Pure Mathematics 理论数学, **2011, 1, 68-72**
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12015 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Some Conditions for the Inverse Limit Induced by a Continuous Self-Map on a Circle to be Expansive

Risong Li*, Zengxiong Cheng
School of science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang
Email: gdoulrs@163.com
Received Jun. 20th, 2011; revised Jul. 3rd, 2011; accepted Jul. 8th 2011.

Abstract: Let $C^0\left(S^1\right)$ be the set of all continuous maps of the unit circle. Let $\Omega(f)$ and $\deg(f)$ be the non-wandering set and the degree of *f*, respectively. Let $f \in C^0\left(S^1\right)$. In this paper, it was proved that : 1) If *f* is a strictly monotone function then it is topologically conjugate to *g* and $\Omega\left(f^k\right)=S^1$ for any $k \geq 1$, where $g(z)=z^m, z \in S^1$ and $m=\deg(f)$; 2) The inverse limit system $\left(S^1{}_f, \sigma_f\right)$ which is generated by *f* is expansive if and only if *f* is positively expansive; 3) For any integer $n>0$, *f* is positively expansive if and only if f^n is positively expansive. Also, some equivalent conditions on a continuous selfmap with expansive inverse limit on a circle are given, and some important properties of these maps were obtained. Some corresponding results in the literatures are improved and extended.

Keywords: Topologically Ergodic; Topologically Transitive; Covering Projection; Inverse Limit System; Lifting System

圆周上连续自映射的逆极限是可扩的一些条件

黎日松*，陈增雄
广东海洋大学理学院，湛江
Email: gdoulrs@163.com
收稿日期：2011 年 6 月 20 日；修回日期: 7 月 3 日；录用日期：7 月 8 日

摘　要：设 $C^0\left(S^1\right)$ 为单位圆 S^1 上连续自映射的集合，$\Omega(f)$ 为 f 的非游荡点集，$\deg(f)$ 为 f 的度。设 $f \in C^0\left(S^1\right)$，本文证明了：1) 若 f 是严格单调的，则 f 与 g 拓扑共轭，其中 $g(z)=z^m, z \in S^1, m=\deg(f)$，且对任一正整数 k, $\Omega\left(f^k\right)=S^1$；2) f 的逆极限 $\left(S^1{}_f, \sigma_f\right)$ 是可扩的当且仅当 f 是正向可扩的；3) 对任一整数 $n>0$，f 是正向可扩的当且仅当 f^n 是正向可扩的。并给出了 S^1 上逆极限可扩的连续自映射的一些等价刻划，也得到了这类映射的一些重要性质，改进与推广了已有文献的相应结果。

关键词：拓扑遍历；拓扑可迁；覆叠投射；逆极限系统；提升系统

1. 引言

可扩性在结构稳定与拓扑稳定的研究中起着极其重要的作用。对离散动力系统而言，因自映射的不可逆性给研究带来了本质性的困难，故人们试图通过对其逆极限的研究来揭示该自映射的动力行为，有关这方面的工作见文[1-3]。文[3]给出了连续映射的正向可扩性与其逆极限的可扩性间的关系并指出了：紧致度量空间上正向可扩的连续满射，其逆极限是可扩的，且其逆极限的可扩性是映射在拓扑共轭下的不变性。文[4]研究了圆周上一类自映射的正向可扩性与其逆极限的可扩性间的联系，得到了圆周上连续满射的逆极限可扩等价于该自映射拓扑共轭于扩张映射。文[5]介绍了圆周上连续自映射的动力性质的一些研究工作并补充了一些结果。有关动力系统中的传递属性的分类见文[6,7]。拓扑遍历性不同于拓扑可迁性与拓扑混合性且它严格介于这两个属性之间[8]。文[9]对拓扑遍历

与双重拓扑遍历作较系统的研究。马蹄与拓扑熵是研究圆周上连续自映射的动力性质的重要的工具[5]。本文将利用映射度、提升和拓扑遍历映射与双重拓扑遍历映射以及严格单调函数的特点，在文[4,5]基础上，进一步研究逆极限可扩的圆周上连续自映射，给出了这类映射的许多新的刻划，也给出了这类映射的一些性质。这些结果进一步改进与推广了文[4,5]的相应结果。同时利用我们的方法可简化文[4]一些结果的证明。

以 $C^0(X)$，$C^0_{TT}(X)$，$C^0_{TOT}(X)$，$C^0_{TE}(X)$，$C^0_{TOE}(X)$，$C^0_{TDE}(X)$和$C^0_{TWM}(X)$分别表示空间X上连续自映射之集、拓扑传递的连续自映射之集、完全传递的连续自映射之集、拓扑遍历的连续自映射之集、全遍历的连续自映射之集、拓扑双重遍历的连续自映射之集和拓扑弱混合的连续自映射之集。符号“$\Leftrightarrow$”总表示“当且仅当”。以$C^0_{SM}(S^1)$表示S^1上严格单调的自映射之集。并分别以$C^0_{EXP}(X)$和$C^0_{PEXP}(X)$表示X上连续可扩的自映射之集和X上连续正向可扩的自映射之集。为方便计，本文所涉及的概念和记号均参考文[3-5,10-13]。

2. 结果及其证明

引理 1 设 $f\in C^0(S^1)$ 是严格单调的，则 $\deg(f)\neq 0$。其证明可直接从定义得到，故从略。

引理 2 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m, z\in S^1$ 不含有马蹄。其证明容易，故从略。

推论 1 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m, z\in S^1$ 不是扩展型的。由文[5]的定理 1。1 容易证得此推论。

引理 3 设 $|m|\ge 2$，则 $g(z)=z^m, z\in S^1$ 是扩展型的。由文[5]的命题 1。1 易知此引理成立。

推论 2 设 $|m|\ge 2$，则 $g(z)=z^m, z\in S^1$ 含有马蹄。其证明容易，故从略。

引理 4 设 $f,g\in C^0(S^1)$ 且 f 与 g 拓扑共轭，则 f 含有马蹄当且仅当 g 含有马蹄。其证明可直接从定义得到，故从略。

引理 5[14]设 $f^n,g\in C^0(S^1)$，且 f 与 g 拓扑共轭，则 $\deg(f)=\deg(g)$。

我们注意到平移是等距映射，利用定义和引理 5 容易得到以下引理 6。

引理 6 设 $f,g\in C^0(S^1)$ 且 f 与 g 拓扑共轭，则 f 是扩展型的当且仅当 g 是扩展型的。

引理 7 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m, z\in S^1$ 不是扩张映射。其证明直接由定义得到，故从略。

引理 8[8]设 X 是紧致度量空间。若 $f\in C^0{}_{TT}(X)$ 且 f 的拟弱几乎周期点集是稠密的，则 f 是拓扑遍历的。

定理 1 设 $f\in C^0_{SM}(S^1)$，则 f 与 g 拓扑共轭，其中 $g(z)=z^m, z\in S^1$，$m=\deg(f)$，并且对任一正整数 k，均有 $\Omega(f^k)=S^1$。

证明 设 $f\in C^0(S^1)$ 是严格单调递增的。由定义可知 $\deg(f)\ge 1$。先证明：若 $m=\deg(f)\ge 1$，则有严格单调的保向同胚 $\alpha\in C^0(S^1)$ 满足 $g\circ\alpha=\alpha\circ f$。记 $V=\{\overline{\alpha}|\overline{\alpha}:R\to R$ 是 α 的提升且 $\deg(\alpha)=1$，α 是严格单调递增的$\}$。度量 D 定义为：$D(\overline{\alpha},\overline{\beta})=\max\limits_{x\in R}\left(\left|\overline{\alpha}(x)-\overline{\beta(x)}\right|\right)$，$\forall\overline{\alpha},\overline{\beta}\in V$。由于 $\overline{\alpha}(x+1)=\overline{\alpha}(x)$，故易证 D 为 V 上的度量。以下证明：设 $\{\overline{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}\subset V$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}\overline{\alpha_i}=\overline{\alpha}$，则 $\overline{\alpha}\in V$。由 D 的定义知 $\{\overline{\alpha_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $\overline{\alpha}(x)$。又圆周上连续自映射的提升是一致连续的，故 $\overline{\alpha_i}(x)$ 是一致连续的且 $\overline{\alpha}(x)$ 连续。由 $\overline{\alpha_i}(x+1)=\overline{\alpha_i}(x)+1$ 知 $\overline{\alpha}(x+1)=\overline{\alpha}(x)+1,\forall x\in R$ $1,\forall x\in R$，且对 $\forall x,y\in R$，若 $x<y$，则 $\overline{\alpha_i}(x)<\overline{\alpha_i}(y)$。故 $\overline{\alpha}(x)\le\overline{\alpha}(\mathrm{y})$。由于 $\overline{\alpha_i}^{-1}$ 也是严格单调递增的，$i=1,2,\cdots$，故可不妨设 $\lim\limits_{i\to\infty}\overline{\alpha_i}^{-1}=\overline{\beta}$。因 $\{\overline{\alpha_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $\overline{\alpha}(x)$，故对 $\forall\varepsilon>0$，有 $N\ge 0$，使当 $i>N$ 时，$\left|\overline{\alpha}\left(\overline{\alpha_i}^{-1}(x)\right)-\overline{\alpha_i}\left(\overline{\alpha_i}^{-1}(x)\right)\right|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in R$ 均成立，即当 $i>N$ 时，$\left|\overline{\alpha}\left(\overline{\alpha_i}^{-1}(x)\right)-x\right|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in R$ 均成立。故 $\{\overline{\alpha}\circ\overline{\alpha_i}\}_{i=}^{\infty}$ 一致收敛于 id_R，从而 $\overline{\alpha}\circ\overline{\beta}=id_R$，因而 $\overline{\alpha}$ 是个同胚映射，从而 $\overline{\alpha}$ 是严格单调递增的。因此 $\overline{\alpha}\in V$，即 (V,D) 是完备度量空间。

设 $F:R\to R$，$G:R\to R$ 分别是 f 和 g 的提升，则 F,G^{-1} 均为同胚映射。定义算子 $T:V\to C^0(R)$ 为 $T(\overline{\alpha})=G^{-1}\circ\overline{\alpha}\circ F$，$\forall\overline{\alpha}\in V$。由文[1]命题 1 的证明知对 $\forall\overline{\alpha}\in V$，$T(\overline{\alpha})$ 为圆周上映射度等于 1 的某连续单调映射 β 的提升。因 F,G 和 $\overline{\alpha}$ 是严格单调递增的，故 $T(\overline{\alpha})$ 是严格单调递增的。所以 $T(\overline{\alpha})\in V$，即 $T(V)\subset V$。由[4]的命题 1 的证明知 $T:V\to V$ 是压缩映射。故 $T:V\to V$ 有唯一的不动点 $\overline{\alpha}\in V$，即 $G\circ\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\circ F$。设 $\overline{\alpha}$ 是 α 的提升。由于 α 的提升 $\overline{\alpha}$ 是

同胚映射且 $\deg(\alpha)=1$，故由定义易证 α 也是同胚映射。因此存在严格单调递增的保向同胚 $\alpha\in C^0(S^1)$，使得 $g\circ\alpha=\alpha\circ f$ 。故 f 与 g 拓扑共轭。

设 $f\in C^0(S^1)$ 为严格单调递减的且 $\deg(f)=m\le -1$ 。记 $g_0(z)=z^{-1}, g_1(z)=z^{|m|}$ 。则 $g_0\circ f$ 是严格单调递增的且 $g_0\circ g_1=g_1\circ g_0=g$ ， $\deg(g_0\circ f)=-m=|m|\ge 1$ 。由上可知，存在严格单调递增的保向同胚 $\alpha\in C^0(S^1)$，使得 $g_1\circ\alpha=\alpha\circ(g_0\circ f)$ 。即 $g_1\circ\alpha=\alpha\circ g_0\circ f$，故 $g_1\circ(g_0\circ\alpha\circ g_0)=\alpha\circ g_0\circ f$，即 $(g_1\circ g_0)\circ(\alpha\circ g_0)=(\alpha\circ g_0)\circ f$ ，因而 $g\circ(\alpha\circ g_0)=(\alpha\circ g_0)\circ f$ 。因 $\deg(\alpha\circ g_0)=-1$ 且 α 是严格单调递增的保向同胚，故 $\alpha\circ g_0$ 是严格单调递减的反向同胚。

注记 1: ①我们对于严格单调递减的情形的证明方法与文[4]的证明方法完全不同。②此定理是文[4]的相应结果的推广。

下文的 g 均与定理 1 的 g 相同。为了方便，以下分别用 S,U 和 V 表示 $S^1,S^1{}_f$ 和 $S^1{}_{f^n}$，以“resp.”表示“相应地”。

推论 3 设 $f\in C^0(S^1)$ 是严格单调的且 $|\deg(f)|\ge 2$，则 f 是扩展型的。

证明 由引理 5、引理 6 和定理 1 即可得到。

定理 2 设 $f\in C^0(S^1)$ 是满射，n 是任意给定的正整数，则下列条件是等价的：1) $\sigma_f\in C^0_{EXP}(U)$；2) $(\sigma_f)^n\in C^0_{EXP}(U)$；3) f 拓扑共轭于 g；4) f^n 拓扑共轭于 g^n；5) $f\in C^0_{PEXP}(S)$；6) $f^n\in C^0_{PEXP}(S)$；7) $|\deg(f)|\ge 2$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；8) $|\deg(f^n)|\ge 2$ 且 $f^n\in C^0_{SM}(S)$；10) $f\in C^0_{TT}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；11) $f\in C^0_{TOT}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；13) $\sigma_f\in C^0_{TT}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；14) $\sigma_f\in C^0_{TOT}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；15) $(\sigma_f)^n\in C^0_{TT}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；16) $\Omega(f)\ne P(f)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；17) $\Omega(f^n)\ne P(f)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；18) f 是扩展型的且 $f\in C^0_{SM}(S)$；19) $f\in C^0_{TDE}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；20) $f\in C^0_{TOE}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；21) $f\in C^0_{TWM}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；22) $f:(S,B,m)\to(S,B,m)$ 是遍历的且 $f\in C^0_{SM}(S)$，其中 B 为 S 的所有 Borel 子集的 $\sigma-$ 代数，m 为 Haar 测度；23) $\sigma_f\in C^0_{TE}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；24) $\sigma_f\in C^0_{TDE}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；25) $\sigma_f\in C^0_{TOE}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；26) $\sigma_f\in C^0_{TWM}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；27) $f\in C^0_{TE}(S)\cap C^0_{SM}(S)$；28) $\sigma_f\in C^0_{TE}(U)$ 且 $f\in C^0_{SM}(S)$；29) f 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 $f\in C^0_{SM}(S)$；30) σ_f 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 $f\in C^0_{SM}(S)$。

证明 显然，若 $f,g\in C^0_{SM}(S)$，则 $f^{-1},f^n,f\circ g\in C^0_{SM}(S)$。因 $|\deg(f)|\ge 2\Leftrightarrow|\deg(f^n)|\ge 2$ ，故由[4]的定理 2 知：1) $\Rightarrow$ 3)，1) $\Rightarrow$ 5)，1) $\Rightarrow$ 7)和 1) $\Rightarrow$ 10)。由定义易知 2) $\Rightarrow$ 1)。据引理引 5、理 7 和[15]的引理 2。3 知 $|\deg(f)|\ge 2$ ，由[4]的定理 2 及引理 2 知 5) $\Rightarrow$ 1)和 6) $\Rightarrow$ 2)。由定理 1 和[4]的定理 2 知 7) $\Rightarrow$ 1)。因拓扑传递属性是拓扑共轭不变性，而当 $m=\pm 1$，则 $g(z)=z^m$ 不是拓扑传递的，据定理 1 知 10) $\Rightarrow$ 1)。因严格单调性是迭代不变的，故由[4]的定理 2 知 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 6) $\Leftrightarrow$ 8) $\Leftrightarrow$ 10)。由于可扩性是拓扑共轭不变性，故由[4]的引理 2 知 2) $\Leftrightarrow$ 1)。由于 $|\deg(f)|\ge 2$ 当且仅当 $|\deg(f^n)|\ge 2$ ，故 4) $\Leftrightarrow$ 3)。由 n 的任意性知 10) $\Leftrightarrow$ 11)。由[16]知 f 是拓扑传递的 $\Leftrightarrow$ σ_f 是拓扑传递的。从上面可知 10) $\Leftrightarrow$ 13) $\Leftrightarrow$ 14) $\Leftrightarrow$ 15)和 21) $\Leftrightarrow$ 26)。由于当且仅当 $m=\pm 1$ 时， $g(z)=z^m$ 的周期点集为 S，故由定理 1 知 7) $\Leftrightarrow$ 16) $\Leftrightarrow$ 17)。由推论 1、引理 3、引理 6 知 7) $\Leftrightarrow$ 8) $\Leftrightarrow$ 18)。由于当 $|m|>1$ 时 $g(z)=z^m$ 的周期点集的闭包为 S，故由[9]的系知 11) $\Leftrightarrow$ 19) $\Leftrightarrow$ 20) $\Leftrightarrow$ 21)。由于 S 关于复数的乘法和复数的倒数构成拓扑群，而当 $|m|>1$ 时， $g(z)=z^m$ 是 S 上的仿射映射，故由[8]的定理 2.1 知 22) $\Leftrightarrow$ 29)。由[8]的引理 5.1、引理 5.2、定理 5.1 知 27) $\Leftrightarrow$ 28)、29) $\Leftrightarrow$ 30)、23) $\Leftrightarrow$ 27)、24) $\Leftrightarrow$ 19)、19) $\Leftrightarrow$ 25)、19) $\Leftrightarrow$ 29)和 24) $\Leftrightarrow$ 30)。由[8]的引理 2.2 知 10) $\Leftrightarrow$ 27)。

注记 2: 一般来说，对于一般空间 X 上的连续映射 $f:X\to X$ 及任一给定的整数 $n\ge 2$，f 正向可扩不能推出 f^n 也正向可扩。

定理 3 设 $f\in C^0_{SM}(S)$，n 为任意给定的正整数，则下列条件等价：1) $f\in C^0_{PEXP}(S)$；2) f 含有马蹄；3) $h(f)>0$；4) $h\left(f\big|_{P(f)}\right)>0$；5) 存在 $m\in Z_+$ 及 f^m 的强不变闭子集 Y 使得 $f^m\big|_Y$ 与 (Σ_2,σ) 拓扑半共轭；6) $PP(f)\not\subset\{k\cdot 2^m: m=0,1,\cdots\}$，其中 $k=\min(PP(f))$；7) $P(f)$ 不是 G_δ 集；8) $f\big|_{P(f)}$ 在 Liapunov 意义下不稳定；9) f 中含有不能被周期区间轨道逼近的轨道；10) f^k 含有不单纯的周期轨道，其中 k 同 6)；11)存在 $x\in\Omega(f)$ 使得 $Orb(x,f^k)$ 不是单纯的，其中 k 同 6)；12) 存在 $x\in CR(f)$ 使得 $Orb(x,f^k)$ 不是单纯的，其中 k 同 6)；13) $SAP(f)\ne\left\{x\in S:\lim\limits_{m\to\infty} f^{k\cdot 2^m}(x)=x\right\}$；14) $AP(f)$ 不

是 F_σ 集；15) $R(f)\neq AP(f)$；16) $\overline{R(f)}^{(+)}\cap\overline{R(f)}^{(-)}-R(f)\neq\varnothing$；17) $\omega^2(f)\equiv\cup\{\omega(x,f):x\in\omega(f)\}\neq R(f)$；18) $\omega^2(f)\neq AP(f)$；19) f 有不回归的特殊的 $\alpha-$ 极限点；20) 存在 $x\in S$ 使得 $\omega(x,f)$ 含有 f 的至少两个极小集；21) 存在 $x\in S$ 使得 $\omega(x,f)$ 是含有周期点的无穷集；22) $\overline{R(f)}-R(f)$ 是不可数集；23) $\Omega(f)-R(f)$ 是不可数集；24)存在 f 的一个不可数的 $\omega-$ 混沌集 Y 使得 $\cap\{\omega(x,f):x\in Y\}\neq\varnothing$；25) 存在 f 的一个恰含两点的 $\omega-$ 混沌集；26)f 有一个 $D-$ 混沌集 Y，且有一个不可数的 $\omega-$ 混沌集 $Y'\subset Y$；27)f 有一个 $D-$ 混沌集；28) $f\big|_{AP(f)}$ 有一个不可数的 $LY-$ 混沌集；29) $f\big|_{\Omega(f)}$ 有一个不可数的 $LY-$ 混沌集；30) $f\big|_{CR(f)}$ 有一个不可数的 $LY-$ 混沌集；31) $f\big|_{CR(f)}$ 有一个恰含两点的 $LY-$ 混沌集；32) 存在 $v\in P(f)$ 及 $x\in\overline{P(f)}-P(f)$ 使得 $v\in Orb(x,f)$；33)存在 $v\in P(f)$ 及 $x\in\Omega(f)-P(f)$ 使 $v\in Orb(x,f)$；34) 有 $v\in P(f)$ 及 $x\in\Omega(f)-P(f)$ 使 $v\in\omega(x,f)$；35)有 $v\in P_m(f)$ (某 $m\in Z_+$)及 $x\in\Omega(f)-Fix(f^{2m})$ 使 $x\xrightarrow{ch.f}v$；36)有 $v\in P_m(f)$ (某 $m\in Z_+$)及 $\{x_1,\cdots,x_j\}\subset S-Fix(f^{2m})$ (某 $j\in Z_+$) 使 $x_1\xrightarrow{\Omega.f}x_2\xrightarrow{\Omega.f}\cdots\xrightarrow{\Omega.f}x_j\xrightarrow{\Omega.f}x_1\xrightarrow{ch.f}v$；37)有 $v\in P_m(f)$ (某 $m\in Z_+$)及 $x\in CR(f)-Fix(f^{2m})$ 使 $x\xrightarrow{ch.f}v$；38) $|\deg(f)|\geq 2$；39)f 与 g 拓扑共轭；40) $AP(f)$ 不是闭集；41) $R(f)$ 不是闭集；42) $\omega(f)\neq R(f)$；43) $\omega(f)\neq AP(f)$；44) 有 $x\in S$ 使 $\omega(x,f)$ 不是极小集；45)f 有一个恰含两点的 $LY-$ 混沌集 $\{y,v\}$，且有一点 $v\in P(f)$。

证明 据[5]的定理 4.1 知从条件 2)到条件 37)是两两等价的。由定理 1 知 38) $\Leftrightarrow$ 39)。由定理 2 知 1) $\Leftrightarrow$ 38) $\Leftrightarrow$ 39)。由于 f 是严格单调的，故 f 是逐段单调的。由推论 2 及引理 4 知 2) $\Leftrightarrow$ 39)。再由[5]的定理 4.2 知 2) $\Leftrightarrow$ 40) $\Leftrightarrow$ 41) $\Leftrightarrow$ 42) $\Leftrightarrow$ 43) $\Leftrightarrow$ 44) $\Leftrightarrow$ 45)。

定理 4 设 $f\in C^0(S)$ 是正向可扩的，n 是任意给定的正整数，则以下条件成立且两两等价：

1) f 有一个恰含两点的 $LY-$ 混沌集；2) f 有一个不可数的 $LY-$ 混沌集；3) $f\big|_{\omega(f)}$ 在 Liapunov 意义下不稳定；4) $\omega(f)\neq\left\{x:\lim\limits_{m\to\infty}f^{k\cdot 2^m}(x)=x\right\}$，其中 $k=\min(PP(f))$；5) $SAP(f)\neq\omega(f)$；6) 有 $x\in S^1$ 使 $\omega(x,f)$ 是无穷集，且 $\omega(x,f)$ 中含有两个 $f-$ 不可分的点；7)f 有一个不能被周期轨道逼近的轨道。

证明 由定理 2 和定理 3 知 f 为正向可扩的且与 g 拓扑共轭。从而由定理 3 知 f 含有马蹄，由文[4]的定理 5.4 的证明过程知这 7 个条件成立且两两等价。

定理 5 设 $f\in C^0(S)$ 是正向可扩的，则以下条件成立且两两等价：

1) $SAP(f)\neq P(f)$；2) $AP(f)\neq P(f)$；3) $R(f)\neq P(f)$；4) $\overline{P(f)}\neq P(f)$；5) $\omega(f)\neq P(f)$；6) $\Omega(f)\neq P(f)$；7) $CR(f)\neq P(f)$；8) 有 $x\in S$，使 $\omega(x,f)$ 不是周期轨道；9) f 是 $LY-$ 混沌的。

证明 由定理 2 和定理 3 知 f 为正向可扩的且与 g 拓扑共轭。从而由定理 3 知 f 含有马蹄，于是由文[4]的定理 5.4 的证明过程知条件 9)成立。由定理 2 及其证明知条件 6)成立，从而由[5]的定理 5.5 知从条件 1)到条件 8)是两两等价的。由文[5]的引理 5.2 知 9) $\Rightarrow$ 1)。故 $\omega(f)\neq P(f)$ 及 $\omega(f^n)\neq P(f^n)$，从而[5]的定理 5.4 的条件(4.4)成立。于是由[5]的定理 5.4 知 1) $\Rightarrow$ 9)。

定理 6 设 $f\in C^0(S)$ 是正向可扩的，n 是任意给定的正整数，$\omega(x,f)$ 为点 $x\in S$ 的 $\omega-$ 极限集，则 $f^n\big|_{\omega(x,f^n)}$ 是拓扑遍历的。

证明 因 S 中的每一点均是 f 及 f^n 的拟弱几乎周期点[17]，故据[8]的定理 2.2 知结论成立。

3. 致谢

作者十分感谢审稿人提出有益的修改意见和建议！也非常感谢左再思教授、沈文淮教授和代雄平教授的鼓励！

参考文献 (References)

[1] 陈藻平, 何连法, 阳世龙. Ω 单一化稳定性[J]. 中国科学, A 辑, 1987, 5: 457-462.
[2] 陈藻平, 何连法, 刘培东. Ω 单一化拓扑稳定性[J]. 数学学报, 1989, 32: 71-75.
[3] Nobuo Aoki. Topics in general topology. Elsevier Science Publishers B V, 1989.
[4] 何连法, 王在洪. 圆周上逆极限可扩的连续自映射[J]. 数学学报, 1996, 39(3):404-410.
[5] 麦结华. 圆周自映射的一些动力系统性质及其等价条件[J]. 1997, 26(3):193-209.
[6] 黄文. 动力系统的复杂性与点串[D]. 安徽:中国科学技术大学, 2003.
[7] 邵松. 动力系统与族[D]. 安徽:中国科学技术大学, 2004.
[8] 汪火云. 拓扑遍历映射的一些性质[J]. 数学学报, 2004, 47(5): 859-866.
[9] R. S. Yang. Topological ergodicity and topological double ergodicity, Acta Math.Sinica, 2003, 46(3): 555-560 (in Chinese).
[10] V. V. Fedorenko, A. N. Sarkovskii and J. Smital. Characterizations of weakly chaot maps of the interval. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, 110: 141-148.

[11] J. C. Xiong. Sets of recurrent points of continuous maps of the interval. Proceedings of the American Mathematical Society, 1985, 95: 491-494.
[12] M. W. Hero. Special $\alpha-$limit points for maps of the interval. Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, 116: 1015-1022.
[13] J. Smital. Chaotic functions with zero topological entropy. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 297: 269-282.
[14] 张景中, 熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都: 四川教育出版社, 1990, 191-195.
[15] 张筑生. 微分动力系统原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
[16] 缪克英, 邓小琴. 紧致度量空间及其逆极限空间[J]. 北方交通大学学报, 2001, 25(3): 16-18.
[17] S. H. Li. ω-chaos and topological entropy. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 339: 243-249.