Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2021, 11(3), 268-273
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2021.113031

Hans汉斯

一类二人微分博弈Nash均衡的本质连通区

计 伟

贵州建设职业技术学院信息管理学院，贵州 贵阳
Email: weiji2021@126.com

收稿日期：2021年6月8日；录用日期：2021年7月14日；发布日期：2021年7月21日

摘 要

应用集值分析理论，证明了控制系统关于右端函数发生扰动时，一类二人微分博弈问题Nash均衡集存在极小本质集和本质连通区。

关键词

本质连通区，极小本质集，Nash均衡，上半连续紧映射

Essential Component of Nash Equilibria for a Class of Two-Person Differential Games

Wei Ji

School of Information and Management, Guizhou Polytechnic of Construction, Guiyang Guizhou
Email: weiji2021@126.com

Received: Jun. 8th, 2021; accepted: Jul. 14th, 2021; published: Jul. 21st, 2021

Abstract

By employing the set-valued analysis theory, we show that the existence of minimal essential set and essential component for Nash equilibrium point set of against the perturbation of the right-hand side function of control system for a class of two-person differential games.

文章引用: 计伟. 一类二人微分博弈 Nash 均衡的本质连通区[J]. 运筹与模糊学, 2021, 11(3): 268-273.
DOI: 10.12677/orf.2021.113031

Keywords

Essential Component, Minimal Essential Set, Nash Equilibria, Upper Semi-Continuous with Compact Valued

1. 引言

博弈论是自 1944 年[1] John Von Neumann 和 Oskar Morgenstern 合著出版《Theory of Games and Economic Behavior》一书而宣告诞生，该书主要介绍矩阵博弈、零和博弈、及合作博弈，同样他们的工作孕育着微分博弈的思想。微分博弈以 R. Isaacs 于 1965 年[2]的专著《Differential Games》为其主要标志，是指博弈参与人在进行博弈活动时，参与人从各自的控制集中选择控制策略，策略间的相互作用要通过的状态由微分方程(微分系统或状态方程)来描述的博弈。1971 年[3]，A. Friedman 在起其专著《Differential Games》中，应用离散近似序列的方法建立了微分博弈的值与鞍点的存在性，奠定了微分博弈的数学理论。

国内关于微分博弈的最早专著是 1987 年[4]，由科学出版社出版，东北大学张嗣瀛院士编著的《微分对策》。2000 年[5]，由国防科技大学李登峰教授编著，国防工业出版社出版的《微分对策及其应用》，该专著是国内第一部从数学角度详细、系统介绍微分对策的概念、理论、方法及其应用的专著。

此外，2015 年[6]，J. M. Yong 编著的《Differential Games (A concise introduction)》，对近年来关于二人零和微分博弈、无界控制微分博弈、追逃微分博弈、线性二次微分博弈和切换系统微分博弈等的研究进行了详细阐述，并撰写了大量的研究评注以及列举了大量参考文献。

无论是一般非合作博弈，合作博弈，还是微分博弈的研究，其解的存在性和稳定性都是研究热点问题，也是基础问题。同时，我们也深知，相对存在性的研究，其稳定性研究更复杂、更本质。事实上，对一般博弈模型，我们不仅关心博弈均衡的存在性，因为对大多数博弈问题，Nash 均衡是存在的，但通常不唯一，甚至许多博弈模型存在无穷多均衡解，这就给博弈参与人带来选择困难，甚有可能博弈的结果是非博弈均衡点。此外，当我们研究问题的环境或参数发生微小改变时，改变后的博弈问题是否还存在博弈均衡点？若存在，对其均衡点的影响是大还是小？这些就是稳定性问题。

事实上，关于稳定性研究，有许多专家学者已经做了大量富有成效的研究工作。1950 年[7]，Fort 为研究连续映射不动点的稳定性，引入了本质不动点的概念。1962 年[8]，W. T. Wu 和 J. H. Jiang 对有限 N 人非合作博弈首先引入了本质 Nash 平衡点的概念。1963 年[9]，J. H. Jiang 进一步对有限 N 人非合作博弈首先引入了 Nash 平衡点集本质连通区的概念，并证明了对任何有限 N 人非合作博弈，其 Nash 均衡集至少存在一个本质连通区。1986 年[10]，Kohlberg 和 Mertens 研究了均衡策略稳定性，他们应用代数几何的方法证明了每个有限博弈的 Nash 平衡点集由有限个连通区组成，而且其中至少有一个是本质的。之后，本质稳定性的概念被广泛用于最优化问题、不动点问题、向量优化问题、无限博弈 Nash 均衡问题等(见文献[11]及其相应的引用文献)。J. Yu 和 S. W. Xiang [12]，以及 J. Yu 和 H. Yang [13]，应用集值分析方法，先后在 1999 年和 2004 年，分别证明了 Nash 均衡点集的本质连通区，以及集值映射均衡点集的本质连通区。

特别地，在 2020 年[14]，J. Yu 和 D. T. Peng 讨论了非合作微分博弈平衡点集的通有稳定性，他们证明了微分博弈均衡点集形成一个稠密剩余集，并且任何一个微分博弈都可以通过一个稳定博弈任意逼近，也就是在 Baire 分类意义下，大多数微分博弈是通有稳定的。实质上，早在 2014 年[15]，J. Yu 等人，也是基于集值映射理论，研究了经典最优控制关于状态方程右端函数扰动时的通有稳定性。受到[15]的启发，2015 年[16]、[17]，H. Y. Deng 和 W. Wei 已先后基于集值映射理论，应用非线性方法，状态方程关于右端函数扰动时，分别研究了具有一阶等度连续的非线性最优控制的通有稳定性，以及半线性发展方程支配的目标泛函为二次型时，最优控制问题的通有稳定性。

受到以上文献的启发，应用文献[18]的存在性结果，我们构造一个完备度量空间，应用集值分析的方法，证明了一类微分博弈关于控制系统关于右端函数发生扰动时，对应的 Nash 均衡点集至少存在一个极小本质集，每个极小本质集都是连通的，以及本质连通区的存在性。

2. 模型和预备知识

我们考虑如下的控制系统支配的二人微分博弈模型。设 R^p， R^q 是实 Euclidean 空间，$U \subseteq R^p$ 和 $V \subseteq R^q$ 是度量空间，对任意的 $0 \le s < t \le 1$，

$$U^*[s,t] = \{u(\cdot) | u(\cdot):[s,t] \to U\text{连续}\},$$
$$V^*[s,t] = \{v(\cdot) | v(\cdot):[s,t] \to V\text{连续}\}。$$

函数 $u(\cdot) \in U^*[s,t]$ 和 $v(\cdot) \in V^*[s,t]$ 分别叫做参与人 1 和 2 的控制过程，也即参与人 1 和 2 分别从控制选择集 U 和 V 中选择控制。考虑如下的状态方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)X(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t),\ t \in [0,1], \\ x(0) = x_0。\end{cases} \tag{2.1}$$

为了度量控制过程 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 的性能指标，我们引入如下的目标泛函：

$$P_1(u(\cdot),v(\cdot)) = \int_0^1 F_1(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 G_1(t)v(t)\mathrm{d}t + H_1(x) \tag{2.2}$$

$$P_2(u(\cdot),v(\cdot)) = \int_0^1 F_2(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 G_2(t)v(t)\mathrm{d}t + H_2(x) \tag{2.3}$$

我们定义如下的博弈问题。

博弈(DG)：对任意的 $(u(\cdot),v(\cdot)) \in U^*[0,1] \times V^*[0,1]$，若存在 $(u^*(\cdot),v^*(\cdot)) \in U^*[0,1] \times V^*[0,1]$，使得下式成立：

$$P_1(u^*(\cdot),v^*(\cdot)) = \sup_{u(\cdot)\in U^*[0,1]} P_1(u(\cdot),v^*(\cdot)),$$
$$P_2(u^*(\cdot),v^*(\cdot)) = \sup_{v(\cdot)\in V^*[0,1]} P_2(u^*(\cdot),v(\cdot))。$$

则称 $(u^*(\cdot),v^*(\cdot))$ 是 Nash 均衡点。

现在，我们引入如下假设。

[C1] 控制取值集 U， V 分别是 R^p 和 R^q 中的紧凸集。

[C2] $A(t),B(t),C(t)$ 分别是定义在 $[0,1]$ 上连续的 $n \times n$， $n \times p$， $n \times q$ 维矩阵。

[C3] F_1、G_1、F_2 和 G_2 均是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数。H_1 和 H_2 则是定义在 $C[0,1]$ 上的连续线性函数。

1975 年[18]，T. Parthasarathy 和 T. E. Raghvan 在以上假设条件下，证明了 Nash 均衡点的存在性结果。

引理 2.1 [18] 假设[C1]~[C3]成立，给定初始对 $(0, x_0)$，则博弈(DG)存在 Nash 均衡点。

下面，为研究本质连通区的存在性，我们构造如下的问题空间。不妨设

$$f\left(t, X(t), u(t), v(t)\right) = A(t)X(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t)。$$

和

$$M = \left\{ f \middle| f\text{满足条件}[C2] \right\}。$$

$\forall f、g \in M$，定义距离为：

$$d(f, g) = \sup_{(t,x,u,v)\in[0,1]\times R^n\times U\times V} \left\| f(t,x,u,v) - g(t,x,u,v) \right\|。$$

则容易证明 (M, d) 是一个完备度量空间。

定义 2.2：设

$$N(f) = \left\{ \left(u^*(\cdot), v^*(\cdot)\right) \middle| \forall f \in M, \left(u^*(\cdot), v^*(\cdot)\right)\text{是微分博弈}(\mathrm{DG})\text{的Nash均衡点} \right\}。$$

则 $N: f \to N(f)$ 定义了一个 $M \to U \times V$ 集值映射，记为 $N: M \to 2^{U\times V}$。

为研究其解集的本质连通区，根据文献[11]，我们引入如下必要的定义和引理。

定义 2.3：$\forall f \in M$，$N(f)$ 是一个非空集合，对 $2^{U\times V}$ 中的任意开集 G，$G \supset N(f)\left(G \cap N(f) \neq \varnothing\right)$，若存在 V 的任意开领域 $O(f)$，使得 $\forall g \in O(f)$，有 $O \supset N(f)\left(O \cap N(g) \neq \varnothing\right)$，称集值映射 N 在 f 上半连续(下半连续)。若集值映射 N 在 f 既上半连续，又下半连续，则称 N 在 f 连续。若 $\forall f \in M$，集值映射 N 在 f 上半连续(下半连续、连续)，则称 N 在 M 上半连续(下半连续、连续)。

定义 2.4：若 $f \in M$，$N(f)$ 是一个非空紧集，且 N 在 f 上半连续，则称 N 是一个上半连续紧映射(USCO)。

定义 2.5：称 Graph $N(f) = \left\{ (f, u, v) \in M \times U \times V \middle| (u, v) \in N(f) \right\}$ 为 N 的图像，若 N 的图像 Graph $N(S)$ 是闭的，则称集值映射 N 为闭映射。

引理 2.4：设集值映射 $N: M \to 2^{U\times V}$ 是闭的，且 $U \times V$ 是紧集，则 N 是一个上半连续映射。

下面，我们给出一个关于集值映射 N 的结论。

定理 2.1 集值映射 $N: M \to 2^{U\times V}$ 是一个上半连续的紧映射(USCO)。

证明：因 U 是紧集，而 $\forall f \in M$，$N(f) \subset U \times V$，所以再由引理 2.1 可知，我们只需证明集值映射 S 的图像 $\mathrm{Graph}(S) = \left\{ (f, u, v) \in M \times U \times V : u \times v \in S(f) \right\}$ 为闭即可。即证明 $\forall f^n \in M, f^n \to f, \forall \left(u^n, v^n\right) \in S\left(f^n\right)$，$\left(u^n, v^n\right) \to \left(u^*, v^*\right)$，则 $\left(u^*, v^*\right) \in S(f)$。

因 $\left(u^n, v^n\right) \in S\left(f^n\right)$，所以 $\forall (u, v) \in U \times V$，我们得到：$P_1\left(u^n, v^n\right) \geq P_1\left(u^n, v\right)$，$P_2\left(u^n, v^n\right) \geq P_2\left(u, v^n\right)$。又因为 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 连续，并且积分区间为有限区间。因此，通过假(C3)，令 $n \to \infty$，$\forall (u, v) \in U \times V$，我们可得到 $P_1\left(u^*, v^*\right) \geq P_1\left(u^*, v\right)$，$P_2\left(u^*, v^*\right) \geq P_2\left(u, v^*\right)$。因此，$\left(u^*, v^*\right) \in S(f)$。即：集值映射 N 是一个上半连续的紧映射。

3. 本质连通区

这一节，我们将给出本质连通区和极小本质集的存在性结论。因此，我们先给出本质集、极小本质集、本质连通区的定义。

定义 4.1：$\forall f \in M$，设 $d(f)$ 是 $N(f)$ 中的非空闭子集，如果对 $2^{U\times V}$ 中任意开集 O，$O \supset d(f)$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall f' \in M$，$\rho(f, f') < \delta$，有 $N(f') \cap \mathrm{O} \neq \varnothing$，则称 $d(f)$ 是 $N(f)$ 中本质集。

定义 4.2：设 $m(f)$ 是 $N(f)$ 的本质集，且是 $N(f)$ 中所有本质集按包含关系为序的极小元，则称 $m(f)$ 是 $N(f)$ 极小本质集。显然若 $N(f)$ 极小本质集存在，则它不一定是唯一的。

定义 4.3：若 $N(f)$ 可以分解为有限或无限个两两不相交的连通区的并集，即

$$N(f)=\bigcup_{i\in I}C_i(f),$$

其中 I 是一个指标集。若存在 $N(f)$ 的一个连通区 $C_i(f)$ 是 $N(f)$ 本质集，则称 $C_i(f)$ 是 $N(f)$ 一个本质连通区。

定理 4.1：$\forall f\in M$，$N(f)$ 至少存在一个极小本质集。

证明：由定理 2.3 知道，集值映射 $N:M\Rightarrow 2^{U\times V}$ 是一个上半连续的紧映射，即对 $U\times V$ 的任意开集 O，且 $O\supset N(f)$，则存在 $\delta>0$，使得 $\forall f'\in M$，当 $\rho(f,f')<\delta$ 时，$O\supset N(f')$。因此，$N(f)$ 是它本身的一个本质集。设 θ 是以包含关系为序，且由所有本质集组成的集合，且 θ 是一个半序集，且 $\theta\neq\varnothing$，下令 $e(f)=\bigcap_{i\in I}e_i(f)$，其中 $\{e_i(f):i\in I\}$ 是 θ 中的全序子集，不难验证 $e(f)$ 为紧集，$e(f)\neq\varnothing$，且 $e(f)$ 显然是递减的。θ 中任意全序子集 $\{e_i(f):i\in I\}$ 必有下界 $e(f)$，由 Zorn 引理，θ 必有极小元，因而极小元必是的 $N(f)$ 的极小本质集。

定理 4.2：$\forall f\in M$，$N(f)$ 的每个极小本质集都是连通的。

证明：用反证法给予证明，设 $m(f)$ 是 $N(f)$ 的极小本质集，而 $m(f)$ 不是连通的，则存在两个非空闭集 $C_1(f),C_2(f)$，和两个开集 W_1,W_2，使得 $W_1\supset C_1(f),\ W_2\supset C_2(f)$，$m(f)=C_1(f)\cup C_2(f)$，而 $W_1\cap W_2=\varnothing$。因 $m(f)$ 是极小本质集，故 $C_1(f),C_2(f)$ 都不是 $N(f)$ 的本质集，所以存在两个开集 G_1,G_2，$G_1\supset C_1(f),\ G_2\supset C_2(f)$，而 $\forall\delta>0$，$\rho(f,f^1)<\delta,\ \rho(f,f^2)<\delta$，而 $N(f^1)\cap G_1=N(f^2)\cap G_2=\varnothing$，记 $U_1=W_1\cap G_1$，$U_2=W_2\cap G_2$，则 U_1,U_2 是开集，则 $U_1\supset C_1(f),\ U_2\supset C_2(f)$，且 $U_1\cap U_2=\varnothing$，存在两个开集 V_1,V_2，使得 $C_1(f)\subset V_1\subset\bar{V}_1\subset U_1$，$C_2(f)\subset V_2\subset\bar{V}_2\subset U_2$，显然 $N(f^1)\cap\bar{V}_1=\varnothing$，$N(f^2)\cap\bar{V}_2=\varnothing$，$\bar{V}_1\cup\bar{V}_2\neq\varnothing$。

因此，存在 $\tilde{f}\in M$，使得，$\rho(\tilde{f},f^1)\le\rho(f^1,f^2)\le\rho(f,f^1)+\rho(f,f^2)<2\delta$，$\rho(\tilde{f},f^2)\le\rho(f^1,f^2)\le\rho(f,f^1)+\rho(f,f^2)<2\delta$，而 $N(\tilde{f})\cap(\bar{V}_1\cup\bar{V}_2)=\varnothing$。因 $V_1\cup V_2$ 是开集，且 $V_1\cup V_2\supset C_1(f)\cup C_2(f)=m(f)$，而 $\rho(\tilde{f},f)\le\rho(f,f^1)+\rho(\tilde{f},f^1)<3\delta$。这显然与 $N(\tilde{f})\cap(V_1\cup V_2)=\varnothing$ 矛盾。因此，$m(f)$ 是 $N(f)$ 的极小本质集。

定理 4.3：$\forall f\in M$，$N(f)$ 至少存在一个本质连通区。

证明：由定理 4.1 和定理 4.2，$N(f)$ 至少有一个极小本质集 $e(f)$，且 $e(f)$ 是连通的，故 $\forall i\in I$，使 $e(f)\subset C_i(f)$，对 U 中任意开集 O，$O\supset C_i(f)$，则 $O\supset e(f)$，因 $e(f)$ 是本质的，$\exists\delta>0$，使得 $\forall f'\in M$，$\rho(f,f')<\delta$，有 $N(f')\cap O\neq\varnothing$，于是连通区 $C_i(f)$ 是本质的。

4. 结论

应用集值分析理论，文献[14] [15] [16] [17]开启了从整体上考虑问题对象发展扰动时，微分博弈的稳定性研究。本文基于集值映射理论，应用非线性方法，讨论了一类特殊的二人微分博弈控制系统关于右端函数发生扰动时，Nash 均衡本质连通区和极小本质集的存在性。

基金项目

国家自然科学基金(11661020)。

参考文献

[1] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press,

Princeteon.
[2] Isaacs, R. (1965) Differential Games. New York, Wiley.
[3] Friedman, A. (1971) Differential Games. New York, Wiley.
[4] 张嗣瀛. 微分博弈[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
[5] 李登峰. 微分博弈及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
[6] Yong, J.M. (2015) Differential Games (A Concise Introduction). Word Scientific, USA. https://doi.org/10.1142/9121
[7] Fort, M.K. (1950) Essential and Nonessential Fixed Points. *American Journal of Mathematics*, **72**, 315-322. https://doi.org/10.2307/2372035
[8] Wu, W.T. and Jiang, J.H. (1962) Essential Equilibrium Points of N-Person Noncooperative Games. *Scientia Sincia*, **11**, 1307-1322.
[9] Jiang, J.H. (1963) Essential Component of the Set of Fixed Points of the Multi-Valued Maps and Its Applications to the Theory of Games. *Scientia Sincia*, **12**, 951-964.
[10] Kohlberg, E. and Mertens, J.F. (1991) On the Strategic Stability of Equilibrium. Springer-Verlag, Berlin.
[11] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
[12] Yu, J. and Xiang, S.W. (1999) On Essential Components of the Nash Equilibrium Points. *Nonlinear Analysis TMA*, **38**, 259-264. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(98)00193-X
[13] Yu, J. and Yang, H. (2004) The Essential Components of the Set of Equilibrium Points for Set-Valued Maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **300**, 334-342. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.06.042
[14] Yu, J. and Peng, D.T. (2020) Generic Stability of Nash Equilibrium for Noncooperative Differential Games. *Operations Research Letters*, **48**, 157-162. https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.001
[15] Yu, J., Liu, Z.X., Peng, D.T., Xu, D.Y. and Zhou, Y.H. (2014) Existence and Stability of Optimal Control. *Optimal Control Applications and Methods*, **35**, 721-729. https://doi.org/10.1002/oca.2096
[16] Deng, H.Y. and Wei, W. (2015) Existence and Stability for Nonlinear Optimal Control Problems with 1-Mean Equi-Continuous Controls. *Journal of Industrial and Management Optimation*, **11**, 1409-1422. https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.1409
[17] Deng, H.Y. and Wei, W. (2015) Stability Analysis for Optimal Control Problems Governed by Semilinear Evolution Equation. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article No. 103. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0443-5
[18] Parthasarathy, T. and Raghavan, T.E.S. (1975) Existence of Saddle Points and Nash Equilibrium Points for Differential Games. *SIAM Journal on Control*, **5**, 977-980. https://doi.org/10.1137/0313060