Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 15-20
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.11004 Published Online April 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Property and Application of One Class of Generalized Tribonacci Sequence

Fucheng Liao[1], Qingyun Wang[2], Min Niu[1]
[1]Department of Mathematics and Mechanics, Beijing University of Science and Technology, Beijing
[2]Beijing Heizhuanghu Middle School, Beijing
Email: niuminfly@sohu.com
Received: Mar.14th, 2011; revised: Mar.20th, 2011; accepted: Mar.22nd, 2011.

Abstract: This paper obtains a more extensive sequence based on the Tribonacci sequence —— the generalized Tribonacci sequence. Using the combinatorics and matrix methods and techniques, a variety of representations of the general term formula of the generalized Tribonacci sequence are obtained. Properties and theorems of the generalized Tribonacci sequence are acquired in according to its definition. The application of Tribonacci sequence is also involved. It has further promulgated that the generalized Tribonacci sequence and the common phenomenon in practical life are closely related.

Keywords: Generalized Tribonacci Sequence; Fibonacci Sequence; Generating Function; Incidence Matrix

一类广义 Tribonacci 数列的性质与应用

廖福成 [1]，王青云 [2]，牛　敏 [1]
[1]北京科技大学数理学院数力系，北京；[2]北京黑庄户中学，北京
Email: niuminfly@sohu.com
收稿日期：2011 年 3 月 14 日；修回日期：2011 年 3 月 20 日；录用日期：2011 年 3 月 22 日

摘　要：在 Tribonacci 数列的基础上推广得到一类更广泛的数列——广义 Tribonacci 数列。分别利用组合数学和矩阵论中的方法与技巧对该数列进行了分析研究，求得了广义 Tribonacci 数列通项的多种表示形式。并利用其定义推导得到广义 Tribonacci 数列的性质定理，同时应用广义 Tribonacci 数列的通项公式和性质定理解决了实际问题，进一步揭示了广义 Tribonacci 数列与实际生活中的现象是紧密联系的。

关键词：广义 Tribonacci 数列；Fibonacci 数列；生成函数；关联矩阵

1. 引言

1202年，意大利著名的数学家Fibonacci在他的著作《算盘书》中提出了兔子繁殖问题，引出了一个有趣的数列——Fibonacci数列。该数列有很多奇妙的性质，引起很多人的关注，有关Fibonacci数列已经有许多好的结果。如吴振奎[1]证明了Fibonacci数列的通项公式的几种表示形式，张文鹏[2]给出了Fibonacci数列的一系列恒等式。随着研究的深入，学者们又定义了一类较Fibonacci数列更为一般的数列——广义Fibonacci数列，如库热西·爱力尤甫[3]通过进一步研究证明了广义Fibonacci数列的一些性质，席高文[4]给出了一些恒等式，等等。本文主要研究在Tribonacci数列[5]的基础上推广的广义Tribonacci数列的性质。

具体说来，所谓 Tribonacci 数列[5]，是指这样一个数列 $\{T_n\}$，它满足初始条件 $T_0=0,\ T_1=1,$，$T_2=1,$ 及递推关系 $T_n=T_{n-1}+T_{n-2}+T_{n-3}$，其中 $n=3,4,\cdots$。

Tribonacci 数列引起了学术界的普遍关注。如对于每个非负整数都可以唯一的表示成 $n=\sum_{i\ge 0} n_i T_i$，其中 $n_i\in\{0,1\}$，且 $n_i n_{i+1} n_{i+2}=0$，$i\ge 0$。并以此为依

*基金项目：数学天元基金(10626003)。

据找到了 Tribonacci 词与数列之间的关系。

本文在第二部分利用广义 Tribonacci 数列的生成函数，求得了广义 Tribonacci 数列的表示形式。第三部分通过广义 Tribonacci 代换关联矩阵证明了另一种表示形式及性质定理。第四部分给出广义 Tribonacci 数列的行列式形式。最后对广义 Tribonacci 数列的几个性质给出了简单的证明，并应用广义 Tribonacci 数列的通项公式及性质解决了实际问题。

广义 Tribonacci 数列定义如下：

定义 1 若数列 $\{T(u,v,w,n)\}$ 满足 $T(u,v,w,0)=0$，$T(u,v,w,1)=a$，$T(u,v,w,2)=au$，及递推关系

$$T(u,v,w,n)=uT(u,v,w,n-1)+vT(u,v,w,n-2)+wT(u,v,w,n-3)$$

其中 $n=0,1,2\cdots$，a，u，v，w 是任意的正整数，则称 $\{T(u,v,w,n)\}$ 为广义 Tribonacci 数列。

注 1：当 u，v，w 任意一个为零时，$\{T(u,v,w,n)\}$ 为特殊数列，本文不作研究。特别地，当 $w=0$ 时，$\{T(u,v,w,n)\}$ 为广义 Fibonacci 数列。

注 2：当 $a=u=v=w=1$ 时 $\{T(u,v,w,n)\}$ 为 Tribonacci 数列。

为书写方便以下设 $\Phi_i=T(u,v,w,i)$。

2. 广义 Tribonacci 数列通项的生成函数求法

广义 Tribonacci 数列与广义 Fibonacci 数列有类似的性质。利用广义 Tribonacci 数列项构造一个幂级数：

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n x^n$$

称 $\Phi(x)$ 为广义 Fibonacci 数列的生成函数。我们有：

定理 1 广义 Tribonacci 数列中，对任意的整数 n，m $(m\geq 2)$ 有：

$$a\Phi_{n+m}=\Phi_{n+1}\Phi_m+\Phi_n\left(v\Phi_{m-1}+w\Phi_{m-2}\right)+w\Phi_{n-1}\Phi_{m-1},\ (m\geq 2) \tag{2}$$

证 由生成函数及定义，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n x^n=\Phi_0+\Phi_1x+\Phi_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\Phi_n x^n=ax+ux\Phi(x)+vx^2\Phi(x)+wx^3\Phi(x)$$

$$\text{即 }\Phi(x)=\frac{ax}{1-ux-vx^2-wx^3} \tag{3}$$

又因

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{n+m}x^{n+m}&=\Phi(x)-\left(\Phi_0+\Phi_1x+\cdots+\Phi_{m-1}x^{m-1}\right)\\&=\Phi(x)-\frac{1}{a}\left(\Phi_1+\Phi_2x+\cdots+\Phi_{m-1}x^{m-2}\right)\left(1-ux-vx^2-wx^3\right)\Phi(x)\\&=\frac{1}{a}\Phi(x)\left(\Phi_{m-1}x^{m-1}+v\Phi_{m-2}x^{m-1}+w\Phi_{m-3}x^{m-1}+w\Phi_{m-1}x^m+w\Phi_{m-2}x^m+w\Phi_{m-1}x^{m+1}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Phi_{n+1}\Phi_m+\Phi_n\left(v\Phi_{m-1}+w\Phi_{m-2}\right)+w\Phi_{n-1}\Phi_{m-1}\right]x^{m+n}\end{aligned}$$

比较等式两边的 x^{n+m} 的系数即得(2)式。证毕。

上述定理中令 $m=n$，可得推论 1

推论 1: (1) $a\Phi_{2n-1}=\Phi_n^2+v\Phi_{n-1}^2+2w\Phi_{n-1}\Phi_{n-2}$

(2) $a\Phi_{2n}=2\Phi_n\Phi_{n+1}-u\Phi_n^2+w\Phi_{n-1}^2$

文[3][4]中分别证明了 Fibonacci 数列与广义 Fibonacci 数列的通项公式的表示方法，通过以下证明同样可求出广义 Tribonacci 数列的通项公式，即定理 2。

定理 2

$$\Phi_{n+1}=a\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-3k}{2}\right]}\binom{n-2k-r}{k}\binom{n-3k-r}{r}u^{n-3k-2r}v^r w^k\quad n=0,1,2\cdots \tag{4}$$

证 由(3)式及广义 Tribonacci 生成函数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n x^n = ax\left(1-ux-vx^2-wx^3\right)^{-1} = ax\sum_{n=0}^{\infty}\left(ux+vx^2+wx^3\right)^n \quad \left(\text{其中}\left|ux+vx^2+wx^3\right|<1\right)$$

比较等式两边 x^{n+1} 的系数就得(4)式。证毕。

3. 广义 Tribonacci 数列通项的矩阵表示法

矩阵是连接序列与数列的纽带，为了看清它们之间的关系，我们先引入以下定义：

定义 2 设 σ 是定义在字母集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_d\}$ 上的代换，$\left|\sigma(a_j)\right|_{a_i}$ 是 $d\times d$ 阶矩阵 M_σ 的 i 行 j 列上的元素，其中 $\left|\sigma(a_j)\right|_{a_i}$ 表示 $\sigma(a_j)$ 中 a_i 的个数，则称 M_σ 为代换 σ 的关联矩阵[6]。

定义 3 σ 为定义在字母集 $A=\{a,b,c\}$ 上的代换，且满足 $\sigma(a)=ab,\ \sigma(b)=ac$，$\sigma(c)=a$，则称 σ 为 Tribonacci 代换[5]。

定义 4 若代换 σ 使得 $\sigma(a)=a^u b^a,\ \sigma(b)=a^v c^a$，$\sigma(c)=a^w$ 成立，其中 $a^u=\underbrace{aa\cdots a}_{u}$，则 σ 为广义 Tribonacci 代换。

由定义 3 知 Tribonacci 代换的关联矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，由定义 4 知广义 Tribonacci 代换的关联矩阵为 $\begin{pmatrix}u&v&w\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$，下面以广义 Tribonacci 代换关联矩阵为基础推导得到一些很重要的定理以及广义 Tribonacci 数列通项公式的矩阵表示形式。

定理 3 对于广义 Tribonacci 代换关联矩阵有：

$$\begin{pmatrix}u&v&w\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}^{n+3}=\begin{pmatrix}\Phi_{n+4}&v\Phi_{n+3}+w\Phi_{n+2}&w\Phi_{n+3}\\\Phi_{n+3}&v\Phi_{n+2}+w\Phi_{n+1}&w\Phi_{n+2}\\\Phi_{n+2}&v\Phi_{n+1}+w\Phi_n&w\Phi_{n+1}\end{pmatrix}$$

证 用数学归纳法，当 $n=0$ 时，

$$\begin{pmatrix}u&v&w\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}^{3}=\begin{pmatrix}au^3+2auv+wa&v\left(au^2+av\right)+auw&\left(au^2+av\right)w\\au^2+av&avu+aw&auw\\au&av&aw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_4&v\Phi_3+w\Phi_2&w\Phi_3\\\Phi_3&v\Phi_2+w\Phi_1&w\Phi_2\\\Phi_2&v\Phi_1+w\Phi_0&w\Phi_1\end{pmatrix}$$

结论显然成立。

假设 $n=k-1(n\ge1)$ 时命题成立，则 $n=k$ 时，

$$\begin{pmatrix}u&v&w\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}^{n+3}=\begin{pmatrix}\Phi_{n+3}&v\Phi_{n+2}+w\Phi_{n+1}&w\Phi_{n+2}\\\Phi_{n+2}&v\Phi_{n+1}+w\Phi_n&w\Phi_{n+1}\\\Phi_{n+1}&v\Phi_n+w\Phi_{n-1}&w\Phi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&v&w\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_{n+4}&v\Phi_{n+3}+w\Phi_{n+2}&w\Phi_{n+3}\\\Phi_{n+3}&v\Phi_{n+2}+w\Phi_{n+1}&w\Phi_{n+2}\\\Phi_{n+2}&v\Phi_{n+1}+w\Phi_n&w\Phi_{n+1}\end{pmatrix}$$

证毕。

此等式两边取行列式然后等式两边同时除以 w^2，就得定理 4。

定理 4

$$a^{2n+6}w^{n+1}=\Phi_{n+4}\Phi_{n+1}^2-\Phi_{n+4}\Phi_{n+2}\Phi_n-2\Phi_{n+3}\Phi_{n+2}\Phi_{n+1}+\Phi_{n+3}^2\Phi_n+\Phi_{n+2}^3$$

定理 5 若 $(u,v,w)=1$, 则

$$\left(\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}\right)=a\ \left(n=1,2,\cdots\right)$$

证 先证 $\Phi_1=1$，若 $(u,v,w)=1$, 则 $\left(\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}\right)=1$，如果 $\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}$ 不是互素的，则由定理 4，$\left(\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}\right)\left|w^{n-2}\right.$，即 w 的某一素因子整除 $\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}$。又由定理 2 可知，$w$ 的那个素因子也整除 u，v，这与条件 $(u,v,w)=1$ 矛盾。因此 $\left(\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}\right)=1$，所以 $\Phi_1=a$ 时，$\left(\Phi_{n-1},\Phi_n,\Phi_{n+1}\right)=a$。

证毕。

定理6 设 λ_1、λ_2、λ_3 是方程 $\lambda^3-u\lambda^2-v\lambda-w=0$ 的三个根，$e_1=(1,0,0)$，则存在可逆矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ a & a & a\end{pmatrix}$$

使得广义Tribonacci数列的通项为：

$$\Phi_{n+1}=\mathrm{e}_1\cdot P\cdot\mathrm{diag}\left(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n\right)\cdot P^{-1}\cdot\mathrm{e}_1^T\quad(n\ge 1)$$

证 广义 Tribonacci 代换关联矩阵为Φ，其特征方程$\lambda^3-u\lambda^2-v\lambda-w=0$，因为$u$、$v$、$w$是任意的正整数，可证它存在一个实根和两复根，设为$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$，又特征根$\lambda_i\,(i=1,2,3)$对应的特征向量为$\left(\lambda_i^2,\lambda_i,a\right)^T$，所以存在可逆矩阵$P$使得$\Phi=P\cdot\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)\cdot P^{-1}$，其中$P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ a & a & a\end{pmatrix}$，由定理 3，$\Phi^n=P\cdot\mathrm{diag}\left(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n\right)\cdot P^{-1}$，而$\Phi^n$的第一行第一列的元素为$\Phi_{n+1}$，因此$\Phi_{n+1}$可表示成$\Phi_{n+1}=e_1\cdot P\cdot\mathrm{diag}\left(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n\right)\cdot P^{-1}\cdot e_1^T$，其中$e_1=(1,0,0)$。证毕。

4. 广义 Tribonacci 数列通项的行列式形式

文[1]给出了Fibonacci数列通项的行列式形式，通过对Fibonacci数列递推关系与行列式研究，我们可得到广义Tribonacci数列的行列式形式。

定理7 对广义Tribonacci数列$\{\Phi_n\}$，有

$$\Phi_{n+1}=\begin{vmatrix}au & -v & w & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & u & -v & w & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & u & -v & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -v & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u & -v\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & u\end{vmatrix}_{n\times n}\quad(n\ge 1)$$

证 由$\Phi_2=au$，$\Phi_3=\begin{vmatrix}au & -v\\ a & u\end{vmatrix}=au^2+av$，$\Phi_4=\begin{vmatrix}u & -v & w\\ a & u & -v\\ 0 & a & u\end{vmatrix}=au^3+2auv+wa$，等式成立。

设当$n\le k\,(k\ge 4)$时，等式都成立，则当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}au & -v & w & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & u & -v & w & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & u & -v & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -v & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u & -v\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & u\end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}=w\begin{vmatrix}au & -v & w & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & u & -v & w & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & u & -v & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -v & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u & -v\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & u\end{vmatrix}_{(k-2)\times(k-2)}\\ &-(-v)\begin{vmatrix}au & -v & w & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & u & -v & w & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & u & -v & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -v & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u & -v\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & u\end{vmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}+u\begin{vmatrix}au & -v & w & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & u & -v & w & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & u & -v & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -v & w\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u & -v\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & u\end{vmatrix}_{k\times k}\\ &=u\Phi_{k+1}+v\Phi_k+w\Phi_{k-1}=\Phi_{k+2}\end{aligned}$$

所以等式成立。证毕。

5. 广义Tribonacci数列的几个性质

通过以上的分析证明，发现广义 Tribonacci 数列与广义 Fibonacci 数列通项的表示形式类似。下面我们证明广义 Tribonacci 数列的性质，同时发现它与广义 Fibonacci 数列的性质是紧密联系的。

性质 1 若$u+v+w-1\neq 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_i=\frac{\Phi_{n+1}+(v+w)\Phi_n+w\Phi_{n-1}-a}{u+v+w-1} \tag{5}$$

证 设 $S=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\cdots+\Phi_n$，

则 $uS=u\Phi_1+u\Phi_2+u\Phi_3+\cdots+u\Phi_n$，

$vS=v\Phi_1+v\Phi_2+v\Phi_3+\cdots+v\Phi_n$，

$wS=w\Phi_1+w\Phi_2+w\Phi_3+\cdots+w\Phi_n$

因此，有

$$\begin{aligned}uS+vS+wS&=au+(u\Phi_2+v\Phi_1)+(u\Phi_3+v\Phi_2+w\Phi_1)+\cdots+(u\Phi_{n-1}+v\Phi_{n-2}+w\Phi_{n-3})\\&+(u\Phi_n+v\Phi_{n-1}+w\Phi_{n-2})+v\Phi_n+w\Phi_{n-1}+w\Phi_n\\&=\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\cdots+\Phi_n+\Phi_{n+1}+v\Phi_n+w\Phi_{n-1}+w\Phi_n\\uS+vS+wS&=-a+S+\Phi_{n+1}+v\Phi_n+w\Phi_{n-1}+w\Phi_n\end{aligned}$$

又因$u+v+w-1\neq 0$，得(5)式。

性质 2 若$v-u-w-1\neq 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\Phi_i=\frac{(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}+(-1)^n(v-w)\Phi_n+(-1)^{n-1}w\Phi_{n-1}+a}{v-u-w-1} \tag{6}$$

证 设 $L=-\Phi_1+\Phi_2-\Phi_3+\cdots+(-1)^n\Phi_n$，则

$vL=-v\Phi_1+v\Phi_2-v\Phi_3+\cdots+(-1)^n v\Phi_n$

$-uL=u\Phi_1-u\Phi_2+u\Phi_3+\cdots+(-1)^{n+1}u\Phi_n$

$-wL=w\Phi_1-w\Phi_2+w\Phi_3+\cdots+(-1)^{n+1}w\Phi_n$

因此，有

$$\begin{aligned}vL-uL-wL&=u\Phi_1+(-u\Phi_2-v\Phi_1)+(u\Phi_3+v\Phi_2+w\Phi_1)+\cdots\\&+\left[(-1)^{n+1}u\Phi_n+(-1)^{n-1}v\Phi_{n-1}+(-1)^{n-1}w\Phi_{n-2}\right]+(-1)^n v\Phi_n+(-1)^{n-1}w\Phi_{n-1}+(-1)^{n+1}w\Phi_n\\&=\Phi_1+L+(-1)^{n+1}\Phi_{n+1}+(-1)^n v\Phi_n+(-1)^{n-1}w\Phi_{n-1}+(-1)^{n+1}w\Phi_n\end{aligned}$$

而$v-u-w-1\neq 0$，因此有(6)式。

性质 3 对于广义 Tribonacci 数列，其中a，u，v，w为任意的正整数，有

$$(uv+w)\sum_{k=1}^{n}u^{n-k}\Phi_k=\Phi_{n+3}-v\Phi_{n+1}-au^{n+1} \tag{7}$$

证 由广义 Tribonacci 数列的定义，有

$$w\Phi_n=\Phi_{n+3}-u\Phi_{n+2}-v\Phi_{n+1}$$

$$wu\Phi_{n-1}=u\Phi_{n+2}-u^2\Phi_{n+1}-uv\Phi_n$$

$$\vdots$$

$$wu^{n-1}\Phi_1=u^{n-1}\Phi_4-u^n\Phi_3-u^{n-1}v\Phi_2$$

$$wu^n\Phi_0=u^n\Phi_3-u^{n+1}\Phi_2-u^n v\Phi_1$$

等式两边相加，得(7)式。

用同样的方法可以证明性质 4、性质 5，不再赘述。

性质 4 对于广义 Tribonacci 数列中的偶数项，有

$$(uv+w)\sum_{k=1}^{n-1}v^{k-2}\Phi_{2k}=\Phi_{2n+1}-u\Phi_{2n}-av^n$$

性质 5 对于广义 Tribonacci 数列中的奇数项，有

$$(uv+w)\sum_{k=1}^{n-1}v^{n-k-1}\Phi_{2k-1}=\Phi_{2n}-u\Phi_{2n-1}$$

6. 广义 Tribonacci 数列的应用

某人得了一种传染病，该传染病的发病周期为三天，因病毒没有异化，病人不知道自己感染病毒，正常去上班。第一天他传染给了u个人，第二天传染给了v个人，第三天传给了w个人，第四天病毒异化住进医院，不再传染。传染上病的人也按照这样的规律传染给其他人，在此期间已经传上病毒的不再感染，即传染上病的人没有重复。若$u=3$，$v=4$，$w=2$，那么 10 天后共有多少人感染传染病？

分析：依题意，某人某天得病，得病后第一天有u

个人感染病毒，第二天有 u^2+v 个人感染病毒，第三天有 u^3+uv+w 个人感染病毒，第四天第一个得传染病的人发病住进医院，不再传染。如此分析下去，设第 n 天感染病毒的人数为 Φ_{n+1}，则第 n 天由前一天的病毒感染者传染的人数为 $u\Phi_n$，由第 $n-2$ 天病毒感染者传染的人数为 $v\Phi_{n-1}$，由第 $n-3$ 天传染的人数为 $w\Phi_{n-2}$，所以第 n 天感染病毒的人数为 $u\Phi_n+v\Phi_{n-1}+w\Phi_{n-2}$，它恰好构成广义 Tribonacci 数列。从而当 $u=3$，$v=4$，$w=2$ 时，10 天后共有 $\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_{10}$ 位感染病毒，利用性质 1 可得到 10 天后感染病毒的总人数为

$$\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_{10}=\frac{\Phi_{11}+\left(4+2\right)\Phi_{10}+2\Phi_9-1}{3+4+2-1}=330988$$

参考文献 (References)

[1] 吴振奎. 斐波那契数列[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1987.

[2] W. P. Zhang. Some identities involving the Fibonacci number. The Fibonacci Quarterly, 1997, 35: 225-229.

[3] 库热西·爱力尤甫. 广义 Fibonacci 序列的几个性质[J]. 新疆师范大学学报, 2000, 19(1): 17-23.

[4] 席高文. 广义 Fibonacci 数的一些恒等式[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 420-426.

[5] Bo Tan. Some properties of the Tribonacci sequence. European Journal of Combinatorics, 2007, 28(6): 1703-1719.

[6] N. Pytheas Fogg. Subtitution in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Berlin: Spinger, 2002.

