Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2022, 12(3), 1016-1028
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2022.123108

基于约束区间运算的区间线性微分方程组零解的稳定性

智照丹，陶　娟*

贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2022年7月15日；录用日期：2022年8月11日；发布日期：2022年8月17日

摘　要

基于约束区间运算，本文研究了区间线性微分方程组的基本解矩阵，利用约束区间矩阵特征值，给出了区间线性微分方程组零解渐近稳定、稳定、不稳定的充要条件。具体的例子表明，区间线性微分方程零解的稳定性，不仅随着约束区间表达式中参数的变化而变化，个别问题也随着方程组维数的变化而变化。

关键词

区间分析，约束区间运算，区间线性微分方程，基解矩阵，稳定性

Stability of Zero Solutions of Interval Linear Differential Equations Based on Constrained Interval Algorithm

Zhaodan Zhi, Juan Tao*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Jul. 15th, 2022; accepted: Aug. 11th, 2022; published: Aug. 17th, 2022

Abstract

Based on the constrained interval algorithm, this paper studies the fundamental solution matrix of interval linear differential equations, and gives the necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability, stability and instability of the zero solution of interval linear differential equations by using the eigenvalues of the constrained interval matrix. Specific examples show that the stability of the zero solution of interval linear differential equations changes not only with the change

*通讯作者。

文章引用：智照丹，陶娟．基于约束区间运算的区间线性微分方程组零解的稳定性[J]．运筹与模糊学，2022，12(3): 1016-1028. DOI: 10.12677/orf.2022.123108

of the parameters in the constrained interval expression, but also with the change of the dimension of some equations.

Keywords

Interval Analysis, Constrained Interval Arithmetic, Interval Linear Differential Equation, Fundamental Solution Matrix, Stability

1. 引言

在工程领域中，许多与变化率有关的实际问题被描述为微分方程问题。然而，在系统建模的过程中和系统输入参数的测量中，常常会遇到不确定因素的影响，比如模糊、随机、扰动参数，因此，不确定微分方程越来越受到人们的关注。在某些情况下，人们找不到系统中变量不确定因素的规律，但是能找到或者给出可以接受的变量的界限。在这样的情况下，将区间分析引入到微分方程的研究中，从而出现了区间微分方程的研究分支。

目前，对于区间数，主要有以下两种类型的区间运算：一是由 Moore 等人提出的标准区间运算[1] [2]，标准区间运算用闭区间变量代替点变量进行运算，但是实数理论中的一些运算性质在标准区间运算中并不成立，比如加法逆不存在，区间运算的分配律不满足，这就导致实数理论中的很多经典结论，不能推广到区间运算；二是由 Lodwick 提出的约束区间运算[3] [4]，约束区间运算将区间表示为从$[0,1]$ (参数)到具有非负斜率(区间宽度)的线性表达式的映射，而表达式空间具有实数空间的运算性质，克服了标准区间运算中加法逆不存在和分配律不满足的固有问题，因此可以将微分方程中一些经典的结论，推广到区间微分方程。

基于标准区间运算，研究区间向量值微分方程的文献较为有限[5] [6] [7] [8] [9]。Michel 等人[5] [6] [7]针对一类状态矩阵含扰动参数的一阶自治常微分方程组初值问题，系统地讨论了区间分析在线性系统中的应用问题。与此同时，也对带扰动项的线性微分方程组的所有可能解的界估计展开了研究[8]；Goldsztejn 等人[9]利用计算机断层扫描研究区间矩阵指数函数的区间估计问题。目前，对于区间微分方程组的研究，研究者们采用标准区间分析，仅仅对含扰动参数的常微分方程组的矩阵指数函数或者解进行界估计，而不能像经典微分方程那样去定义区间微分方程的基解矩阵，进而也很少看到关于区间微分方程组平衡解稳定性的研究。

Lodwick 提出约束区间运算后，研究者们将约束区间运算用于区间最优化[10] [11] [12]的研究，同时对区间微分方程组展开研究[13] [14] [15]。Mizukoshi [13] [14]等人通过对区间特征值问题的研究，获得了二维区间线性微分系统的稳定性和三维区间线性微分系统中双曲奇点的分类。Cecconillo [15]等人定义并获得了区间非线性微分方程的约束区间解，并将其用于分析流行病学非线性微分方程模型，从而预测巴西 Sars-Cov-2 传染病的时间演化。特别地，由 Chalco-Cano 等人提出的单层约束区间运算[16]，实际上是约束区间运算的特殊情形，该运算将约束区间运算中涉及到的不同参数都规定为同一参数，这大大简化了区间运算中的不确定性，因此，单层约束区间运算也被研究者们用于解决各种问题[17] [18] [19]，但是，单层约束区间运算不能很好地体现区间运算的本质特征。

对于微分方程，人们在实分析领域对微分方程解的行为进行了定性分析，特别是平衡点的局部定性分析[20]。本文采用约束区间运算，基于区间二维线性齐次微分方程的稳定性结论[13]，研究具有区间参数和区间初始条件的高维微分方程组，探讨区间线性齐次微分方程组的基解矩阵，并对区间微分方程组初值问题进行定性分析。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍了一些预备知识，包括约束区间和约束区间矩阵的概念和运算。第 3 节介绍了区间特征值问题的主要结果，并引入区间矩阵指数函数的概念，在此基础上，给出了 n 维区间线性微分方程的基解矩阵，进一步对其平衡点进行了稳定性分析，得到了 n 维区间线性微分方程渐近稳定、稳定、不稳定的条件。第 4 节给出了三个例子来证明我们的结论。最后在第 5 节总结。

2. 预备知识

本节介绍约束区间运算的一些基本概念。设 IR 表示所有有界闭区间的集合，即

$$IR=\left\{[x]=[\underline{x},\overline{x}]\mid \underline{x}\le\overline{x},\underline{x},\overline{x}\in R\right\}.$$

IR 上的区间数运算由 Moore 等人提出，被称为标准区间运算。标准区间运算是区间端点上的运算[2]，在标准区间运算中，$[\underline{x},\overline{x}]-[\underline{x},\overline{x}]=[\underline{x}-\overline{x},\overline{x}-\underline{x}]\ne 0$；当 $0\notin[x]$ 时，$[\underline{x},\overline{x}]\div[\underline{x},\overline{x}]=[\underline{x}/\overline{x},\overline{x}/\underline{x}]\ne 1$；对于 $k,l\in R$，$(k+l)[\underline{x},\overline{x}]=k[\underline{x},\overline{x}]+l[\underline{x},\overline{x}]$ 当且仅当 $kl\ge 0$，因此，标准区间运算的加法和乘法不可逆，且不满足分配律，被赋予标准区间运算的区间数空间不是线性空间。

为了避开这些困难，Lodwick [3]给出了约束区间运算。区间被重新定义为从 $[0,1]$ 到具有非负斜率的一次多项式的映射。

定义 1 [3]称实单值函数

$$x(\gamma_x)=\underline{x}+\gamma_x\omega_x,0\le\gamma_x\le 1,$$

为区间 $[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ 的约束区间表示，其中 γ_x 为约束在 0 到 1 之间的参数，$\omega_x=\overline{x}-\underline{x}\ge 0$ 表示区间的宽度。

相应地，约束区间运算定义如下：

$$[x]\circ[y]=[z]=[\underline{z},\overline{z}]=\left\{z\mid z=(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)\circ(\underline{y}+\gamma_y\omega_y),0\le\gamma_x,\gamma_y\le 1\right\},$$

其中 $\underline{z}=\min\{z\}$，$\overline{z}=\max\{z\}$，$\circ\in\{+,-,\times,\div\}$。

注 1 约束区间运算本质上是一个全局优化问题，首先将区间转换为 $[0,1]$ 上具有非负斜率的线性函数，其次在表达式的层面进行运算，最后通过全局优化返回区间。显然，表达式中涉及的区间越多，计算就越困难。

与标准区间运算不同，约束区间分析通过在 $[0,1]$ 上定义的参数 γ，以显式的方式保持了算术运算的依赖性或独立性，从而具有我们所期望的代数性质。具体来说：

$$[x]-[x]=\left\{z\mid z=(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)-(\underline{x}+\gamma_x\omega_x),0\le\gamma_x\le 1\right\}=[0,0],$$

当 $0\notin[x]$ 时：

$$[x]\div[x]=\left\{z\mid z=(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)\div(\underline{x}+\gamma_x\omega_x),0\le\gamma_x\le 1\right\}=[1,1],$$

此外，还满足了乘法对加法的分配律：

$$\begin{aligned}[x]\times([y]+[z])&=\left\{\upsilon\mid\upsilon=(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)\times\left((\underline{y}+\gamma_y\omega_y)+(\underline{z}+\gamma_z\omega_z)\right),0\le\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z\le 1\right\}\\&=\left\{\upsilon\mid\upsilon=(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)\times(\underline{y}+\gamma_y\omega_y)+(\underline{x}+\gamma_x\omega_x)(\underline{z}+\gamma_z\omega_z),0\le\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z\le 1\right\}\\&=[x]\times[y]+[x]\times[z].\end{aligned}$$

注 2 [4]对于约束区间运算，我们有$[x]-[x]=[0,0]$和$[x]\div[x]=[1,1]\left(0\notin[x]\right)$，然而，这是运算的性质，而不是区间数空间中加法逆和乘法逆的存在。换句话说，并不是说基于约束区间运算区间数具有逆元且满足分配律，而是在表达式的空间中满足这些运算性质。

关于区间的约束参数表示和约束区间运算的更多详细性质见文献[3] [4]。接下来引入区间矩阵的概念和运算性质。

定义 2 [2]矩阵的每个元素都是区间的矩阵称为区间矩阵，$m\times n$区间矩阵定义为

$$[A]=\left(\left[a_{ij}\right]\right)\text{，其中}\left[a_{ij}\right]\in IR\text{，}\ i=1,2,\cdots,m\text{，}\ j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

$m\times n$区间矩阵集合表示为$IR^{m\times n}$。特别地，$n\times 1$区间矩阵就是区间向量，记为IR^{n}。

对于区间矩阵$[A]$，根据定义 1 可给出其相关的约束区间矩阵$A(\gamma)$ [13]:

$$[A]=A(\gamma)=\left(a_{ij}(\gamma)\right),$$

其中$\gamma=\left(\gamma_{ij}\right)$，$\gamma_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}(\gamma)=a_{ij}+\gamma_{ij}\omega_{a_{ij}}$，$\omega_{a_{ij}}=\overline{a_{ij}}-\underline{a_{ij}}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$。

将矩阵表示约束区间矩阵会带来很大的方便，比如下列关于对称矩阵的例子。

例 1 考虑区间矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中$a\in[-5,-2]$，$b\in[-3,2]$，$c\in[1,3]$。用标准区间运算，(1)可表示为

$$\begin{pmatrix} [-5,-2] & [-3,2] \\ [-3,2] & [1,3] \end{pmatrix}, \tag{2}$$

这个区间矩阵并不是对称的，因为标准区间运算中各区间相互独立，比如我们可以取第一行元素的左端点和第二行元素的右端点，得到

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

显然它并不是对称矩阵。然而，用约束区间运算，(1)可表示为

$$\begin{pmatrix} -5+3\gamma_1 & -3+5\gamma_2 \\ -3+5\gamma_2 & 1+2\gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中$0\le\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\le 1$，从表达式空间来说，它总是对称的。由此可见，约束区间运算可以通过参数γ编码独立性、依赖性和对称性。

区间矩阵运算，可以用约束区间运算在表达式空间中来实现，它的运算性质，和实数矩阵的运算性质一致。

3. 区间线性微分方程的定性分析

在数学建模中，当建立的模型是微分方程模型时，往往会涉及到初始值和系数的测量，当知道这些参数的容许误差时，就可以建立区间微分方程模型。本节研究区间不确定性下的n维线性微分方程，采用约束区间的表达形式，对其初值问题进行定性分析。考虑n维区间线性微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=[A]x(t), \\ x(t_0)=[x_0], \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$，$[x_0]=\left([x_{10}],[x_{20}],\cdots,[x_{n0}]\right)^{\mathrm{T}}\in IR^n$，

$[A]=\left([a_{ij}]\right)=\begin{pmatrix}[\underline{a_{11}},\overline{a_{11}}] & [\underline{a_{12}},\overline{a_{12}}] & \cdots & [\underline{a_{1n}},\overline{a_{1n}}]\\ [\underline{a_{21}},\overline{a_{21}}] & [\underline{a_{22}},\overline{a_{22}}] & \cdots & [\underline{a_{2n}},\overline{a_{2n}}]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ [\underline{a_{n1}},\overline{a_{n1}}] & [\underline{a_{n2}},\overline{a_{n2}}] & \cdots & [\underline{a_{nn}},\overline{a_{nn}}]\end{pmatrix}\in IR^{n\times n}$。用约束区间表示法，可将方程(4)改写为

$$\begin{cases} x'(t,\gamma)=\begin{pmatrix}\underline{a_{11}}+\gamma_{11}\omega_{a_{11}} & \cdots & \underline{a_{1n}}+\gamma_{1n}\omega_{a_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{a_{n1}}+\gamma_{n1}\omega_{a_{n1}} & \cdots & \underline{a_{nn}}+\gamma_{nn}\omega_{a_{nn}}\end{pmatrix}x(t,\gamma)\triangleq A(\gamma)x(t,\gamma),\\ x(t_0)=\left(\underline{x_{10}}+\eta_1\omega_{x_{10}},\underline{x_{20}}+\eta_2\omega_{x_{20}},\cdots,\underline{x_{n0}}+\eta_n\omega_{x_{n0}}\right)^{\mathrm{T}},\end{cases}\tag{5}$$

这里 $x(t,\gamma)=\left(x_1(t,\gamma),x_2(t,\gamma),\cdots,x_n(t,\gamma)\right)^{\mathrm{T}}$；$\gamma=(\gamma_{ij})$，$0\le\gamma_{ij}\le 1$，$\omega_{a_{ij}}=\overline{a_{ij}}-\underline{a_{ij}}$，$1\le i,j\le n$；$0\le\eta_k\le 1$，$\omega_{x_{k0}}=\overline{x_{k0}}-\underline{x_{k0}}$，$1\le k\le n$。

因为约束区间矩阵 $A(\gamma)$ 本质上是带参数 $\gamma=(\gamma_{ij})$，$0\le\gamma_{ij}\le 1$ 的实数矩阵，因此对于 $n\times n$ 区间矩阵 $A(\gamma)$，可以类似实数矩阵定义它的范数，即对于每一个 $0\le\gamma_{ij}\le 1$，

$$\|A(\gamma)\|=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\underline{a_{ij}}+\gamma_{ij}\omega_{a_{ij}}\right|,$$

进而用比较判别法容易验证幂级数

$$I+A(\gamma)+\frac{A^2(\gamma)}{2!}+\cdots+\frac{A^m(\gamma)}{m!}+\cdots$$

绝对收敛，其中 I 为 n 阶单位矩阵。据此，可以引入区间矩阵指数函数的概念。

定义 3 称

$$\mathrm{e}^{A(\gamma)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k(\gamma)}{k!}=I+A(\gamma)+\frac{A^2(\gamma)}{2!}+\cdots+\frac{A^m(\gamma)}{m!}+\cdots$$

为区间矩阵 $A(\gamma)$ 的指数函数，其中 I 为 n 阶单位矩阵，$A^m(\gamma)$ 是区间矩阵 $A(\gamma)$ 的 m 次幂，$A^0(\gamma)=I$，$0!=1$，并且 $\mathrm{e}^{A(\gamma)}\in R^{n\times n}$。

对任意的 $A(\gamma)$，$B(\gamma)\in R^{n\times n}$，容易证明如下性质：

(i) 若 $A(\gamma)B(\gamma)=B(\gamma)A(\gamma)$，则 $\mathrm{e}^{A(\gamma)+B(\gamma)}=\mathrm{e}^{A(\gamma)}\mathrm{e}^{B(\gamma)}=\mathrm{e}^{B(\gamma)}\mathrm{e}^{A(\gamma)}$。

(ii) $\left(\mathrm{e}^{A(\gamma)}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-A(\gamma)}$。

(iii) 若 $P(\gamma)$ 是非奇异的区间矩阵，则 $\mathrm{e}^{P^{-1}(\gamma)A(\gamma)P(\gamma)}=P^{-1}(\gamma)\mathrm{e}^{A(\gamma)}P(\gamma)$。

利用区间矩阵指数函数，我们可以仿照经典常微分方程给出有关区间线性微分方程组的基解矩阵。

定理 1 矩阵

$$X(t,\gamma)=\mathrm{e}^{A(\gamma)t}\tag{6}$$

是(5)的基解矩阵，且 $X(0,\gamma)=I$。

证 由定义易知 $X(0,\gamma)=I$。(6)对 t 逐项求导，可以得到

DOI: 10.12677/orf.2022.123108

$$
\begin{aligned}
X'(t,\gamma) &= \left(\mathrm{e}^{A(\gamma)t}\right)' \\
&= A(\gamma) + A^2(\gamma)t + \frac{A^3(\gamma)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{A^m(\gamma)}{(m-1)!}t^{m-1} + \cdots \\
&= A(\gamma)\mathrm{e}^{A(\gamma)t} \\
&= A(\gamma)X(t,\gamma).
\end{aligned}
$$

因此 $X(t,\gamma)$ 是(5)的解矩阵，又 $\det X(0,\gamma) = \det I = 1 \neq 0$，进而 $X(t,\gamma)$ 是(5)的基解矩阵。证毕。

注 3 对于标准区间运算，即使退化为一维，即

$$x'(t) = [\underline{a},\overline{a}]x(t) \tag{7}$$

的情形。即便区间函数项级数 $1 + t + \frac{[\underline{a},\overline{a}]^2}{2!}t^2 + \cdots$ 绝对收敛，也不能定义 $x = \mathrm{e}^{[\underline{a},\overline{a}]t} = 1 + [\underline{a},\overline{a}]t + \frac{[\underline{a},\overline{a}]^2}{2!}t^2 + \cdots$ 为该区间微分方程基本解。事实上，由于区间值函数的导数加法运算不满足可加性[21]，即 $(f+g)' \subseteq f' + g'$，所以

$$x' \neq [\underline{a},\overline{a}] + [\underline{a},\overline{a}]^2 t + \frac{[\underline{a},\overline{a}]^3}{2!}t^2 + \cdots,$$

又由于标准区间运算中分配律不成立[2]，所以

$$[\underline{a},\overline{a}] + [\underline{a},\overline{a}]^2 t + \frac{[\underline{a},\overline{a}]^3}{2!}t^2 + \cdots \neq [\underline{a},\overline{a}]\left(1 + [\underline{a},\overline{a}]t + \frac{[\underline{a},\overline{a}]^2}{2!}t^2 + \cdots\right),$$

因此，$x = \mathrm{e}^{[\underline{a},\overline{a}]t}$ 不是(7)基本解。

定理 1 告诉我们，(5)的基解矩阵是 $\mathrm{e}^{A(\gamma)t}$，由定义可知它是一个收敛的无穷级数。为了对初值问题(5)进行定性分析，需要讨论基解矩阵 $\mathrm{e}^{A(\gamma)t}$ 的结构。结合经典线性微分方程中的相关内容，考虑对系数矩阵进行对角化，而从线性代数理论可知，矩阵对角化需要特征值和特征向量的概念。因此，引入区间矩阵的特征值与特征向量是必要的。

定义 4 [13]对于(5)中的 n 阶区间矩阵 $A(\gamma)$，$\lambda(\gamma)$ 是它的特征值当且仅当

$$\lambda(\gamma) \in \left\{A(\gamma)\boldsymbol{x} = \lambda(\gamma)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq 0, \gamma = (\gamma_{ij}), 0 \leq \gamma_{ij} \leq 1\right\}, \tag{8}$$

即

$$\lambda(\gamma) \in \left\{\det\left(A(\gamma) - \lambda(\gamma)I_n\right) = 0, \gamma = (\gamma_{ij}), 0 \leq \gamma_{ij} \leq 1\right\}, \tag{9}$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵。称 $\det\left(A(\gamma) - \lambda(\gamma)I_n\right) = 0$ 为 $A(\gamma)$ 的特征方程，$\boldsymbol{x}$ 为 $\lambda(\gamma)$ 对应的特征向量。

如果约束区间矩阵 $A(\gamma)$ 有 n 个彼此互异的特征值 $\lambda_1(\gamma), \lambda_2(\gamma), \cdots, \lambda_n(\gamma)$，那么 $A(\gamma)$ 可对角化：

$$X(t,\gamma) = \mathrm{e}^{A(\gamma)t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(\gamma)t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2(\gamma)t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n(\gamma)t} \end{pmatrix}$$

如果约束区间矩阵 $A(\gamma)$ 的特征方程有重根，那么需要对 $A(\gamma)$ 进行 Jordan 标准化。

定理 2 对于 n 阶区间矩阵 $A(\gamma)$，必存在非奇异的区间矩阵 $P(\gamma)$，使得

$$J(\gamma)=P^{-1}(\gamma)A(\gamma)P(\gamma),$$

其中 $J(\gamma)$ 是 $A(\gamma)$ 的 Jordan 标准型，即

$$J(\gamma)=\begin{pmatrix} J_1(\gamma) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\gamma) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s(\gamma) \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i(\gamma)=\begin{pmatrix} \lambda_i(\gamma) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i(\gamma) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i(\gamma) & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i(\gamma) \end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,s)$$

为 n_i 阶 Jordan 块，且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$； $\lambda_1(\gamma),\lambda_2(\gamma),\cdots,\lambda_s(\gamma)$ 是 $A(\gamma)$ 的特征值。

定理 2 的证明与实数矩阵理论中 Jordan 标准型的证明完全类似。下面给出约束区间矩阵 Jordan 标准化的例子。

例 2 矩阵 $A(\gamma)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \gamma & 4 \end{pmatrix}$，由(9)可知 $A(\gamma)$ 的特征值为 $\lambda_1(\gamma)=3+\sqrt{1+\gamma}$， $\lambda_2(\gamma)=3-\sqrt{1+\gamma}$，对应的特征向量分别为 $v_1(\gamma)=\left(1,1+\sqrt{1+\gamma}\right)^{\mathrm{T}}$， $v_2(\gamma)=\left(1,1-\sqrt{1+\gamma}\right)^{\mathrm{T}}$。取

$$P(\gamma)=\left(v_1(\gamma),v_2(\gamma)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{1+\gamma} & 1-\sqrt{1+\gamma} \end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{aligned} J(\gamma)&=P^{-1}(\gamma)A(\gamma)P(\gamma) \\ &=\frac{1}{-2\sqrt{1+\gamma}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{1+\gamma} & -1 \\ -1-\sqrt{1+\gamma} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \gamma & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{1+\gamma} & 1-\sqrt{1+\gamma} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 3+\sqrt{1+\gamma} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{1+\gamma} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这里 $J(\gamma)=\begin{pmatrix} J_1(\gamma) & 0 \\ 0 & J_2(\gamma) \end{pmatrix}$，其中 $J_1(\gamma)=3+\sqrt{1+\gamma}$， $J_2(\gamma)=3-\sqrt{1+\gamma}$。

例 3 矩阵 $A(\gamma)=\begin{pmatrix} 1 & 3+2\gamma_2 & 0 \\ 0 & -2+\gamma_1 & -1 \\ 0 & 0 & -2+\gamma_1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1(\gamma)=1$， $\lambda_2(\gamma)=-2+\gamma_1$ (二重)，对应的特征向量分别为 $v_1(\gamma)=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$， $v_2(\gamma)=(3+2\gamma_2,-3+\gamma_1,0)^{\mathrm{T}}$。取 $v_3(\gamma)=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 使得 $v_1(\gamma)$， $v_2(\gamma)$， $v_3(\gamma)$ 线性无关，不妨取 $a=3+2\gamma_2$， $b=-2+\gamma_1$， $c=-(-3+\gamma_1)$。取

$$P(\gamma)=\left(v_1(\gamma),v_2(\gamma),v_3(\gamma)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 3+2\gamma_2 & 3+2\gamma_2 \\ 0 & -3+\gamma_1 & -2+\gamma_1 \\ 0 & 0 & -(-3+\gamma_1) \end{pmatrix},$$

易得

$$P^{-1}(\gamma)=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{3+2\gamma_2}{-3+\gamma_1} & \dfrac{3+2\gamma_2-\dfrac{(-2+\gamma_1)(3+2\gamma_2)}{-3+\gamma_1}}{-3+\gamma_1} \\ 0 & \dfrac{1}{-3+\gamma_1} & \dfrac{-2+\gamma_1}{(-3+\gamma_1)^2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{-3+\gamma_1} \end{pmatrix},$$

那么

$$J(\gamma)=P^{-1}(\gamma)A(\gamma)P(\gamma)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+\gamma_1 & 1 \\ 0 & 0 & -2+\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

这里 $J(\gamma)=\begin{pmatrix} J_1(\gamma) & 0 \\ 0 & J_2(\gamma) \end{pmatrix}$，其中 $J_1(\gamma)=1$，$J_2(\gamma)=\begin{pmatrix} -2+\gamma_1 & 1 \\ 0 & -2+\gamma_1 \end{pmatrix}$。

根据定理 1，定理 2 及矩阵指数函数性质(iii)，方程组(5)有基解矩阵

$$e^{A(\gamma)t}=e^{\left(P(\gamma)J(\gamma)P^{-1}(\gamma)\right)t}=P(\gamma)e^{J(\gamma)t}P^{-1}(\gamma). \tag{10}$$

因而 $e^{A(\gamma)t}=P(\gamma)e^{J(\gamma)t}$。由于可逆矩阵 $P(\gamma)$ 把一组基变成另一组基，因此

$$X(t)=P(\gamma)e^{J(\gamma)t} \tag{11}$$

也是方程组(5)有基解矩阵。由(10)或(11)都可以得到基解矩阵的具体结构。

下面利用 n 维区间线性微分方程组基解矩阵的约束区间表达，结合 $A(\gamma)$ 特征值的符号来给出方程组(5)零解的稳定性。

定理 3 对于 γ 的适当选择，若 $A(\gamma)$ 的所有特征值均具有负实部，则方程组(5)的零解是渐近稳定的；若 $A(\gamma)$ 的全部特征值都是非正的，且实部为零的特征值所对应的 Jordan 块都是一阶的，则方程组(5)的零解是稳定的；若 $A(\gamma)$ 的特征值中至少有一个实部为正，或至少有一个特征值实部为零且其对应的 Jordan 块的阶数大于 1，则方程组(5)的零解是不稳定的。

证 区间线性方程组(5)满足 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}(t,\gamma,\eta)=\boldsymbol{x}(t,\gamma,t_0,\boldsymbol{x}_0)=e^{A(\gamma)(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0.$$

根据定理 2 及矩阵指数函数性质(iii)，有

$$e^{A(\gamma)(t-t_0)}=e^{P(\gamma)J(\gamma)P^{-1}(\gamma)(t-t_0)}=P(\gamma)e^{J(\gamma)(t-t_0)}P^{-1}(\gamma),$$

由于 $J(\gamma)$ 及 $J_k(\gamma)(k=1,2,\cdots,s)$ 的特殊形式，利用定义 1 容易得到

$$e^{J(\gamma)(t-t_0)}=\begin{pmatrix} e^{J_1(\gamma)(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2(\gamma)(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_s(\gamma)(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

且 $\mathrm{e}^{J_k(\gamma)(t-t_0)}=D_k(t-t_0)\mathrm{e}^{\lambda_k(\gamma)(t-t_0)}$，其中

$$D_k(t-t_0)=\begin{pmatrix} 1 & t-t_0 & \dfrac{(t-t_0)^2}{2!} & \cdots & \dfrac{(t-t_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t-t_0 & \cdots & \dfrac{(t-t_0)^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t-t_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

这里 n_k 是特征值 $\lambda_k(\gamma)$ 的重数。

由于对 $\gamma=(\gamma_{ij})(0\le\gamma_{ij}\le 1)$ 的每一个参数选择，都是一个确定的问题来计算特征值，且对每一个 γ，约束区间表示为一个实数，因此适当选择 γ，当 $A(\gamma)$ 的特征值都具有负实部时，取 $\beta=\max\limits_{k=1,2,\cdots,s}\{\mathrm{Re}\lambda_k(\gamma)\}<0$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t,\gamma,\eta) &\le \mathrm{e}^{A(\gamma)(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 \le P(\gamma)P^{-1}(\gamma)\mathrm{e}^{J(\gamma)(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 \\ &\le P(\gamma)P^{-1}(\gamma)\boldsymbol{x}_0\sum_{k=1}^{s}D_k(t-t_0)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}. \end{aligned} \tag{12}$$

由于 $D_k(t-t_0)$ 是 $t-t_0$ 的多项式，且 $\beta<0$，所以必有 $M>0$，当 $t\ge t_0$ 时有

$$P(\gamma)P^{-1}(\gamma)\sum_{k=1}^{s}D_k(t-t_0)\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}(t-t_0)}\le M. \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)得，

$$\boldsymbol{x}(t,\gamma,\eta)\le M\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0. \tag{14}$$

由(14)可知方程组(5)的零解是渐近稳定的。

对于 γ 的其他选择，当 $A(\gamma)$ 的特征值均具有非正实部且零实部的特征根对应简单初等因子时，零实部特征根 $\lambda_{k_0}(\gamma)$ 所对应的 Jordan 块 $J_{k_0}(\gamma)$ 的指数矩阵为

$$\mathrm{e}^{J_{k_0}(\gamma)(t-t_0)}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_{k_0}(\gamma)(t-t_0)},$$

且 $\left|\mathrm{e}^{\lambda_{k_0}(\gamma)(t-t_0)}\right|=1$。而所有负实部特征根 $\lambda_k(\gamma)$ 对应的 $\mathrm{e}^{\lambda_k(\gamma)(t-t_0)}$ 形式不变。所以式(12)中一些零实部特征值对应的 $D_{k_0}(t-t_0)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$ 将改为正常数 d_{k_0}，而与负实部特征根对应的 $D_k(t-t_0)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}$ 不变，由式(12)得到的估计式为

$$\boldsymbol{x}(t,\gamma,\eta)\le\left(M_1+M_2\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}(t-t_0)}\right)\boldsymbol{x}_0.$$

所以方程组(5)的零解是稳定的。

当我们适当选择 γ 使得 $A(\gamma)$ 有正实部或多重因子特征值时，$\mathrm{e}^{J_k(\gamma)(t-t_0)}$ 中至少有一些当 $t\to+\infty$ 时无界，从而使得 $\boldsymbol{x}(t,\gamma,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 无界，所以方程组(5)的零解不稳定。

4. 数值算例

例 4 考虑文献[13]中的扰动谐振子模型

DOI: 10.12677/orf.2022.123108

$$x''(t)+2\beta x'(t)+\omega_0^2 x(t)=0, \tag{15}$$

其中 $x(0)=1$， $x'(0)=0$， $\beta \cong 0.05$， $\omega_0=1$。作变量代换 $x(t)=y_1(t)$， $x'(t)=y_2(t)$，(15)改写为

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t), \\ y_2'(t)=-y_1(t)-2\beta y_2(t), \end{cases} \tag{16}$$

即

$$y'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\beta \end{pmatrix} y(t), \tag{17}$$

如果 $\beta=[0,0.1]$，基于约束区间运算，(17)可写为

$$y'(t,\gamma)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2+0.2\gamma \end{pmatrix} y(t,\gamma). \tag{18}$$

其中 $0\le\gamma\le1$。由(9)解得 $\lambda(\gamma)=-0.1+0.1\gamma\pm0.1i\sqrt{100-(1-\gamma)^2}$。

当 $\gamma<1$ 时， $\operatorname{Re}\lambda_j(\gamma)<0\,(j=1,2)$，由定理 3 知方程组(18)的零解渐近稳定；当 $\gamma=1$ 时，$\operatorname{Re}\lambda_j(\gamma)=0\,(j=1,2)$，且 $\lambda_j(\gamma)$ 所对应的 Jordan 块都是一阶的，故方程组(18)的零解稳定。这和文献[13]的结果是一致的。

例 5 考虑

$$\begin{cases} x_1'(t)=-x_1(t)+10x_2(t)+\alpha x_3(t), \\ x_2'(t)=\beta x_1(t)+\zeta x_2(t)+\beta x_3(t), \\ x_3'(t)=\alpha x_1(t)-10x_2(t)-x_3(t), \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\alpha=[-2,3]$， $\beta=[0,1]$， $\zeta=[-5,3]$。采用约束区间运算可将(19)改写为

$$x'(t,\gamma)=\begin{pmatrix} -1 & 10 & -2+5\gamma_1 \\ \gamma_2 & -5+8\gamma_3 & \gamma_2 \\ -2+5\gamma_1 & -10 & -1 \end{pmatrix} x(t,\gamma). \tag{20}$$

其中 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^{\mathrm{T}}$， $0\le\gamma_i\le1\,(i=1,2,3)$，令 $\det(\lambda(\gamma)I_n-A(\gamma))=0$，即 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & -10 & 2-5\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \lambda+5-8\gamma_3 & -\gamma_2 \\ 2-5\gamma_1 & 10 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$，

由于

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -10 & 2-5\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \lambda+5-8\gamma_3 & -\gamma_2 \\ 2-5\gamma_1 & 10 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda+3-5\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \lambda+5-8\gamma_3 & 0 \\ 2-5\gamma_1 & 10 & \lambda-1+5\gamma_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+3-5\gamma_1 & 0 & \lambda+3-5\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \lambda+5-8\gamma_3 & -\gamma_2 \\ 2-5\gamma_1 & 10 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+3-5\gamma_1)(\lambda+5-8\gamma_3)(\lambda-1+5\gamma_1), \end{aligned}$$

故 $\lambda_1(\gamma)=-3+5\gamma_1$， $\lambda_2(\gamma)=-5+8\gamma_3$， $\lambda_3(\gamma)=1-5\gamma_1$。

可以选择 γ_i， $i=1,2,3$：

$$\gamma_1\in\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right),\ \gamma_2\in[0,1],\ \gamma_3\in\left[0,\frac{5}{8}\right),$$

使得 $\lambda_1(\gamma),\lambda_2(\gamma),\lambda_3(\gamma)$ 均小于 0，从而方程组(20)渐近稳定。

同理，也可以选择下列不同的 γ_i：

$$\gamma_1=\left[\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right],\ \gamma_2\in[0,1],\ \gamma_3\in\left[0,\frac{5}{8}\right],$$

使得 $\lambda_1(\gamma)$，$\lambda_2(\gamma)$，$\lambda_3(\gamma)$ 都是非正的，且实部为零的特征值所对应的 Jordan 块都是一阶的，进而方程组(20)稳定。

此外，对于 γ_i 的下列取法：

$$\text{(i)}\ \ \gamma_1\in\left[0,\frac{1}{5}\right),\ \text{(ii)}\ \ \gamma_1\in\left(\frac{3}{5},1\right],\ \text{(iii)}\ \ \gamma_3\in\left(\frac{5}{8},1\right],$$

上面任一种取法都将使得区间特征值的实部为正，因此方程组(5)的零解是不稳定的。

例 6 考虑 n 维区间线性方程组

$$x'=\begin{pmatrix}[-10,-5] & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & [-10,-5] & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & [-10,-5] & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & [-10,-5]\end{pmatrix}x, \tag{21}$$

用约束区间运算，(21)可改写为

$$x'(t,\gamma)=\begin{pmatrix}-10+5\gamma & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -10+5\gamma & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & -10+5\gamma & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -10+5\gamma\end{pmatrix}x(t,\gamma). \tag{22}$$

其中 $\gamma\in[0,1]$。因为

$$\begin{aligned}A(\gamma)&=\begin{pmatrix}-10+5\gamma & & & & \\ & -10+5\gamma & & & \\ & & -10+5\gamma & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -10+5\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\\ &=(-10+5\gamma)I+B,\end{aligned}$$

而矩阵 B 的秩为 1，即有

$$\lambda I-B=\lambda^n-n\lambda^{n-1},$$

从而矩阵 B 的特征值为 $n,0,0,\cdots,0$ （$n-1$ 个 0），进而矩阵 $A(\gamma)$ 的特征值为 $n-10+5\gamma,-10+5\gamma,-10+5\gamma,\cdots,-10+5\gamma$ （$n-1$ 个）。由于对任意 $\gamma\in[0,1]$，都有 $-10+5\gamma<0$，故方程组(22)的稳定性取决于特征值 $n-10+5\gamma$。

当 $n\le 4$ 时，对于任意 $\gamma\in[0,1]$，均有 $n-10+5\gamma<0$，故方程组(22)都渐近稳定。

当 $n=5$ 时，需要对 $\gamma\in[0,1]$ 分情况讨论：当 $\gamma\in[0,1)$ 时，$n-10+5\gamma<0$，方程组(22)渐近稳定；而当 $\gamma=1$ 时，$n-10+5\gamma=0$，方程组(22)稳定。

当$6\le n\le 9$时，分情况讨论：当$\gamma\in\left[0,\frac{10-n}{5}\right)$时，$n-10+5\gamma<0$，方程组(22)渐近稳定；$\gamma=\frac{10-n}{5}$时，$n-10+5\gamma=0$，方程组(22)稳定；$\gamma\in\left(\frac{10-n}{5},1\right]$时，$n-10+5\gamma>0$，方程组(22)不稳定。

当$n=10$时，同理，当$\gamma=0$时，方程组(22)稳定，当$\gamma\in(0,1]$时，方程组(22)不稳定。

当$n\ge 11$时，对于任意$\gamma\in[0,1]$，方程组(22)都不稳定。

5. 结论

本研究从约束区间的表达方式出发，获得了 n 维区间线性方程组的基解矩阵，利用区间特征值和基解矩阵的具体结构，证明了 n 维区间线性方程组零解的稳定性。三个数值实验验证了稳定性的理论结果，并得到了区间系统零解稳定性不仅取决于约束区间参数，有些问题也取决于区间维数。

事实上，基于约束区间运算，在线性问题上保持了与经典实分析相似的结果。这种相似性对于处理具有不确定性的系统具有很大的优势。随后的研究将着眼于非线性问题。然而，由于约束区间运算的过程是一个全局优化过程，其中所有的计算都在表达式空间中执行，每当在计算中添加新的区间时，都会引入一个新的参数γ，这将导致更大的计算难度，因此，对于非线性区间微分方程的稳定性研究仍然是一个挑战。

基金项目

贵州大学引进人才科研项目 201950。

参考文献

[1] Moore, R.E. (1966) Interval Analysis. Prentice-Hall, London.

[2] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J. (2009) Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898717716

[3] Lodwick, W.A. (1999) Constrained Interval Arithmetic. CCM Report 138.

[4] Lodwick, W.A. and Jenkins, O.A. (2013) Constrained Intervals and Interval Spaces. *Soft Computing*, **17**, 1393-1402. https://doi.org/10.1007/s00500-013-1006-x

[5] Michel, A.N. and Oppenheimer, E.P. (1987) Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems. *IFAC Proceedings*, **20**, 251-256. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)55155-1

[6] Michel, A.N. and Oppenheimer, E.P. (1988) Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part I. Fundamental Results. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **35**, 1129-1138. https://doi.org/10.1109/31.7573

[7] Oppenheimer, E.P. and Michel, A.N. (1988) Application of Interval Analysis Techniques to Linear Systems: Part II. The Interval Matrix Exponential Function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **35**, 1230-1242. https://doi.org/10.1109/31.7598

[8] Michel, A.N., Pai, M.A., Sun, H.F. and Kulig, C. (1993) Interval-Analysis Techniques in Linear Systems: An Application in Power Systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, **12**, 51-60. https://doi.org/10.1007/BF01183147

[9] Goldsztejn, A. and Neumaier, A. (2014) On the Exponentiation of Interval Matrices. *Reliable Computing Electronic Edition*, **20**, 53-72.

[10] Keyanpour, M., Tabar, M.M. and Lodwick, W.A. (2018) A Solution Algorithm for a System of Interval Linear Equations Based on the Constraint Interval Point of View. *Soft Computing*, **26**, 26-42.

[11] Lodwick, W.A. and Jamison, K.D. (2017) A Constraint Fuzzy Interval Analysis Approach to Fuzzy Optimization. *Information Sciences*, **426**, 38-49. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.10.026

[12] Maqui-Huamán, G.G., Silva, G. and Leal, U. (2018) Necessary Optimality Conditions for Interval Optimization Problems with Inequality Constraints Using Constrained Interval Arithmetic. *Fuzzy Information Processing*, **831**, 439-449. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95312-0_38

[13] Mizukoshi, M.T. and Lodwick, W.A. (2020) The Interval Eigenvalue Problem Using Constraint Interval Analysis with an Application to Linear Differential Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, **419**, 141-157.

https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.013

[14] Mizukoshi, M.T., Jacquemard, A. and Lodwick, W.A. (2020) Classification of Hyperbolic Singularities in Interval 3-Dimensional Linear Differential Systems. *Nature Public Health Emergency Collection*, **1238**, 13-27. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50143-3_2

[15] Cecconello, M.S., Mizukoshi, M.T. and Lodwick, W.A. (2021) Interval Nonlinear Initial-Valued Problem Using Constraint Intervals: Theory and an Application to the Sars-Cov-2 Outbreak. *Information Sciences*, **577**, 871-882. https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.08.045

[16] Chalco-Cano, Y., Lodwick, W.A. and Bede, B. (2014) Single Level Constraint Interval Arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, **257**, 146-168. https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.06.017

[17] Campos, J.R., Assunção, E., Silva, G.N., Lodwick, W.A. and Leal, U. (2022) A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Difference Equation via Interval Lyapunov Equation. *Soft Computing*, **26**, 5043-5056. https://doi.org/10.1007/s00500-022-06958-4

[18] Campos, J.R., Assunção, E., Silva, G.N. and Lodwick, W.A. (2018) Biological Control of Sugarcane Caterpillar (*Diatraea saccharalis*) Using Interval Mathematical Models. *International Journal on Mathematical Methods and Models in Biosciences*, **5**, Article ID: 1604232. https://doi.org/10.11145/biomath.v5i1.567

[19] Costa, T.M., Bouwmeester, H., Lodwick, W.A. and Lavor, C. (2017) Calculating the Possible Conformations Arising from Uncertainty in the Molecular Distance Geometry Problem Using Constraint Interval Analysis. *Information Sciences*, **415-416**, 41-52. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.06.015

[20] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[21] Stefanini, L. and Bede, B. (2009) Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-Valued Functions and Interval Differential Equations. *Nonlinear Analysis*, **71**, 1311-1328. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005