Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2024, 14(2), 1270-1275
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2024.142224

完全图K_{31}的电流图构造

刘家宏

中央民族大学，理学院，北京

收稿日期：2024年2月6日；录用日期：2024年2月26日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

本文根据电流图的构造原理，对K_{31}的两类电流图分别构造了方程组，通过编程求解方程组，从而得到了完全图K_{31}的两类电流图的所有电流图分别有536和580个，为研究其可定向嵌入及染色等相关问题奠定了基础。

关键词

完全图，电流图，线性方程组

The Construction of Current Graphs of the Complete Graph K_{31}

Jiahong Liu

College of Science, Minzu University of China, Beijing

Received: Feb. 6^{th}, 2024; accepted: Feb. 26^{th}, 2024; published: Apr. 30^{th}, 2024

Abstract

This paper mainly constructs equations for the two types of current graphs of K_{31} based on the construction principle of current graphs, and solves the equations by

文章引用: 刘家宏. 完全图K_{31}的电流图构造[J]. 运筹与模糊学, 2024, 14(2): 1270-1275.
DOI: 10.12677/orf.2024.142224

programming, obtaining 538 and 560 current graphs of the two types of current graphs of complete graph K_{31}, which lays a foundation for the study of related problems such as orientable embedding and coloring.

Keywords

Complete Graph, Current Graphs, System of Linear Equations

1. 引言

图的嵌入理论广泛应用于集成电路等现代社会的各个领域，其研究内容主要是图的可嵌入性理论及嵌入的计数理论。对于完全图的可定向嵌入问题，Korzhik V-P和Voss H-J于2001年利用电流图理论证明了K_{12s+7}至少有4^s个不同构的可定向三角剖分嵌入 [1]。此后，不断有学者投入到相关问题的研究当中。但由于在计算方法和手段上受到一定限制，很难求出所有的电流赋值方式及嵌入方式。

完全图K_{12s+7}具有两类重要的电流图基础图，即圈梯形图以及莫比乌斯梯形图 [2]。本文主要根据电流图的构造原理，通过引入方程组的方法，分别构造K_{31}（即对于K_{12s+7}，$k = 2$时）的这两类电流图，将求电流图的问题转化为求方程组所有解的问题，从而求出了完全图K_{31}的两类电流图的所有电流赋值方式。

2. K_{31}第一类电流图的构造

完全图K_{31}的第一类电流图基础图为圈梯形图，如图 1所示，具有10个顶点和15条边，且含有两个长度为3的圈，将其记为G_1，由G_1得到的电流图即称为K_{31}的第一类电流图，记为$\mathscr{G}_1$。下面将计算$\mathscr{G}_1$的所有的电流赋值方式数。

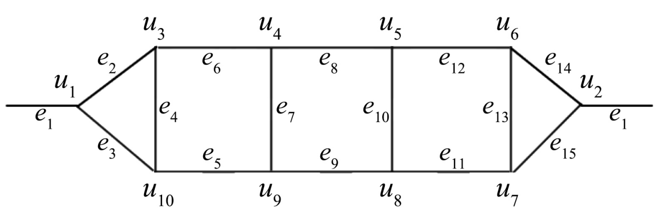

Figure 1. G_1
图 1. G_1

设$G \in \mathscr{G}_1$，如图 2所示：

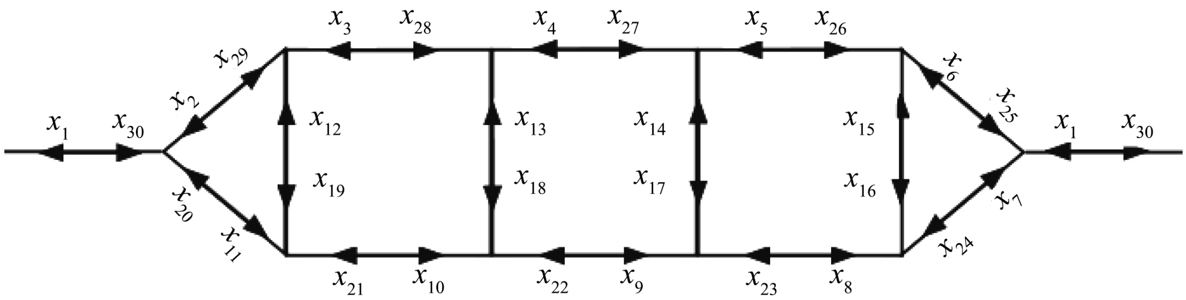

Figure 2. Example of the first type of current graph of K_{31}
图 2. K_{31}的第一类电流图示例

首先将完全图K_{31}的31个顶点标记为阿贝尔群Z_{31}中的元素：0,1,2,⋯，30，相应的，即对于K_{31}的第一类电流图G，在整数加法群Z_{31}上定义G的电流值 [3]，并将其电流值的变量集合记作$X_1 = \{x_i | i \in N^+, i \leq 30\}$，且$X_1$满足以下条件（其中$x_i, x_j \in X_1$）：

1、任意两个电流值互不相等，即:

$$x_i \neq x_j;$$

2、任意一条边上的两个电流之和为0，即:

$$x_i + x_j = 0(i + j = 31);$$

3、Z_{31}中的每个元素：$\pm 1, \pm 2, \cdots \pm 15$作为电流值，在电流图中均恰好出现一次。即$G$上的所有电流值刚好取遍$Z_{31}$中的所有元素；

4、任意一个三度点均满足基尔霍夫电流定律（Kirchhoff’s Current Law，KCL），即所有进入某节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和.

$$\begin{cases} x_i + x_j = 0(i + j = 31, \\ i, j \in N^+, 1 \leq i \leq 15, 16 \leq j \leq 30) \\ x_2 + x_{20} + x_{30} = 0 \\ x_3 + x_{12} + x_{29} = 0 \\ x_4 + x_{13} + x_{28} = 0 \\ x_5 + x_{14} + x_{27} = 0 \\ x_6 + x_{15} + x_{26} = 0 \\ x_1 + x_7 + x_{25} = 0 \\ x_8 + x_{16} + x_{24} = 0 \\ x_9 + x_{17} + x_{23} = 0 \\ x_{10} + x_{18} + x_{22} = 0 \\ x_{11} + x_{19} + x_{21} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

对于不定方程组，首先考虑求出其自由变量：将第一个方程带入其他方程，并化简得到6个自由变量$x_6, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$，且它们满足

$$\begin{cases} x_1 = x_6 - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \\ x_2 = x_6 + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \\ x_3 = x_6 + x_{13} + x_{14} + x_{15} \\ x_4 = x_6 + x_{14} + x_{15} \\ x_5 = x_6 + x_{15} \\ x_7 = x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} - x_{15} \\ x_8 = x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} \\ x_9 = x_{11} - x_{12} - x_{13} \\ x_{10} = x_{11} - x_{12} \end{cases} \tag{2}$$

显然，只要我们确定了6个自由变量取值，其他24个变量的取值也就随之确定。且它们的取值范围均为$\pm1, \pm2, \cdots \pm 15$，因此，先考虑从集合的30个数中选取6个互不相等的数，赋给自由变量，即共有$A_{30}^6 = 427518000$种赋值方式，然后根据上式求出其他变量，最后再检验它们是否满足上述条件3的互异条件即可。

运用python编程实现上述赋值和检验的过程，共得到1072组满足条件的方程组的解，由于方程组的齐次性，这些解存在两两完全互为相反数的情况（即电流图的电流完全反向），我们将其视为同一组解，于是有536组解，又因为方程组的每一组解都可以得到G的一种电流赋值方式，于是有：

定理1　完全图K_{31}第一类电流图有536个。

3. K_{31}第二类电流图的构造

完全图K_{31}的第二类电流图基础图为不含有三角形的莫比乌斯梯形图，如图 3所示，其同样地具有10个顶点和15条边，记为G_2，并将由G_2得到的电流图称为K_{31}的第二类电流图，记为$\mathscr{G}_2$。下面将计算$\mathscr{G}_2$的所有的电流赋值方式数。

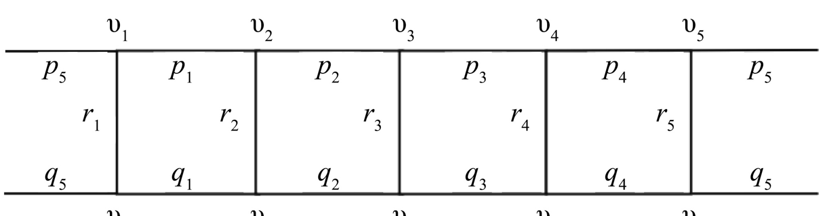

Figure 3. G_2

图 3. G_2

设$G' \in \mathscr{G}_2$，如图 4所示：

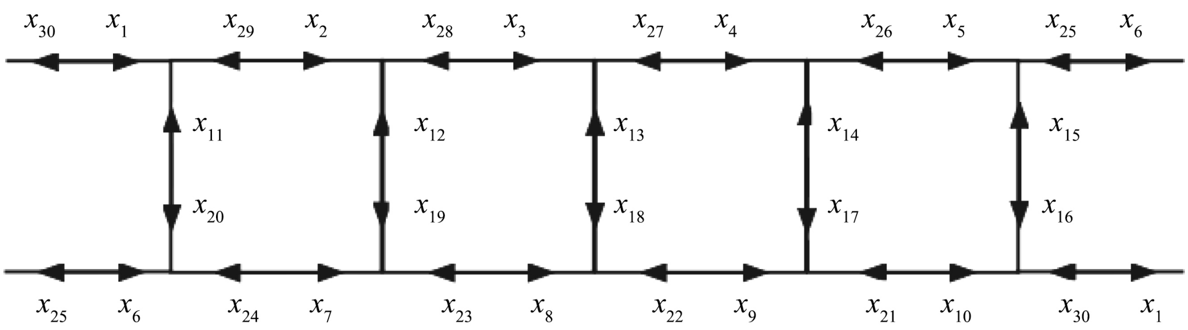

Figure 4. Example of the second type of current graph of K_{31}
图 4. K_{31}的第二类电流图示例

类似于K_{31}的第一类电流图，将K_{31}的第二类电流图的电流值变量集合记作$X_2 = \{x_i | i \in N^+, i \leq 30\}$，电流赋值为阿贝尔群$Z_{31}$中的元素，且也满足第一节中的条件1、2、3、4。于是可得到如下不定方程组：

$$\begin{cases} x_i + x_j = 0(i+j=31, \\ i,j \in N^+, 1 \leq i \leq 15, 16 \leq j \leq 30) \\ x_1 + x_{11} + x_{29} = 0 \\ x_2 + x_{12} + x_{28} = 0 \\ x_3 + x_{13} + x_{27} = 0 \\ x_4 + x_{14} + x_{26} = 0 \\ x_5 + x_{15} + x_{25} = 0 \\ x_6 + x_{20} + x_{24} = 0 \\ x_7 + x_{19} + x_{23} = 0 \\ x_8 + x_{18} + x_{22} = 0 \\ x_9 + x_{17} + x_{21} = 0 \\ x_{10} + x_{16} + x_{30} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

同样地，先对方程组进行化简，得到6个自由变量，再运用类似第一类电流图的方法，先对自由变量赋值，再检验是否满足条件。通过编程进行计算，可求得该不定方程组共有580个满足条件的解，方程组的一组解对应了G'的一种电流赋值方式，即对应得到：

定理2 完全图K_{31}第二类电流图有580个。

4. 结语

对于K_{31}两类电流图，我们可以在求出所有赋值方式的基础上，继续探究其中不同构的电流图个数，进而研究K_{31}在曲面上的嵌入等相关问题。但随着K_{12s+7}中s值的增长，其电流图个数也呈现指数增长 [4]，因此还需要进一步研究和优化现有的计算方法。

参考文献

[1] Korzhik, V. and Voss, H-J. (2001) On the Number of Non-Isomorphic Orientable Regular Embeddings of Complete Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **81**, 58-76. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1993

[2] Ringel, G. (1974) Map Color Theorem. Springer-Verlag, Berlin.

[3] 高越, 李赵祥. 完全图在可定向曲面的三角剖分嵌入数[J]. 应用数学学报, 2021, 44(2): 175-187.

[4] 任韩, 白云. 图的指数多个最大亏格嵌人与完全图的亏格嵌入[J]. 中国科学: 数学, 2008, 38(5): 595-600.