

# 特殊图类的非正常染色

周雨欣, 戴晓婷, 孙卓越, 王 昱

苏州科技大学数学科学学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2023年3月16日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月28日

## 摘 要

设 $k, l$ 是非负整数, 图 $G$ 的一个非正常 $(k, l)$ -染色是指用红蓝2种颜色对顶点集 $V(G)$ 进行着色, 使得对每一个染以红色(或蓝色)的点, 至多 $k$  (或 $l$ )个邻点与其染色相同。本文主要研究路和圈的平方图的非正常 $(k, l)$ -染色。

## 关键词

非正常染色, 平方图, 路, 圈

# Improper Coloring of the Special Graphs

Yuxin Zhou, Xiaoting Dai, Zhuoyue Sun, Yu Wang

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Mar. 16<sup>th</sup>, 2023; accepted: Apr. 21<sup>st</sup>, 2023; published: Apr. 28<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

Let  $k, l$  be two non-negative integers. An improper  $(k, l)$ -coloring of a graph  $G$  refers to color the vertex set of  $V(G)$  with two colors, such that for each vertex with color red (or blue) has at most  $k$  (or  $l$ ) neighbors of the same color with it. This paper focuses on improper  $(k, l)$ -coloring of square graphs of paths and cycles.

## Keywords

Improper Coloring, Square Graph, Path, Cycle

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 预备知识

图论起源于现实世界，它的思想的传承起源于一些民间广泛流传的古老数学游戏和趣题的研究。图的染色问题是图论中非常重要的研究课题之一，它来源于著名的“四色问题”，即任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。

**定义 1 [1]**  $V(G)$  和  $E(G)$  分别表示图  $G$  的点和边的集合。图  $G'$  称为图  $G$  的子图，满足  $V(G') \subseteq V(G)$ ,  $E(G') \subseteq E(G)$ 。设  $V'$  是  $V$  的一个非空子集。以  $V'$  为顶点集，以两端点均在  $V'$  中的边为全体边集构成的子图，称为  $G$  的由  $V'$  导出的子图，记为  $G[V']$ 。

**定义 2 [1]** 设  $d_1, \dots, d_k$  是  $k$  个非负整数，图  $G$  称为是非正常  $(d_1, \dots, d_k)$ -可染的，或  $(d_1, \dots, d_k)$ -可染的，当且仅当  $G$  的点集可以被划分为  $V_1, \dots, V_k$ ，使得每个点导出子图  $G[V_i]$  都满足  $\Delta G[V_i] \leq d_i$ ，也就是说，对任意的  $v \in V(G[V_i])$ ， $v$  在  $G[V_i]$  中至多  $d_i$  个邻点， $1 \leq i \leq k$ 。当  $d_1 = \dots = d_k = 0$  时，即为正常染色。 $\chi(G)$  表示使  $G$  为  $k$  可着色的数  $k$  的最小值。

**定义 3 [2]** 令  $x, y \in V(G)$ ， $G$  中所有从  $x$  到  $y$  的路的最短长度称为从  $x$  到  $y$  的距离记为  $d_G(x, y)$ 。图  $G$  的平方图  $G^2$  定义为：图  $G^2$  与  $G$  有相同的点集，图  $G^2$  中的两顶点为邻点当且仅当在图  $G$  中与此两点对应点的距离小于等于 2。

**定义 4 [3]** 设  $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$  是一条长为  $n$  的路，当且仅当  $P_n$  上两点的距离为 2 时增加一条边，这样所得到的图叫做  $P_n^2(v_1, v_n)$ ，简记为  $P_n^2$ 。设  $C_n = v_1 v_2 \dots v_n v_1$  是一个长为  $n$  的圈，当且仅当两点的距离为 2 时增加一条边，这样所得到的图叫做  $C_n^2(v_1, v_n)$ ，简记为  $C_n^2$ 。

关于路和圈的平方图的正常染色结果如下。

**引理 [2]** 对于任意的圈，有如下结论成立：

$$\begin{cases} \chi(P_n^2) = 3 (n \geq 3) \\ \chi(C_5^2) = 5 \\ \chi(C_{3n}^2) = 3 \\ \chi(C_{3n+1}^2) = 4 \\ \chi(C_{3n+2}^2) = 4 (n \geq 2) \end{cases}$$

根据上述引理，我们将考虑降低色数为 2，即用 2 种颜色对路和圈的平方图进行非正常染色，证明这两种平方图分别满足特定的非正常染色方式(下文将具体给出定理与证明)。

## 2. 结论与证明

**定理 1**  $P_n^2 (n \geq 3)$  是  $(1,1)$ -可染的。

**证明：** 设  $P_n = v_1 v_2 \dots v_n (n \geq 3)$ 。考虑  $P_n$  中的三个连续的点  $v_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_{i+1}$ ，根据平方图的定义，在  $P_n^2$  中此三点相互邻接。现对  $P_n^2$  进行如下染色  $c$ ：

对  $1 \leq i \leq n$ ，当  $i = 0(\bmod 4)$  或  $i = 1(\bmod 4)$  时，令  $c(v_i) = 1$ ；当  $i = 2(\bmod 4)$  或  $i = 3(\bmod 4)$  时，令  $c(v_i) = 2$ 。

根据上述染色， $c(v_2) = c(v_3) = 2$ ， $c(v_1) = 1$ ， $c(v_4) = 1$  (若存在  $v_4$ )，即  $v_1$  的所有邻点与其染色不同，与  $v_2$  染相同颜色的邻点只有  $v_3$  (如图 1 所示)。我们将逐个考察  $v_n$ ,  $v_{n-1}$  及  $v_i (3 \leq i \leq n-2)$ ，并说明在上述染色方式下，至多一个邻点与其染色相同。首先考虑  $v_n$  和  $v_{n-1}$ 。当  $i = 0(\bmod 4)$  时，根据上面的染色方

式,  $c(v_n)=1, c(v_{n-1})=c(v_{n-2})=2, c(v_{n-3})=1$ , 即  $v_n$  与  $v_{n-1}, v_{n-2}$  均染不同颜色, 与  $v_{n-1}$  染相同颜色的点只有  $v_{n-2}$  (如图 1 所示); 当  $i=1(\pmod 4)$  时, 根据上面的染色方式,  $c(v_n)=c(v_{n-1})=1, c(v_{n-2})=c(v_{n-3})=2$ , 即与  $v_n$  染相同颜色的邻点只有  $v_{n-1}$ ,  $v_{n-1}$  的所有邻点中仅  $v_n$  与其染色相同; 类似地, 当  $i=2(\pmod 4)$  时, 有  $c(v_n)=c(v_{n-3})=2, c(v_{n-1})=c(v_{n-2})=1$ ; 当  $i=3(\pmod 4)$  时, 有  $c(v_n)=c(v_{n-1})=2, c(v_{n-2})=1, c(v_{n-3})=1$  (若  $v_{n-3}$  存在, 即  $n>3$ ), 无论哪种情况, 至多一个邻点与  $v_n$  (或  $v_{n-1}$ ) 染色相同。

接下来考虑  $v_i, 3 \leq i \leq n-2$ 。当  $i=0(\pmod 4)$  时, 根据上面的染色方式,  $c(v_i)=c(v_{i+1})=1, c(v_{i-1})=c(v_{i-2})=c(v_{i+2})=2$ , 即  $v_i$  与  $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+2}$  均染不同颜色, 与  $v_i$  染相同颜色的点只有  $v_{i+1}$  (如图 1 所示); 当  $i=1(\pmod 4)$  时, 根据上面的染色方式,  $c(v_i)=c(v_{i-1})=1, c(v_{i+1})=c(v_{i-2})=c(v_{i+2})=2$ , 即与  $v_i$  染相同颜色的邻点只有  $v_{i-1}$ ; 类似地, 当  $i=2(\pmod 4)$  时, 有  $c(v_i)=c(v_{i+1})=2, c(v_{i-1})=c(v_{i-2})=c(v_{i+2})=1$ ; 当  $i=3(\pmod 4)$  时, 有  $c(v_i)=c(v_{i-1})=2, c(v_{i+1})=c(v_{i-2})=c(v_{i-3})=1$ 。无论哪种情况, 至多一个邻点与  $v_i$  染色相同。

综合以上情况, 定理结论成立。

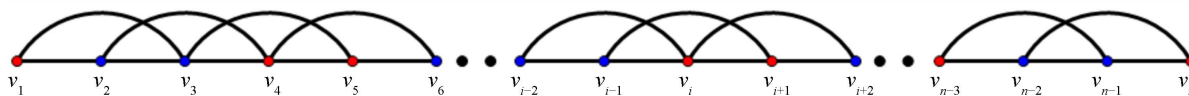


Figure 1. Improper  $(k, l)$ -coloring of square graphs of paths  
图 1. 路的平方图的非正常染色

定理 2 1) 若  $n \equiv 0(\pmod 3)$ , 则  $C_n^2$  是  $(2, 0)$ -可染的; 特别地, 当  $n=3$  时,  $C_3^2$  是  $(1, 0)$ -可染的。

2) 若  $n \not\equiv 0(\pmod 3)$ , 则  $C_n^2$  是  $(2, 1)$ -可染的; 特别地, 当  $n=4$  时,  $C_4^2$  是  $(2, 0)$ -可染的。

证明: 设  $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 。考虑  $C_n^2$  中三个连续的点  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ , 根据平方图的定义, 在  $C_n^2$  中此三点相互邻接。

1) 若  $n \equiv 0(\pmod 3)$ , 不妨假设  $n=3k$ , 则对  $C_{3k}^2$  进行如下染色  $c$ :

当  $i \not\equiv 0(\pmod 3)$  时, 令  $c(v_i)=1$ ; 当  $i \equiv 0(\pmod 3)$  时, 令  $c(v_i)=2$ 。

当  $k=1$  时, 即  $n=3$ , 显然,  $C_3^2$  是  $(1, 0)$ -可染的(如图 2(a))。当  $k \geq 2$  时, 根据平方图的定义, 染颜色 1 的所有点的导出子图是一个圈  $v_1 v_2 v_4 v_5 \cdots v_{3j+1} v_{3j+2} \cdots v_{3k-2} v_{3k-1}$ , 其中  $1 \leq j \leq k-1$ ; 染颜色 2 的点为  $v_3, v_6, \dots, v_{3k}$ , 这些点是孤立的(如图 2(b)给出了  $C_6^2$  的染色结果)。因此当  $k \geq 2$  时,  $C_{3k}^2$  是  $(2, 0)$ -可染的。

2) 若  $n \not\equiv 0(\pmod 3)$ , 我们分两种情况讨论。

首先考虑  $n \equiv 1(\pmod 3)$ , 不妨假设  $n=3k+1$ , 现对  $C_{3k+1}^2$  进行如下染色  $c'$ :

当  $k=1$  时, 即  $n=4$ , 令  $c'(v_1)=c'(v_2)=c'(v_4)=1, c'(v_3)=2$ 。显然  $C_4^2$  是  $(2, 0)$ -可染的(如图 2(c))。

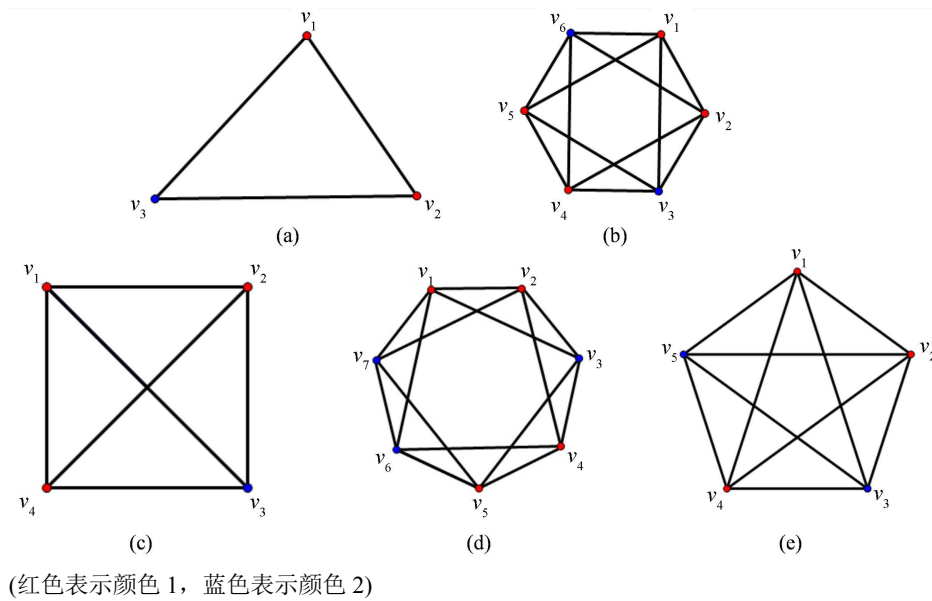
当  $k \geq 2$  时, 令  $c'(v_{3k+1})=c'(v_{3k})=2$ ; 对于  $1 \leq i \leq 3k-1$ , 当  $i \not\equiv 0(\pmod 3)$ , 令  $c'(v_i)=1$ ; 当  $i \equiv 0(\pmod 3)$ , 令  $c'(v_i)=2$ 。根据平方图的定义, 染颜色 1 的点导出子图是一条路  $v_1 v_2 v_4 v_5 \cdots v_{3j+1} v_{3j+2} \cdots v_{3k-2} v_{3k-1}$ , 其中  $1 \leq j \leq k-1$ ; 而染颜色 2 的点  $v_3, v_6, \dots, v_{3k}, v_{3k+1}$  中, 仅有  $v_{3k}$  和  $v_{3k+1}$  邻接, 其余点均不邻接(如图 2(d)给出了  $C_7^2$  的染色结果, 即  $k=3$ )。所以当  $k \geq 2$  时,  $C_{3k+1}^2$  是  $(2, 1)$ -可染的。

接下来考虑  $n \equiv 2(\pmod 3)$ , 不妨假设  $n=3k+2$ , 现对  $C_{3k+2}^2$  进行染色  $c''$ :

令  $c''(v_{3k+2})=2$ 。对任意的  $v_i, 1 \leq i \leq 3k+1$ , 当  $i \not\equiv 0(\pmod 3)$  时, 令  $c''(v_i)=1$ ; 当  $i \equiv 0(\pmod 3)$  时, 令  $c''(v_i)=2$ 。根据平方图的定义, 染颜色 1 的点导出子图是一个圈  $v_1 v_2 v_4 v_5 \cdots v_{3j+1} v_{3j+2} \cdots v_{3k-1} v_{3k+1} v_1$ , 其中  $1 \leq j \leq k-1$ 。染颜色 2 的点为  $v_3, v_6, \dots, v_{3k}, v_{3k+2}$ , 仅  $v_{3k}$  和  $v_{3k+2}$  是邻接的, 其余点均不邻接(如图 2(e)给出

了  $C_5^2$  的染色结果)。所以  $C_{3k+2}^2$  是  $(2,1)$ -可染的。

综合以上情况，定理结论成立。



**Figure 2.** Improper  $(k, l)$ -coloring of square graphs of cycles  
**图 2.** 圈的平方图的非正常染色

## 参考文献

- [1] 张传妮, 王应前. 平面图的非正常染色[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(3): 267-274.
- [2] 马帅. 特殊图类的标号染色[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东大学, 2009.
- [3] 侯新民, 王天明. 广义 Petersen 图的宽直径[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(2): 249-253.