \beta_n M_1^2\}$$

$$M_4 := M_2 + M_3$$

证明:

由 x_{n+1} 的定义和命题 2.1, 得到:

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n(1 - \beta_n)\|z_n - p\|^2 + \theta_n\beta_n\|f(z_n) - p\|^2 \\
 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n(1 - \beta_n)\|z_n - p\|^2 + \theta_n\beta_n(\|f(z_n) - f(p)\| + \|f(p) - p\|)^2
 \end{aligned}$$

又因为 f 是一个 κ -压缩, 所以由上式可得:

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n\|z_n - p\|^2 \\
 &\quad + \beta_n(2\|z_n - p\|\|f(p) - p\| + \|f(p) - p\|^2) \\
 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n\|z_n - p\|^2 + \beta_n M_2
 \end{aligned} \tag{11}$$

因为 $\{z_n\}$ 有界, 所以 $\{\|z_n - p\|\}$ 有界。

即令 $M_2 := 2\|f(p) - p\| \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\|z_n - p\|\} + \|f(p) - p\|^2$, 得到 M_2 是一个有界量, 且 $M_2 > 0$ 。

把(4)代入(11)得到:

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n\|w_n - p\|^2 - \theta_n(1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 \\
 &\quad - \theta_n(1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 + \beta_n M_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

通过(8)式我们得到:

$$\begin{aligned}
 \|w_n - p\|^2 &\leq (\|x_n - p\| + \beta_n M_1)^2 = \|x_n - p\|^2 + \beta_n(2M_1\|x_n - p\| + \beta_n M_1^2) \\
 &\leq \|x_n - p\|^2 + \beta_n M_3
 \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $M_3 > 0$ 。

把(13)式代入(12)式, 得到:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 - \theta_n(1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 - \theta_n(1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 + \beta_n(M_3 + M_2) \\ &\leq \|x_n - p\|^2 - \theta_n(1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 - \theta_n(1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 + \beta_n M_4 \end{aligned}$$

即得:

$$\theta_n(1 - \tau L)\|y_n - w_n\|^2 + \theta_n(1 - \tau L)\|z_n - y_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 + \beta_n M_4$$

其中 $M_4 := M_2 + M_3$ 。

□

引理 3.3 对于由算法生成的序列 $\{x_n\}$, 以及 $p \in VI(C, A)$, 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - (1 - \kappa)\beta_n\theta_n)\|x_n - p\|^2 \\ &\quad + (1 - \kappa)\beta_n\theta_n \left[\frac{2}{1 - \kappa} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle + \frac{3M}{(1 - \kappa)\theta_n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| \right] \end{aligned}$$

其中 $M := \sup\{\|x_n - p\|, \alpha\|x_n - x_{n-1}\| \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$ 。

证明: 根据 w_n 的定义我们有,

$$\begin{aligned} \|w_n - p\|^2 &= \|x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n \langle x_n - p, x_n - x_{n-1} \rangle + \alpha_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n \|x_n - p\| \|x_n - x_{n-1}\| + \alpha_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \end{aligned} \tag{14}$$

由 x_{n+1} 的定义以及(2)式我们得到:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|(1 - \theta_n)(x_n - p) + \theta_n[(1 - \beta_n)(z_n - p) + \beta_n(f(z_n) - f(p))]\| + \theta_n\beta_n \|f(p) - p\|^2 \\ &\leq \|(1 - \theta_n)(x_n - p) + \theta_n[(1 - \beta_n)(z_n - p) + \beta_n(f(z_n) - f(p))]\| \\ &\quad + 2\theta_n\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \end{aligned}$$

接下来对上式左边的范数部分使用命题 2.1, 得到:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n(1 - \beta_n)\|z_n - p\|^2 + \theta_n\beta_n \|f(z_n) - f(p)\|^2 \\ &\quad + 2\theta_n\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \end{aligned}$$

因为 f 是一个 κ -压缩, $\kappa \in [0, 1)$, 使用(5)式,

上式可得:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n(1 - \beta_n)\|z_n - p\|^2 + \theta_n\beta_n\kappa \|z_n - p\|^2 \\ &\quad + 2\theta_n\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \\ &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n(1 - (1 - \kappa)\beta_n)\|w_n - p\|^2 \\ &\quad + 2\theta_n\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \end{aligned} \tag{15}$$

把(14)式代入(15)式, 可得:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - \theta_n) \|x_n - p\|^2 + \theta(1 - (1 - \kappa)\beta_n) \|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n \|x_n - p\| \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\quad + \alpha_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + 2\theta_n \beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \\ &= (1 - (1 - \kappa)\beta_n \theta_n) \|x_n - p\|^2 + (1 - \kappa)\beta_n \theta_n \frac{2}{1 - \kappa} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \\ &\quad + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| (2\|x_n - p\| + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\|) \end{aligned}$$

又因为 $0 \leq \alpha_n < \alpha$, 所以由上式可得:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq (1 - (1 - \kappa)\beta_n \theta_n) \|x_n - p\|^2 + (1 - \kappa)\beta_n \theta_n \frac{2}{1 - \kappa} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle \\ &\quad + \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| (2\|x_n - p\| + \alpha \|x_n - x_{n-1}\|) \\ &\leq (1 - (1 - \kappa)\beta_n \theta_n) \|x_n - p\|^2 + (1 - \kappa)\beta_n \theta_n \frac{2}{1 - \kappa} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle + 3M\alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq (1 - (1 - \kappa)\beta_n \theta_n) \|x_n - p\|^2 \\ &\quad + (1 - \kappa)\beta_n \theta_n \left[\frac{2}{1 - \kappa} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle + \frac{3M}{(1 - \kappa)\theta_n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| \right] \end{aligned}$$

其中: $M := \sup\{\|x_n - p\|, \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \mid n \in \mathbb{N}\} > 0$ 。

□

以下是定理 3.1 的证明:

证明: 我们要证明 $\{\|x_n - \hat{p}\|^2\}$ 收敛到零, 下面我们考虑序列 $\{\|x_n - \hat{p}\|^2\}$ 的两种情况:

(一): 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意的 $n \geq N$, 使得 $\|x_{n+1} - \hat{p}\|^2 \leq \|x_n - \hat{p}\|^2$ 。

在引理 3.1 里证明了 $\{x_n\}$ 有界, 故可以推出 $\{\|x_n - \hat{p}\|^2\}$ 是有界的, 所以由 $\|x_{n+1} - \hat{p}\|^2 \leq \|x_n - \hat{p}\|^2$ 可以得到: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \hat{p}\|$ 存在。

根据引理 3.2, 我们可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - w_n\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y_n\| = 0 \tag{16}$$

由于 $\{x_n\}$ 是有界的, 就存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 令它收敛到 z , 我们可以推出 $\{\langle f(\hat{p}) - p, x_n - \hat{p} \rangle\}$ 是有界的, 那么存在其子列 $\{\langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{n_k} - \hat{p} \rangle\}$, 使得:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_n - \hat{p} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{n_k} - \hat{p} \rangle = \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, z - \hat{p} \rangle \tag{17}$$

根据(16)和(文献[19]引理 3.2), 我们可以得到 $z \in VI(C, A)$ 。

通过(17)、引理 2.1(3)以及 $\hat{p} = P_{VI(C,A)} \circ f(\hat{p})$, 就有:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_n - \hat{p} \rangle = \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, z - \hat{p} \rangle \leq 0 \tag{18}$$

现在我们证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \tag{19}$$

通过(16)可以得到:

$$\|z_n - w_n\| = \|z_n - y_n + y_n - w_n\| \leq \|z_n - y_n\| + \|y_n - w_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{20}$$

另一方面, 我们有:

$$\|x_n - w_n\| = \alpha_n \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\| \beta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{21}$$

$$\|x_n - z_n\| \leq \|x_n - w_n\| + \|w_n - y_n\| + \|y_n - z_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{22}$$

所以由 x_{n+1} 的定义以及(22)式可以得到:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z_n\| &= \|(1-\theta_n)(x_n - z_n) + \theta_n \beta_n (f(z_n) - z_n)\| \\ &\leq (1-\theta_n)\|x_n - z_n\| + \theta_n \beta_n \|f(z_n) - z_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{23}$$

根据(20)、(21)和(23)式, 可以推出:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_{n+1} - z_n\| + \|z_n - w_n\| + \|w_n - x_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ 。

结合(18)和(19)式, 我们有:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{n+1} - \hat{p} \rangle = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_n - \hat{p} \rangle = \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, z - \hat{p} \rangle \leq 0$$

因此, 根据(文献[18]引理 2.1)和引理 3.3, 我们就可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \hat{p}\| = 0$ 。

(二): 存在 $\{\|x_n - \hat{p}\|^2\}$ 的子序列 $\{\|x_{n_j} - \hat{p}\|^2\}$, 使得对任意的 $j \in \mathbb{N}$ 有

$$\|x_{n_j} - \hat{p}\|^2 < \|x_{n_{j+1}} - \hat{p}\|^2。$$

在这种情况下, 根据(文献[20]引理 2.3), 存在一个非减序列 $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$, 并有以下不等式成立:

对任意的 $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_{m_k} - \hat{p}\|^2 \leq \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2, \|x_k - \hat{p}\|^2 \leq \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 \tag{24}$$

根据引理 3.2, 我们有:

$$\theta_{m_k} (1-\tau L) \|y_{m_k} - w_{m_k}\|^2 + \theta_{m_k} (1-\tau L) \|z_{m_k} - y_{m_k}\|^2 \leq \|x_{m_k} - \hat{p}\|^2 - \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 + \beta_{m_k} M_4 \leq \beta_{m_k} M_4$$

因此, 我们得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{m_k} - w_{m_k}\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{m_k} - y_{m_k}\| = 0$$

与(一)的证明类似, 我们可以得到:

$$\|x_{m_{k+1}} - x_{m_k}\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \text{ 和 } \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{m_{k+1}} - \hat{p} \rangle \leq 0$$

根据引理 3.3, 有:

$$\begin{aligned} \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 &\leq (1-(1-\kappa)\beta_{m_k}\theta_{m_k})\|x_{m_k} - \hat{p}\|^2 \\ &\quad + (1-\kappa)\beta_{m_k}\theta_{m_k} \left[\frac{2}{1-\kappa} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{m_{k+1}} - \hat{p} \rangle + \frac{3M}{(1-\kappa)\theta_{m_k}} \frac{\alpha_{m_k}}{\beta_{m_k}} \|x_{m_k} - x_{m_{k-1}}\| \right] \end{aligned}$$

通过(24)和上式, 有:

$$\begin{aligned} \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 &\leq (1-(1-\kappa)\beta_{m_k}\theta_{m_k})\|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 \\ &\quad + (1-\kappa)\beta_{m_k}\theta_{m_k} \left[\frac{2}{1-\kappa} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{m_{k+1}} - \hat{p} \rangle + \frac{3M}{(1-\kappa)\theta_{m_k}} \frac{\alpha_{m_k}}{\beta_{m_k}} \|x_{m_k} - x_{m_{k-1}}\| \right] \end{aligned}$$

所以, 我们得到:

$$\|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\|^2 \leq \frac{2}{1-\kappa} \langle f(\hat{p}) - \hat{p}, x_{m_{k+1}} - \hat{p} \rangle + \frac{3M}{(1-\kappa)\theta_{m_k}} \frac{\alpha_{m_k}}{\beta_{m_k}} \|x_{m_k} - x_{m_{k-1}}\|$$

因此, 我们可以推出:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_{k+1}} - \hat{p}\| \leq 0 \quad (25)$$

结合(24)和(25), 我们有:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \hat{p}\| \leq 0, \text{ 所以就有 } x_k \rightarrow \hat{p} \ (k \rightarrow \infty)$$

□

4. 结语

变分不等式问题是优化领域里的一个被学者们广泛研究的问题, 而用以求解变分不等式问题的次梯度外梯度算法更是专家学者们的重点关注对象, 但大部分文献里的次梯度外梯度算法都只证明了算法的弱收敛性, 本文针对 Duong 和 Dang 提出的惯性次梯度外梯度算法, 结合粘度逼近法, 提出了一种具有强收敛性的修正惯性次梯度外梯度算法。

参考文献

- [1] Stampacchia, G. (1964) Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **258**, 4413-4416.
- [2] Korpelevich, G.M. (1976) An Extragradient Method for Finding Saddle Points and Other Problems. *Ekonomikai Matematicheskie Metody*, **12**, 747-756.
- [3] Dong, Q.L., Jiang, D. and Gibali, A. (2018) A Modified Subgradient Extragradient Method for Solving the Variational Inequality Problem. *Numerical Algorithms*, **79**, 927-940. <https://doi.org/10.1007/s11075-017-0467-x>
- [4] Van Hieu, D. and Thong, D.V. (2018) New Extragradient-Like Algorithms for Strongly Pseudomonotone Variational Inequalities. *Journal of Global Optimization*, **70**, 385-399. <https://doi.org/10.1007/s10898-017-0564-3>
- [5] Thong, D.V. and Van Hieu, D. (2018) Modified Subgradient Extragradient Algorithms for Variational Inequality Problems and Fixed Point Problems. *Optimization*, **67**, 83-102. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1377199>
- [6] Nadezhkina, N. and Takahashi, W. (2006) Weak Convergence Theorem by an Extragradient Method for Nonexpansive Mappings and Monotone Mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **128**, 191-201. <https://doi.org/10.1007/s10957-005-7564-z>
- [7] Censor, Y.A. and Gibali, S.R. (2012) Extensions of Korpelevich's Extragradient Method for the Variational Inequality Problem in Euclidean Space. *Optimization*, **61**, 1119-1132. <https://doi.org/10.1080/02331934.2010.539689>
- [8] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S. (2011) The Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **148**, 318-335. <https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3>
- [9] 陈家欣, 叶明露. 求解单调变分不等式的修正次梯度外梯度算法[J/OL]. 西华师范大学学报: 自然科学版, 2020, 42(1): 6.
- [10] 张双德. 单调变分不等式的新次梯度外梯度算法[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2020.
- [11] Thong, D.V. and Van Hieu, D. (2020) A Strong Convergence of Modified Subgradient Extragradient Method for Solving Bilevel Pseudomonotone Variational Inequality Problems. *Optimization*, **69**, 1313-1334. <https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1686503>
- [12] Alvarez, F. (2004) Weak Convergence of a Relaxed and Inertial Hybrid Projection Proximal Point Algorithm for Maximal Monotone Operators in Hilbert Space. *SIAM Journal on Optimization*, **14**, 773-782. <https://doi.org/10.1137/S1052623403427859>
- [13] Alvarez, F. and Attouch, H. (2001) An Inertial Proximal Method for Maximal Monotone Operators via Discretization of a Nonlinear Oscillator with Damping. *Set-Valued Analysis*, **9**, 3-11. <https://doi.org/10.1023/A:1011253113155>
- [14] Polyak, B.T. (1964) Some Methods of Speeding Up the Convergence of Iterative Methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **4**, 1-17. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90137-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90137-5)

- [15] Thong, D.V. and Van Hieu, D. (2017) Modified Subgradient Extragradient Method for Inequality Variational Problems. *Numerical Algorithms*, **79**, 597-610. <https://doi.org/10.1007/s11075-017-0452-4>
- [16] Moudafi, A. (2000) Viscosity Approximations Methods for Fixed Point Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **241**, 46-55. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6615>
- [17] Goebel, K. and Reich, S. (1984) Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings. Marcel Dekker, New York and Basel.
- [18] Xu, H.-K. (2002) Another Control Condition in an Iterative Method for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **65**, 109-113. <https://doi.org/10.1017/S0004972700020116>
- [19] Kraikaew, R. and Saejung, S. (2014) Strong Convergence of the Halpern Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 399-412. <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0494-2>
- [20] Maingé, P.E. (2008) A Hybrid Extragradient-Viscosity Method for Monotone Operators and Fixed Point Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **47**, 1499-1515. <https://doi.org/10.1137/060675319>