

The Modified Semismooth Newton Algorithm Based on the ROF Model

Zhifeng Pang¹, Juncheng Lv²

¹College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng

²Zhengzhou Industry and Trade School, Zhengzhou

Email: zhifengpang@163.com; acheng@163.com

Received: Mar. 14th, 2011; revised: Mar. 31st, 2011; accepted: Apr. 1st, 2011.

Abstract: In this paper, based on the dual algorithm of ROF model, we propose a modified semismooth Newton algorithm. Furthermore, we prove that the proposed algorithm converges Q -superlinearly, and also refer that this algorithm can improve the computational efficiency by choosing a suitable parameter α . The simulations show that the new modified algorithm can perfectly restore image and keep the faster convergence rate.

Keywords: Image Denoising; Total Variation; Semismooth Newton Algorithm

基于 ROF 模型的修正半光滑牛顿法

庞志峰¹, 吕军成²

¹河南大学数学与信息科学学院, 开封

²郑州工业贸易学校, 郑州

Email: zhifengpang@163.com; acheng@163.com

收稿日期: 2011 年 3 月 14 日; 修回日期: 2011 年 3 月 31 日; 录用日期: 2011 年 4 月 1 日

摘要: 本文基于 ROF 去噪模型的对偶算法提出一个修正的半光滑牛顿法。文中证明了该算法具有 Q 超线性收敛, 同时指出选取适当的参数 α 可以提高数值计算效率。实验表明, 建议的修正算法既能较好的复原图像, 又具有较快的收敛速度。

关键词: 图像去噪; 全变差; 半光滑牛顿法

1. 引言

在处理图像的过程中, 由于引入的噪声经常导致图像退化, 因此图像去噪是图像处理中的一个最基本的问题。传统的图像去噪方法主要是滤除图像的高频成分, 但是由于图像的细节也分布在高频区域, 所以总是在滤除噪声的同时模糊了图像的边缘。为了保持图像的边缘, Rudin 等人在文献[1]中提出如下的全变差(Total Variation)去噪模型 (ROF模型):

$$\min_u \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{BV(\Omega)} \quad (1)$$

其中 u 是待修复的原始图像, f 是噪声图像, $\lambda > 0$ 是正则化因子, $|u|_{BV(\Omega)}$ 定义为:

$$|u|_{BV(\Omega)} := \sup_u \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} p \, dx \mid p \in C_c^1(\Omega, R), |p|_{L^1(\Omega)} \leq 1 \right\} < \infty$$

由于(1)中的 $|u|_{BV(\Omega)}$ 在原点并不可微, 所以通常情况下并不容易求解, 因此最近几年提出许多数值方法来解决这一问题。例如梯度下降法^[1]、不动点迭代法^[2]、分裂Bregman迭代法^[3]、离散优化算法^[4]、凸规划算法^[5]、对偶算法^[6,7]。本文研究Chambolle在文献[6]提出的对偶算法, 也就是把无约束问题(1)转化为下面的约束问题:

$$\begin{aligned} & \min_p \|\operatorname{div} p - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}, \\ & \text{s.t. } |p|_{L^1(\Omega)} \leq 1, p(x) \in C_c^1(\Omega, R) \end{aligned} \quad (2)$$

基于 (2), Chambolle 进一步建议用半隐式梯度下降法求解。虽然该方法具有运算快、编程实现简单等优势, 但是在求解过程中, 该方法要求泛函的值单调递减, 因而在最小值问题非常病态的情况下, 收敛速度很慢

^[8]且收敛阶为一阶的。基于半光滑方程的性质，最近 Ng 等人^[7]提出把(2)的最优性条件等价化成一组半光滑方程组，然后用阻尼高斯牛顿法来解，并证明了算法可以达到Q超线性收敛。然而，文献[7]中并没有具体考虑参数对收敛结果的影响，因此本文提出一个新的算法对文献[7]中的半光滑牛顿法进行修正，从而达到更快的收敛效果。

2. 修正的半光滑牛顿法

考虑图像的离散情况，假定图像是一个 $N \times N$ 的阵列。令 $(\cdot, \cdot)_X$ 表示欧几里德空间中的内积， $|\cdot|$ 表示 l^1 范数， $(p, q)_Y = \sum_{1 \leq i, j \leq N} (p_{i,j}^1 q_{i,j}^1 + p_{i,j}^2 q_{i,j}^2)$ ，其中 $X = \mathbb{R}^{N \times N}$ ， $p^1, p^2 \in X$ ， $p = (p^1, p^2) \in Y$ ， $q = (q^1, q^2) \in Y$ 。在离散情况下，通过引入Lagrange乘子 η ，文献[7]将问题(2)转化为下面的方程系统：

$$\begin{cases} (\nabla(\operatorname{div}p - \lambda f))_{i,j} + \eta_{i,j} p_{i,j} = 0 \\ 1 - |p_{i,j}|^2 \geq 0, \eta_{i,j} \geq 0 \\ \eta_{i,j} (1 - |p_{i,j}|^2) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots, N$ ，算子 div 满足 $(\operatorname{div}p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$ 。

现令 $M = N^2$ ，则利用行字典排序法依次可将 p^1, p^2 排列成一个新的列向量 $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^M$ ，设定 $g_1(v) = \nabla_x(\operatorname{div}p - \lambda f) \in \mathbb{R}^M$ ， $g_2(v) = \nabla_y(\operatorname{div}p - \lambda f) \in \mathbb{R}^M$ 其中 ∇_x, ∇_y 分别表示沿图像的 x 方向和 y 方向的一阶差分。记 $v = (v^1; v^2)$ ， $g(v) = (g_1(v); g_2(v))$ ，其中符号；表示按行排列。于是，问题(3)可以写成下面的紧凑格式：

$$H(v) = \begin{cases} H_k(v) \\ = -g_k(v) + |(g_k(v), g_{M+k}(v))| v_k = 0, \\ H_{M+k}(v) \\ = -g_{M+k}(v) + |(g_k(v), g_{M+k}(v))| v_{M+k} = 0, \\ H_{2M+k}(v) \\ = \phi(1 - v_k^2 - v_{M+k}^2, |(g_k(v), g_{M+k}(v))|^2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\eta_k = |(g_k(v), g_{M+k}(v))|$ ， $k = 1, 2, \dots, M$ ， $H: \mathbb{R}^{2M} \rightarrow \mathbb{R}^{3M}$ ， $\phi(a, b)$ 为NCP函数^[7]，它满足：

$$\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

显然，当 v 满足 $|(g_k(v), g_{M+k}(v))| = 0$ 或者 $|v_k^2 + v_{M+k}^2| = 1$ 时，上述的 $H(v)$ 并不可微，但是是强半光滑的，因此文献[7,9]中建议用广义牛顿法求解(4)，即：若已知 v^n ，则通过计算

$$v^{n+1} = v^n - V_n^{-1} H(v^n) \quad (5)$$

可得到 v^{n+1} ，其中 $V_n \in \partial_B H(v^n)$ ，这里

$$\partial_B H(x) := \left\{ \lim_{x^j \rightarrow x, x^j \in D_H} H'(x^j) \mid D_H := \{x \mid H \text{ 在 } x \text{ 处可微}\} \right\}.$$

然而，用广义牛顿法(5)解 $H(v) = 0$ 时，通常要求 V_n 可逆，这就限制了该方法的应用范围。为了克服这个缺陷，Jiang 等人在文献[10]中建议用

$$V_n \Phi(v^n) + (V_n^T V_n + \gamma^n I) d = 0 \quad (6)$$

去计算 $d^n = v^{n+1} - v^n$ ，其中 γ^n 为一个正常数，

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \|H(v)\|^2 \quad (7)$$

表示 $H(v)$ 的价值函数，这是为了保证算法的全局性。显然， $\Phi(v)$ 是二次连续可微的，因此有 $\nabla \Phi(v) = \partial H(v)^T H(v)$ ，于是文献[7]建议用阻尼修正高斯牛顿法解(6)，这里 $\partial H(v)$ 表示 $\partial_B H$ 的凸包。但是，文献[7]中并没有具体考虑参数对收敛速度的影响，因此我们引入一个小的参数对阻尼修正高斯牛顿法进行修正的算法。

算法：修正的阻尼修正高斯牛顿法。

(1) 选取 $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ ， $\tau \in (0, 1)$ ， $\gamma^0 > 0$ 和初始点 $v^0 \in \mathbb{R}^{2M}$ ，令 $n := 0$ 。

(2) 选取 $V_n \in \partial_B \Phi(v^n)^T$ ，用预处理共轭梯度法(PCG)解(6)得到 d^n 。若 $d^n = 0$ ，则终止；否则，进行第3步。

(3) 令 l^n 是满足下列不等式的最小整数 l

$$\Phi(v^n + \tau^l d^n) \leq \Phi(v^n) + \sigma \tau^l \nabla \Phi(v^n)^T d^n \quad (8)$$

(4) 选取 $\gamma^{n+1} = \alpha \min \{ \Phi(v^{n+1}), \|\nabla \Phi(v^{n+1})\| \}$ ，其中常数 $\alpha \in (0, 1)$ 。令 $v^{n+1} = v^n + \tau^{l^n} d^n$ ， $n := n + 1$ ，返回第2步。

注：这里的算法和[7]中稍微有些不同。其一，在第(2)步中，用PCG算法来提高计算下降方向 d^n 的速度；其二，在选取 γ^n 时， $\min(\cdot, \cdot)$ 函数之前加上了小的正参数 α 。事实上，若把(6)中的 $V_n \Phi(v^n)$ 移到等式右侧之后两边取 l^2 范数可以看出相当于增加了下降方向的步长。因此选取适宜的 α ，可以提高算法的速



Figure 1. (a) Original image; (b) Noisy image (SNR = 37.5); (c) Restored image by Cham algorithm (SNR = 48.32); (d) Restored image by semismooth Newton algorithm (SNR = 48.5320, $\alpha = 1$)

图 1. (a) 初始图像; (b) 噪声图像(SNR = 37.5); (c) Cham Alg 复原的图像(SNR = 48.32); (d) 半光滑牛顿法修复原的图像(SNR = 48.5320, $\alpha = 1$)

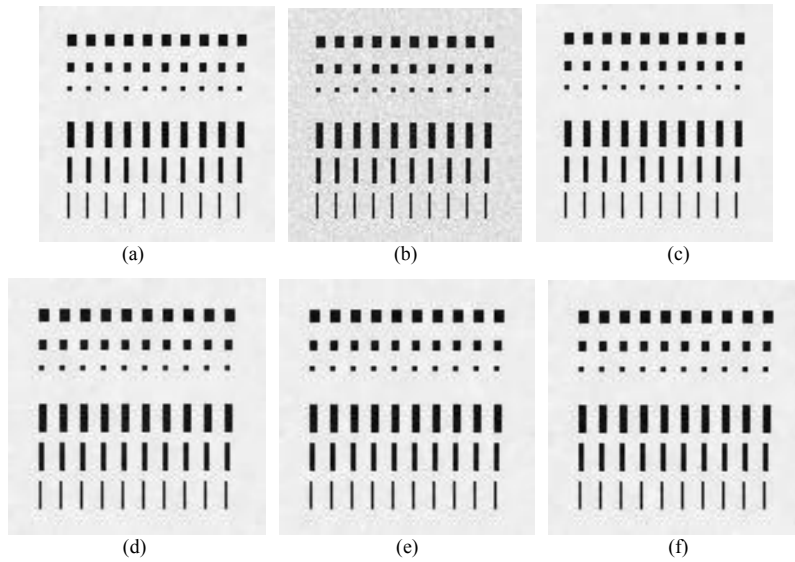


Figure 2. (a) Original image; (b) Noisy image (SNR = 40.9346); (c) Restored image by Cham algorithm (SNR=56.6150); (d) Restored image by semismooth Newton algorithm (SNR = 55.9082, $\alpha = 1$); (e) Restored image by semismooth Newton algorithm (SNR = 55.7883, $\alpha = 0.5$); (f) Restored image by semismooth Newton algorithm (SNR = 55.2872, $\alpha = 0.25$)

图 2. (a) 初始图像; (b) 噪声图像(SNR = 40.9346); (c) Cham Alg 修复的图像(SNR = 56.6150); (d) 半光滑牛顿法修复的图像(SNR = 55.9082, $\alpha = 1$); (e) 半光滑牛顿法修复的图像(SNR = 55.7883, $\alpha = 0.5$); (f) 半光滑牛顿法修复的图像(SNR = 55.2872, $\alpha = 0.25$)

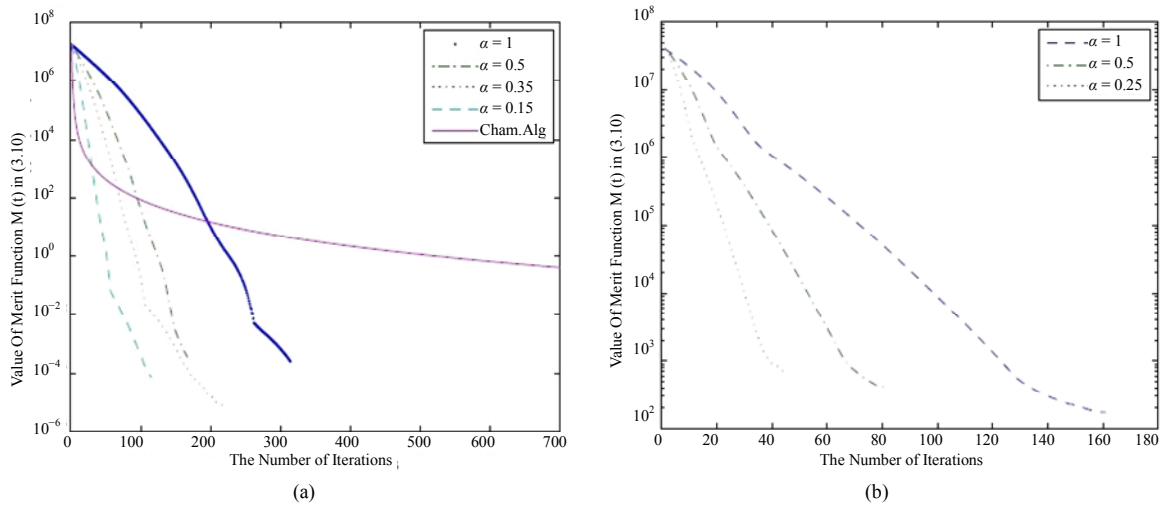


Figure 3. (a) The curve of the value function by the directed method; (b) The curve of the value function by PCG

图 3. (a) 直接求解的价值函数收敛曲线; (b) PCG 价值函数收敛曲线

度。另外，算法的第3步事实上是Armijo算法，因此 l 的值总是能达到。很明显，若 $d^n = 0$ ，由(6)知 v^n 必定是 $\Phi(v)$ 的稳定点，因此我们总假设算法不在有限步终止。

类似于文献[7,10]，我们有下面的结论：

定理2.1 假设 v^* 是上述算法产生序列 $\{v^n\}$ 的聚点，则序列 $\{v^n\}$ Q超线性收敛于 v^* ，并且有 v^* 是价值函数 $\Phi(v)$ 的稳定点和 $\lim_{n \rightarrow \infty} d^n = 0$ 。另外，若 $\partial_B H(v^*)$ 列满秩，则 v^* 是(4)的解。

定理2.2 假设 v^* 是上述算法产生序列 $\{v^n\}$ 的聚点并且 $\{p^n\}$ 对应于序列 $\{v^n\}$ 。若 $H(v^*) = 0$ ，则(1)的解可由下式得到： $u^* = f - \frac{1}{\lambda} \operatorname{div} p^*$ 。

3. 数值试验

本节用相关的数值试验来说明建议算法的有效性。为了测定修复图像的质量，对给定的观测图像 u 、噪声图像 f 和噪声 η 定义信噪比为(SNR)：

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\int_{\Omega} (f - \bar{f})^2 \, dx dy}{\int_{\Omega} (\eta - \bar{\eta})^2 \, dx dy} \right),$$

其中 $\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx dy, \bar{\eta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \eta \, dx dy$ 。数值试验是采用Matlab软件编程，实验结果是在Intel core(TM) 2 DUO CPU, 2.20GHz机器上运行实现。

例1：研究大小为 128×128 ，添加方差为12的白色高斯噪声的Cameraman图像。初始图像，噪声图像，用Chambolle对偶算法以及半光滑牛顿法复原的图像依次图1所示。对于对偶算法和半光滑牛顿算法，正则化参数 $\lambda = 8$ ，当两次迭代 p^n 和 p^{n+1} 小于 10^{-5} 时算法终止。其中对偶算法时间步长 $t = 1/8$ 。从图1中可以发现这两种算法几乎有着同样的复原效果，并且可以看出ROF模型具有保持图像的边缘特性。另外为了比较我们提出的算法，我们绘出价值函数 $\Phi(v)$ 与迭代次数对应的曲线图。从图3的(a)中可以看出适当的选取 α 的值能改进算法的计算速度。

例2：考虑在计算 d^n 运用PCG预处理的情况。其中图2中的(b)是添加了方差为10的dot图像，其大小为 100×100 。由于dot图像含有不同的像素块，因此该图像也能很好的检验ROF模型的复原能力。很明显，半

光滑牛顿法和对偶方法几乎有着同样的修复能力。从图3中的(b)再次看出选择适当的 α 可以提高算法的计算速度。同时我们也注意到了在用PCG预处理时，价值函数的值数量级只能降到 10^{-2} 。这有点不同于上面的例子。这是因为在进行预处理时，有舍入误差产生。但是用PCG解高斯牛顿方程(6)仅仅需要0.16秒，而直接求解则需要1.35秒。

4. 结论

本文基于ROF去噪模型提出一个对半光滑牛顿法的修正阻尼高斯牛顿法。文中给出了算法的收敛性结果并且指出适当的选取参数 α 可以提高收敛速度，通过数值仿真可以看出该算法相比较于文献[6,7]具有较快的收敛速度。

5. 致谢

第一作者感谢国家自然科学基金资助项目(60872129)的资助。

参考文献 (References)

- [1] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, (60): 259-268.
- [2] C. Vogel, E. Oman. Iterative methods for total variation denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, 17(1): 227-238.
- [3] T. Goldstein, S. Osher. The split Bregman for L1 regularization regularized problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323-343.
- [4] J. Darbon, M. Sigelle. Image restoration with discrete constrained total variation Part 1: Fast and exact optimization. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2006, 26(3): 261-276.
- [5] D. Goldfarb, W. Yin. Second-order cone programming methods for total variation based image restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27(2): 622-645.
- [6] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1-2): 89-97.
- [7] M. Ng, L. Qi, Y. Yang, et al. On semismooth Newton's methods for total variation minimization. *J. Math. Image Vision*, 2007, 27(3): 265-276.
- [8] G. Yu, L. Qi, Y. Dai. On nonmonotone Chambolle gradient projection algorithms for total variation image restoration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2009, 35(2): 143-154.
- [9] L. Qi. Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations. *Mathematics of Operations Research*, 1993, 18(1): 227-244.
- [10] H. Jiang, D. Ralph. Global and local superlinear convergence analysis of Newton-type methods for semismooth equations with smooth least squares, in *Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, M. Fukushima and L. Qi (eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998:181-209.