Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(5), 4849-4855
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.135487

Hans汉斯

符号Wenger图的主特征值

向明跃，章　超*

贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2023年8月14日；录用日期：2023年10月4日；发布日期：2023年10月12日

摘　要

设 $G^{\sigma}=(G,\sigma)$ 是一个符号图，G^{σ} 的特征值是其邻接矩阵的特征值。设 λ 是 G^{σ} 的一个特征值，如果存在属于 λ 的一个特征向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，使得 $\sum_{i=1}^{n}x_i\neq 0$，则称 λ 是 G^{σ} 的主特征值。图的主特征值为研究图的性质和图的其它不变量都有重要的意义，它在化学等领域中有重要的应用。在 G^{σ} 的顶点 v_i 处做切换，相当于改变特征值 λ 的特征向量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 中元素 u_i 的符号。由于 G^{σ} 的切换可以改变它的主特征值。因此，给出某些图类的每个特征值都有一无零元素的特征向量具有重要意义。在本文中，我们主要证明了Wenger图的任意特征值对应的特征空间都包含一个无零元素的向量。进一步，我们证明了符号Wenger图在任意地一个顶点处做切换都会使得它的所有特征值变为主特征值。

关键词

邻接矩阵，主特征值，Wenger图

The Main Eigenvalues of Signed Wenger Graphs

Mingyue Xiang, Chao Zhang*

Department of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Aug. 14th, 2023; accepted: Oct. 4th, 2023; published: Oct. 12th, 2023

Abstract

Let $G^{\sigma}=(G,\sigma)$ be a signed graph and the eigenvalue of G^{σ} be the eigenvalue of its adjacency matrix. An eigenvalue of a signed graph is called a main eigenvalue if it has an eigenvector such

*通讯作者。

文章引用: 向明跃, 章超. 符号 Wenger 图的主特征值[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(5): 4849-4855.
DOI: 10.12677/orf.2023.135487

that the sum of whose entries is not zero. The main eigenvalue of a graph is of great significance to study the properties of a graph and other invariants of a graph. It has important applications in chemistry and other fields. Switching at the vertex v_i of G^σ is equivalent to changing the sign of the elements u_i in the eigenvector $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$ of the eigenvalue λ. The switching of G^σ can change its main eigenvalue. Therefore, it is important to show that every eigenvalue of some graph class has a nowherezero eigenvector. In this paper, we mainly prove that the eigenspace corresponding to any eigenvalue of the Wenger graph contains a nowherezero eigenvector. It is further more prove that all eigenvalues of signed Wenger graphs will become the main eigenvalues when switching at any vertex.

Keywords

Adjacency Matrix, Main Eigenvalue, Wenger Graph

1. 引言

在本文中，我们考虑的图都是简单无向有限图。设 $G=(V(G),E(G))$ 是顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边集 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 的图。我们称矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 为图的邻接矩阵，其中 a_{ij} 等于顶点 v_i 与顶点 v_j 的边数。显然，邻接矩阵是一个实对称非负矩阵。邻接矩阵的特征值称为图的特征值。如果一个向量中的所有分量都是非零的，那么称这个向量是无零元素的向量。若图的特征值 λ 所对应的特征空间与全为 1 的向量不正交，那么称 λ 是图的主特征值。图的主特征值由 Cvetković [1]在 1978 年引入，最初是用来简化计算图中长度为 $k(2\le k\le n)$ 的不同游走数(walk)的问题，并且作者还提出如何刻画具有 $k(2\le k\le n)$ 个主特征值的图的问题。在文献[2] [3]中，Hou 等人刻画了恰好具有两个主特征值的单圈图、双圈图和三圈图。Huang 等人在文献[4]中给出了构造具有 k 个主特征值的连通图的方法。Du 等人在文献[5]中通过图的并、连接等操作构造了顶点为 n 的无穷多个具有 $n-1$ 个主特征值的图。图的主特征值在许多领域中都有重要的应用。在代数图论中，可以通过图的主特征值来研究图的其它不变量，例如图的主角与主特征值的对应关系；在群理论中，Cvetković 和 Fowler [6]给出了图的主特征值的个数就是图的自同构群作用在它的顶点集上的轨道数的下界；在量子化学中，Cvetković 和 Gutman [7]利用图的主特征值为研究简单 Hückel 模型提供了关于 π 轨道的形式及其相对能量的信息，Hückel 分子轨道的 Hamilton 算子的主特征值是分子的电子轨道能级，主特征向量决定分子的电子轨道。

符号图是一个有序二元组 $G^\sigma=(G,\sigma)$，其中底图 $G=(V(G),E(G))$，符号函数 $\sigma:E(G)\to\{\pm\}$。当符号函数 σ 在符号图的所有边上对应为正号时，我们称 G^σ 为全正的符号图。我们称 $A(G^\sigma)=(a_{ij})_{n\times n}$ 为符号图 G^σ 的邻接矩阵，其中当顶点 v_i 与顶点 v_j 之间的边为正号时，$a_{ij}=1$；当顶点 v_i 与顶点 v_j 之间为负号时，$a_{ij}=-1$；当顶点 v_i 与顶点 v_j 之间没有边时，$a_{ij}=0$。设 λ 是 G^σ 的一个特征值，如果存在属于 λ 的一个特征向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，使得 $\sum_{i=1}^n x_i\ne 0$，则称 λ 是 G^σ 的一个主特征值。设 v 是符号图的任意顶点，X 是符号图顶点集的任意子集，在符号图中切换 v 是指改变与 v 相邻的边的符号，切换 X 是指切换子集 X 里的所有点。给定符号图的顶点集的某个子集 X，设 $S=diag(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，其中当 $v_i\in X$ 时 $s_i=-1$，当 $v_i\in X$ 时 $s_i=1$，称 S 为符号图 $G^\sigma=(G,\sigma)$ 关于 X 的切换矩阵。显然，在符号图的顶点子集 X 处做切

换后会得到新的符号图 $G^{\sigma'}=(G,\sigma')$，$A(G^{\sigma'})=SA(G^{\sigma})S^{-1}$ 且 $S=S^{-1}$。也就是说，如果 λ 是 $A(G^{\sigma})$ 的特征值，u 是 λ 对应的一个特征向量，那么 λ 也是 $A(G^{\sigma'})$ 的特征值，Su 是 λ 在 $A(G^{\sigma'})$ 中对应的一个特征向量。本文主要考虑可以通过全正符号图做切换得到的符号图。近几年来，许多关于图的主特征值的结论被推广到符号图中，例如在 G 图中，具有一个主特征值的图当且仅当它是正则图[1]，然而在符号图 G^{σ} 中，具有一个主特征值的符号图 G^{σ} 当且仅当它是网正则图[8]等。Akbari 等人在文献[9]中提出一个猜想：除了 (K_2,σ) 和 $(K_4\backslash\{e\},\sigma)$ 之外，任意全正的符号图都存在一个切换使得切换之后的符号图的所有特征值都是主特征值。目前，已经证明了 Cayley 图，距离正则图、顶点传递图、边传递图、双星图、路径、完全多部图、调和树 T_a、一类特殊树 $S_{n,k}$ 对该猜想成立[1] [10]。

设 $q=p^e$，其中 p 是一个素数，e 是任意正整数。对于 $m\ge 1$，设 P 和 L 是有限域 F_q 上 $m+1$ 维向量空间的两个副本(copy)，我们称 P 里面的元素为点(point)，记作 (p)；L 里面的元素称为线(line)，记作 $[l]$。Wenger 图，记为 $W_m(q)$，是以 P 和 L 为顶点集的二部图，任意的点 $(p)=(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1})\in P$ 和线 $[l]=[l_1,l_2,\cdots,l_{m+1}]\in L$ 相邻当且仅当以下 m 个方程成立：

$$\begin{gathered}l_2+p_2=l_1p_1,\\ l_3+p_3=l_2p_1,\\ \vdots\\ l_{m+1}+p_{m+1}=l_mp_1.\end{gathered} \tag{1}$$

注意，Wenger 图有 $2q^{m+1}$ 个顶点，q^{m+2} 条边，而且它是 q-正则图。Wenger 图最早由 Wenger 在 1991 年引入，最初用来解决极值图论问题[11]。Wenger 图的另外一种表示由 Viglione 提出[12]，他将定义方程组的等式右端仅用关于 p_1 和 l_1 的单项式表示，即 $l_{k+1}+p_{k+1}=l_1^kp_1$，其中 $k=2,\cdots,m+1$。Lazebnik 和 Ustimenko 在文献[13]中表明温格尔图的自同构群作用在点集 P、线集 L 和边集 $E(G)$ 上是传递的。文献[14]确定了 Wenger 图的所有特征值及重数。关于 Wenger 图的更多结果参见文献[15] [16] [17] [18]。

在本文中，我们主要研究 Wenger 图如何做切换可以使得它的所有特征值都变为主特征值。我们的主要结论是 Wenger 图的任意特征值都包含一个无零元素的特征向量(见定理 3.1)，进一步，我们证明了符号 Wenger 图在任意地一个顶点处切换都会使得它所有特征值变为主特征值(见定理 3.2)。

2. 预备知识

在这一节，我们介绍一些必要的定义和结论。

定义 1 [19]设 λ 是图 G 的特征值，如果 λ 对应的任意特征向量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 满足 $u_i=0$，我们称顶点 v_i 对于 λ 是 null；否则称 v_i 对于 λ 是 downer。

也就是说，设 λ 是图 G 一个特征值，代数重数为 r，如果 λ 在 $G-v_i$ 中的代数重数是 $r-1$，则 G 的一个顶点 v_i 对于 λ 是 downer。因此，图 G 的特征值 λ 对应的特征空间包含一个无零元素的特征向量当且仅当图 G 的所有顶点关于 λ 是 downer。

设 $Aut(G)$ 是图 G 的自同构群，如果对于图 G 的任意顶点 v_1 和 v_2 存在一个自同构 $\sigma\in Aut(G)$，使得 $\sigma(v_1)=v_2$，那么我们说图 G 是顶点传递图。类似地，如果对于图 G 的任意边 e_1 和 e_2 存在一个自同构 $\sigma\in Aut(G)$，使得 $\sigma(e_1)=e_2$，那么我们说图 G 是边传递图。对于顶点传递图和边传递图，有以下定理。

定理 2.1 [20]顶点传递图的每个顶点对于每个特征值都是 downer。

定理 2.2 [20]设 $\lambda\ne 0$ 是边传递图的一个特征值，那么 λ 存在一个无零元素的特征向量。

在主要结果的证明中，需要用到以下两个定理。

定理 2.3 [20]任意包含无零元素向量的特征子空间都有一个无零元素的正交基。

定理 2.4 [21]设 q 是一个素数幂，则

1) 当 $m \ge 3$，$q \ge 3$ 和 $m = 3$，q 是偶数时，$W_m(q)$ 是 q-正则半对称图。

2) $W_1(q)$ 是顶点传递图，q 是偶数时，$W_2(q)$ 是顶点传递图。

3) 当 $1 \le m \le q-1$ 时，$W_m(q)$ 是连通的；当 $m \ge q$ 时，$W_m(q)$ 有 q^{m-q+1} 个连通分支，且每一个连通分支同构于 $W_{q-1}(q)$。

3. 主要结果

在顶点 v_i 处做切换，相当于改变特征值 λ 的特征向量 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 中元素 u_i 的符号。当特征值的所有特征向量中分量元素 u_i 都为 0 时，在该点处做切换不影响特征值 λ 的主性。因此，我们重点讨论每个特征值都存在无零元素的特征向量的图。在本节中，我们首先证明以下定理。

定理 3.1 设 λ 是 Wenger 图的任意特征值，则 λ 对应的特征空间都包含一个无零元素的特征向量。

证明：对于 Wenger 图的顶点集，定理 2.4 的证明有以下自同构映射：

$$\sigma_i(x): V(H') \to V(H') \ i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$$

当 $i = 1$ 时 $\sigma_1(x): (p) \mapsto (p)^{\sigma_1(x)} = (p_1, p_2 + p_1 x, p_3, \cdots, p_{m+1})$；

当 $2 \le i \le m$ 时 $\sigma_i(x): (p) \mapsto (p)^{\sigma_i(x)} = (p_1, p_2, \cdots, p_{i-1}, p_i - x, p_{i+1} + p_1 x, p_{i+2}, \cdots, p_{m+1})$；

当 $i = m+1$ 时 $\sigma_{m+1}(x): (p) \mapsto (p)^{\sigma_{m+1}(x)} = (p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}, p_m - x)$；

$$\alpha(x): V(H') \to V(H')$$

$$\alpha(x): (p) \mapsto (p)^{\alpha(x)} = \left(p_1 + x, p_2, \cdots, p_j + \sum_{i=1}^{j-2} C_{j-2}^i p_{j-i} x^i, \cdots, p_{m+1}, \cdots, p_{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i p_{m+1-i} x^i\right).$$

因此，Wenger 图是边传递图，且当 $1 \le m \le q-1$ 时，$W_m(q)$ 是连通图，当 $m \ge q$ 时，$W_m(q)$ 有 q^{m-q+1} 个连通分支，且每一个连通分支同构于 $W_{q-1}(q)$。根据定理 2.2，当 $\lambda \ne 0$ 时，λ 存在一个无零元素的特征向量。下面我们证明 $\lambda = 0$ 时它对应的特征空间里存在一个无零元素的特征向量 γ。

情况 1：当 $1 \le m \le q-1$ 时，$W_m(q)$ 是连通图。设 Wenger 图的两个部集分别为 L 和 P，我们可以排列它的邻接矩阵 $A(W_m(q))$ 的行和列，使 $A(W_m(q))$ 具有以下形式：

$$A(W_m(q)) = \begin{pmatrix} 0 & N^{\mathrm{T}} \\ N & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

由此可得

$$A(W_m(q))^2 = \begin{pmatrix} N^{\mathrm{T}} N & 0 \\ 0 & N N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

如果存在 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{q^{m+1}})^{\mathrm{T}}$ 满足 $\alpha_i \ne 0$、$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_{q^{m+1}})^{\mathrm{T}}$ 满足 $\beta_i \ne 0$ 分别使得 $N^{\mathrm{T}} N \alpha = 0$、$N N^{\mathrm{T}} \beta = 0$，那么就存在向量 $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 使得 $A^2 \gamma = 0$。由于齐次线性方程 $NX = 0$ 与齐次线性方程 $N^{\mathrm{T}} N X = 0$ 具有相同的解，因此 $A\gamma = 0$。

1) 我们首先证明存在 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{q^{m+1}})^{\mathrm{T}}$ 满足 $\alpha_i \ne 0$ 使得 $N^{\mathrm{T}} N \alpha = 0$。设 H 是 L 上的点图(point-graph)，H 的顶点集是 L，H 中任意两个不同的线 $[l]$、$[l']$ 相邻当且仅当存在 $(p) \in P$ 使得 (p) 在 $W_m(q)$ 中与 $[l]$、

$[l']$ 相邻。更详细地说，如果存在 $p_1 \in F_q$ 使得，

$$l_1 \neq l_1' \text{和} l_{i+1} - l_{i+1}' = p_1\left(l_i - l_i'\right)\ i = 1,2,\cdots,m \tag{4}$$

那么 $[l]$、$[l']$ 在 H 中是相邻的。又因为 $l_{k+1} + p_{k+1} = l_1^k p_1$，其中 $k = 2,\cdots,m+1$。我们有 $l_1 \neq l_1'$ 和 $l_{i+1} - l_{i+1}' = p_1^i\left(l_1 - l_1'\right)\ i = 1,2,\cdots,m$，进而 H 同构于凯莱图 $Cay\left(\left(F_q^{m+1},+\right),S\right)$，其中

$$S = \left\{\left(t,tu,\cdots,tu^m\right) \middle| t \in F_q^*, u \in F_q\right\}. \tag{5}$$

由于凯莱图是顶点传递图[22]，因此 H 是顶点传递图。对于任意的 $\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m+1}\right) \in F_q$，$H$ 的特征值可以表示成以下形式(详见[14])：

$$\lambda_{\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{m+1}\right)} = \left|\left\{u \in F_q \middle| f(u) = 0\right\}\right|(q-1) - \left|\left\{u \in F_q \middle| f(u) \neq 0\right\}\right|. \tag{6}$$

其中 $f(u) = \xi_1 + \xi_2 u + \cdots + \xi_{m+1} u^m$。

由等式(6)得，当 $\left|\left\{u \in F_q \middle| f(u) = 0\right\}\right| = 0$ 时，$-q$ 是 H 的特征值。设 $A(H)$ 是 H 的邻接矩阵，通过对比实对称矩阵 $A(H)$ 和实对称矩阵 $N^{\mathrm{T}}N$ 中的元素，有

$$N^{\mathrm{T}}N = A(H) + qE. \tag{7}$$

其中 E 表示 n 阶单位矩阵。利用定理 2.1，H 的特征值 $-q$ 存在无零元素向量 α 使得 $A(H)\alpha = -q\alpha$。在等式(7)两端同时乘以 α，得到 $N^{\mathrm{T}}N\alpha = 0$。

2) 为了证明存在 $\beta = \left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{q^{m+1}}\right)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\beta_i \neq 0$ 使得 $NN^{\mathrm{T}}\beta = 0$。类似地，我们在 Wenger 图的点集 P 上定义一个线图 H' (line-graph)，H' 的顶点集是 P，H' 中任意两个不同的点 (p)，(p') 相邻当且仅当存在 $[l] \in L$ 使得 $[l]$ 在 $W_m(q)$ 中同时与 (p)，(p') 相邻。设 $A(H')$ 是 H' 的邻接矩阵，则

$$NN^{\mathrm{T}} = A(H') + qE. \tag{8}$$

由于 $N^{\mathrm{T}}N$ 和 NN^{T} 有相同的谱，因此 $-q$ 也是 NN^{T} 的一个特征值。下面我们证明 H' 是顶点传递图。根据 $\sigma_i(x)(1 \leq i \leq m+1)$，$\alpha(x)$ 可知 Wenger 图在部集 P 上是传递的，因此温格尔图在部集 P 上是保路径长度的且它可以诱导出一个顶点传递图 H'。也就是说，设 $(p) = \left(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1}\right)$，$(p') = \left(p_1',p_2',\cdots,p_{m+1}'\right)$ 是 H' 的任意两个不相同的顶点，存在一个自同构映射

$$\sigma = \sigma_{m+1}^{-1}\left(-l_{m+1}\right)\sigma_m^{-1}\left(-l_m\right)\cdots\sigma_2^{-1}\left(-l_2\right)\sigma_1^{-1}\left(-l_1\right)\alpha^{-1}\left(-p_1'-l_1\right)\alpha\left(-p_1-l_1\right)\sigma_1\left(-l_1\right)\sigma_2\left(-l_2\right)\cdots\sigma_m\left(-l_m\right)\sigma_{m+1}\left(-l_{m+1}\right)$$

使得 $\sigma\left((p)\right) = (p')$。具体映射过程如下所示：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_m \\ p_{m+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sigma_{m+1}(-l_{m+1})} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_m \\ p_{m+1}+l_{m+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sigma_m(-l_m)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{m-1} \\ p_m+l_m \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3+l_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sigma_2(-l_2)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2+l_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sigma_1(-l_1)}$$

$$\begin{pmatrix} p_1+l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\alpha(-p_1-l_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}(-p_1'-l_1)} \begin{pmatrix} p_1'+l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_1^{-1}(-l_1)} \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2'+l_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\sigma_2^{-1}(-l_2)} \begin{pmatrix} p' \\ p_2' \\ p_3'+l_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ \vdots \\ p_{m-1}' \\ p_m'+l_{m1} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_m^{-1}(-l_m)}\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ \vdots \\ p_m' \\ p_{m+1}'+l_{m+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\xrightarrow{\sigma_{m+1}^{-1}(-l_{m+1})}\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ \vdots \\ p_m' \\ p_{m+1}' \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

自同构映射 $\sigma_i(x)(1\le i\le m+1)$，$\alpha(x)$ 出现在定理 2.4 的证明中。

情况 2：当 $m\ge q$ 时，$W_m(q)$ 有 q^{m-q+1} 个分支且每一个分支同构于 $W_{q-1}(q)$。因此，$W_m(q)$ 的邻接矩阵有以下形式：

$$A(W_m(q))=\begin{pmatrix} A(W_{q-1}(q)) & & & \\ & A(W_{q-1}(q)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(W_{q-1}(q)) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

显然，$W_{q-1}(q)$ 和 $W_m(q)$ 具有相同的特征值。由情况 1 可得，$W_{q-1}(q)$ 的任意特征值总存在一个无零元素的向量。不妨设 λ 是 $W_{q-1}(q)$ 的任意特征值，α 是 λ 在 $W_{q-1}(q)$ 中的无零元素特征向量，则根据(9)得 λ 在 $W_m(q)$ 中也有一个无零元素的特征向量 γ，γ 由 q^{m-q+1} 个 α 组成。证毕。

通过定理 3.1，我们给出适当的切换使得符号 Wenger 图的所有特征值都变为主特征值。

定理 3.2 设 $G^{\sigma}=(G,\sigma)$ 是一个符号图，其中底图 G 是 Wenger 图，符号函数 $\sigma:E(G)\to\{+\}$，则 G^{σ} 在任意地一个顶点处切换都会使得它所有特征值变为主特征值。

证明： 由定理 3.1 可知，符号图 G^{σ} 的每一个特征值都存在一个无零元素的特征向量。设 λ 是 G^{σ} 的一个特征值，代数重数为 r，通过定理 2.3，λ 对应的特征空间存在一组无零元素正交向量基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$。进而符号图 G^{σ} 的特征空间存在一组无零元素正交向量基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$。由于 G 是 q-正则图，所以 q 是 G^{σ} 的一个特征值且 q 存在一个全为 1 的特征向量。不妨设 $\beta_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则内积 $(\beta_1,\beta_i)=0$，其中 $i=2,\cdots,n$。因此，存在一个切换 $S_j(1\le j\le n)$ 使得 $S_j\alpha_i\ne 0(1\le i\le n)$，也就是说在 G^{σ} 的任意一点处做切换会使得它的所有特征值变为主特征值。证毕。

4. 总结

在本文中，我们通过寻找点图 H 和线图 H' 的每个特征值都有一个无零元素的特征向量给出了 Wenger 图的任意特征值都包含一个无零元素的特征向量。基于这一事实，我们还给出了符号 Wenger 图在任意地一个顶点处做切换都会使得它所有特征值变为主特征值。然而，对于线性 Wenger 图的任意特征值是否存在一个无零元素的特征向量还是一个未知的问题。进一步的说，符号线性 Wenger 图在哪些顶点处做切换都会使得它所有特征值变为主特征值也是同一个未知的问题。通过本文的研究不仅为我们理解 Wenger 图提供了新的角度，并且为下一步研究符号线性 Wenger 图提供了思路。

基金项目

本文由贵州省科技厅项目(批准号：黔科合基础[2020]1Y405)资助。

参考文献

[1] Cvetkovic, D. (1978) The Main Part of the Spectrum, Divisors and Switching of Graphs. *Publications de L'Institut*

Mathématique [*Elektronische Ressource*], **23**, 31-38. https://zbmath.org/?q=an:0423.05028

[2] Hou, Y.P. and Tian, F. (2006) Unicyclic Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1143-1147. https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.11.025

[3] Hou, Y.P., Tang, Z.K. and Shiu, W.C. (2012) Some Results on Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1274-1278. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.11.025

[4] Huang, X.Y., Huang, Q.X. and Lu, L. (2015) Construction of Graphs with Exactly *k* Main Eigenvalues. *Linear Algebra and Its Applications*, **486**, 204-218. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.08.013

[5] Du, Z.N., Liu, F.J., Liu, S.Y. and Qiu, Z.M. (2021) Graphs with n-1 Main Eigenvalues. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112397. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112397

[6] Cvetković, D. and Fowler, P.W. (1999) A Group-Theoretical Bound for the Number of Main Eigenvalues of a Graph. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, **39**, 638-641. https://doi.org/10.1021/ci9900231

[7] Cvetković, D. and Gutman, I. (1977) Note on Branching. *Croatica Chemica Acta*, **49**, 115-121.

[8] Stanić, Z. (2020) Main Eigenvalues of Real Symmetric Matrices with Application to Signed Graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **70**, 1091-1102. https://doi.org/10.21136/CMJ.2020.0147-19

[9] Akbari, S., Franca, F.A.M., Ghasemian, E., Javarsineh, M. and de Lima, L.S. (2021) The Main Eigenvalues of Signed Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **614**, 270-278. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.04.029

[10] Shao, Z. and Yuan, X. (2022) Some Signed Graphs Whose Eigenvalues Are Main. *Applied Mathematics and Computation*, **423**, Article ID: 127014. https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127014

[11] Wenger, R. (1991) Extremal Graphs with no C^4's, C^6's, or C^{10}'s. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **52**, 113-116. https://doi.org/10.1016/0095-8956(91)90097-4

[12] Viglione, R. (2002) Properties of Some Algebraically Defined Graphs. *Publications de L'Institut Mathématique*, **23**, 31-38. http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/publ/43/6.pdf

[13] Lazebnik, F. and Ustimenko, V. (1993) New Examples of Graphs without Small Cycles and of Large Size. *European Journal of Combinatorics*, **14**, 445-460. https://doi.org/10.1006/eujc.1993.1048

[14] Cioabă, S.M., Lazebnik, F. and Li, W. (2014) On the Spectrum of Wenger Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **107**, 132-139. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.02.008

[15] Futorny, V. and Ustimenko, V. (2007) On Small World Semiplanes with Generalized Schubert Cells. *Acta Applicandae Mathematicae*, **98**, 47-61. https://link.springer.com/article/10.1007/s10440-007-9144-8 https://doi.org/10.1007/s10440-007-9144-8

[16] Mader, W. (1971) Minimale *n*-Fach Kantenzusammenhängende Graphen. *Mathematische Annalen*, **191**, 21-28. https://doi.org/10.1007/BF01433466

[17] Shao, J.Y., He, C.X. and Shan, H.Y. (2008) The Existence of Even Cycles with Specific Lengths in Wenger's Graph. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **24**, 281-288. https://link.springer.com/article/10.1007/s10255-006-6020-7 https://doi.org/10.1007/s10255-006-6020-7

[18] Viglione, R. (2008) On the Diameter of Wenger Graphs. *Acta Applicandae Mathematicae*, **104**, 173-176. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9249-8

[19] Johnson, C.R. and Sutton, B.D. (2004) Hermitian Matrices, Eigenvalue Multiplicities, and Eigenvector Components. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **26**, 390-399. https://doi.org/10.1137/S0895479802413649

[20] Akbari, S., Ghorbani, E. and Mahmoodi, A. (2013) Nowhere-Zero Eigenvectors of Graphs. *Linear Multilinear Algebra*, **61**, 273-279. https://doi.org/10.1080/03081087.2012.675331

[21] Lazebnik, F. and Viglione, R. (2002) An Infinite Series of Regular Edge—But Not Vertex-Transitive Graphs. *Journal of Graph Theory*, **41**, 249-258. https://doi.org/10.1002/jgt.10064

[22] Godsi, C. and Royle, G.F. (2001) Algebraic Graph Theory. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9