Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 64-67
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12014 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Extending Cycles and Degree Sums in Graphs

Jianglu Wang, Jianmin Cheng
School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan
Email: yzhfzh@sina.com
Received: Mar. 24th, 2011; revised: May 25th, 2011; accepted: Jun. 1st, 2011.

Abstract: In this paper, we study the relations between degree sums and extending cycles in graphs. The following result is proved. Let G be a graph of order $n \geq 3$. If $d(u)+d(v) \geq n+k$ for each pair of nonadjacent vertices u,v in $V(G)$, then every cycle C of G with $\frac{n}{k+2} < |C| < n$ is extendable. By the result, we have that if $d(u)+d(v) \geq \frac{3}{2}n-2$ for each pair of nonadjacent vertices u, v in $V(G)$, then G is fully cycle extendable.

Keywords: Degree of Vertex; Extending Cycle

图的度和与扩圈

王江鲁，程建民
山东师范大学数学科学学院，济南
Email: yzhfzh@sina.com
收稿日期：2011 年 3 月 24 日；修回日期：2011 年 5 月 25 日；录用日期：2011 年 6 月 1 日

摘　要：本文讨论了两顶点的度和与圈可扩之间的关系，得到了如下结果：设图 G 的阶 $n \geq 3$，如果 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v) \geq n+k$，则 G 中任意一个满足 $\frac{n}{k+2} < |C| < n$ 的圈 C 是可扩的。这里圈 C 的下界是最好可能的。由此进一步得到，如果 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v) \geq \frac{3}{2}n-2$，则 G 是完全圈可扩的。

关键词：顶点的度；完全圈可扩图

1. 前言

本文仅讨论有限、无向、简单图，所使用的记号和术语约定如下，其中未加说明的部分请参照文献[1]。设 G 是一个图，$V(G),E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。对 $S,T \subset V(G), a \in V(G)$ 及 G 的子图 H，令：

$$N_S(a)=\{v \in S : va \in E(G)\}, N_H(a)=N_{V(H)}(a),$$

$$N_S(T)=\bigcup_{v \in T} N_S(v), N_H(T)=N_{V(H)}(T),$$

$|H|=|V(H)|$ 称为 H 的阶。$|N_G(a)|$ 叫做顶点 a 的度，记为 $d_G(a)$，在不致误解时也简记为 $d(a)$。$\delta(G)$ 表示 G 中顶点的最小度。G 的由 S 导出的子图记为 $G[S]$。

经过图 G 每个顶点恰好一次的圈叫 G 的 Hamilton 圈。设 C 是 G 的一个非 Hamilton 圈，如果 G 中存在圈 C'，使 $V(C) \subset V(C')$，$|V(C')|=|V(C)|+1$，则称圈 C 是可扩的，C' 称为 C 的一个扩圈．如果图 G 中任意一个非 Hamilton 圈都是可扩的，则称图 G 是圈可扩的。如果图 G 的每个顶点都在长度为 3 的圈上，并且 G 是圈可扩的，则称图是完全圈可扩的。

所有涉及图的路、圈性质的度型充分条件在某种意义下都源自于下面两个结果。

定理 1[2] 设图 G 的阶 $n \geq 3$，如果 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，则 G 有 Hamilton 圈。

定理 2[3] 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v)\ge n$，则 G 有 Hamilton 圈。

1990 年，Hendry 发现已有的一些保证 Hamilton 圈存在的度型充分条件实际上隐含着圈可扩性，并得到了如下结果。

定理 3[4] 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果 $\delta(G)\ge \frac{n+1}{2}$，则 G 是完全圈可扩的。

下边的定理是本文要证明的主要结果。

定理 4 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v)\ge n+k \quad (k\ge 1)$，则 G 中任意一个满足 $\frac{n}{k+2}+1\le |C|<n$ 的圈 C 是可扩的。

设 $G_1\cong K_m, G_2\cong K_{(k+1)m}\ (m\ge 3)$ 是两个无公共顶点的完全图，它们的顶点集合分别为

$$V(G_1)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\},$$
$$V(G_2)=\{w_1,w_2,\cdots,w_{(k+1)m}\}。$$

用符号 $G_1\prec G_2$ 表示其顶点集和边集分别为

$$V(G_1\prec G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$$
$$E(G_1\prec G_2\}=E(G_1)\cup E(G_2)$$
$$\cup\{v_iw_i, v_iw_{m+i}, v_iw_{2m+i},\cdots,v_iw_{km+i}: i=1,2,\cdots,m\}$$

的图。此图是 $n+(k+2)m$ 阶图，任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v)\ge n+k$，但其中存在长度为 $\frac{n}{k+2}=m$ 的不可扩圈. 此例说明定理 4 条件中，$|C|$ 的下界“$\frac{n}{k+2}+1$”是最好可能的。

2. 定理 4 证明

以下是定理 4 的证明。

由定理条件易知 G 是连通的. 对 G 的非 Hamilton 圈 $C=v_1v_2\cdots v_mv_1$，用 v_iCv_j 表示 C 的路 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$，用 v_i^{-l}, v_i^{+l} 分别表示 C 上的点 v_{i-l} 和 v_{i+l}，v_i^{-1}, v_i^{+1} 也分别记成 v_i^- 和 v_i^+ (这里点的下标均模 m)。令

$$R=V(G)-V(C), T=N_C(R),$$
$$E(R,T)=\{xy: x\in R, y\in T\}。$$

显然 $R\ne\phi\ne T$。

以下总假定 C 不是可扩的。

论断 1 $\exists x\in R$，使 $|N_C(x)|\ge 2$。

证明 假设 $\forall x\in R$，都有 $|N_C(x)|\le 1$。

如果 $\exists y\in V(C)$，使 $N_R(y)=\phi$，则 $d(y)=d_C(y)$。取 $x\in R$，则 $xy\notin E(G)$，且

$$d(x)+d(y)=|N_R(x)|+|N_C(x)|+|N_C(y)|$$
$$\le(|R|-1)+1+(|C|-1)=n-1$$

此矛盾说明 $\forall y\in V(C)$，$N_R(y)\ne\phi$。

注意到 $\forall x\in R$，$|N_C(x)|\le 1$，所以 $\forall y_1,y_2\in V(C)(y_1\ne y_2)$，有 $N_R(y_1)\cap N_R(y_2)=\phi$。并且 $\forall y\in V(C), \exists x\in R$，使 $xy\notin E(G)$ (否则，注意到 C 不可扩，可得 $N_R(y^-)=\phi$，与上述矛盾)。

由上边的证明可知，$N_R(v_1),N_R(v_2),\cdots,N_R(v_m)$ 均非空，且两两互不相交. 取 $y\in V(C)$，使 $|N_R(y)|=\min\{|N_R(v)|: v\in V(C)\}$，则

$$|R|\ge\sum_{i=1}^{m}|N_R(v_i)|\ge m|N_R(y)|,$$

所以

$$|N_R(y)|\le\frac{|R|}{m}=\frac{n-|C|}{|C|}=\frac{n}{|C|}-1<\frac{n}{\frac{n}{k+2}}-1=k+1$$

取 $x\in R$，使 $xy\notin E(G)$，则

$$d(x)+d(y)=(|N_R(x)|+|N_C(x)|)+(|N_R(y)|+|N_C(y)|)$$
$$<(|R|-1)+1+(k+1)+(|C|-1)=|R|+|C|+k=n+k.$$

得矛盾. 论断 1 证完.

论断 2 设

$$xy_1,xy_2\in E(R,T)(x\in R; y_1,y_2\in T, y_1\ne y_2)$$

令

$$N^-_{y_1Cy_2^-}(y_1^-)=\{u^-: u\in N_{y_1Cy_2^-}(y_1^-)\},$$
$$N^+_{y_2Cy_1^-}(y_1^-)=\{u^+: u\in N_{y_2Cy_1^-}(y_1^-)\},$$
$$N^-_{y_1^+Cy_2}(y_1^+)=\{u^-: u\in N_{y_1^+Cy_2}(y_1^+)\},$$
$$N^+_{y_2^+Cy_1}(y_1^+)=\{u^+: u\in N_{y_2^+Cy_1}(y_1^+)\},$$

则有

(1) $N^-_{y_1Cy_2^-}(y_1^-)\cap N(y_2^-)=\phi=N^+_{y_2Cy_1^-}(y_1^-)\cap N(y_2^-)$

(2) $N^-_{y_1^+Cy_2}(y_1^+)\cap N(y_2^+)=\phi=N^+_{y_2^+Cy_1}(y_1^+)\cap N(y_2^+)$

证明 否则，易得 C 的扩圈。论断 2 证完。

在 R 中取满足 $\left|N_C\left(x_0\right)\right|\ge 2$ 的点 x_0(论断 1 保证其存在性)．设 $x_0y_1\in E\left(R,T\right)$，则

$$\left|N_C\left(N_R\left(y_1\right)\right)\right|\ge\left|N_C\left(x_0\right)\right|\ge 2。$$

在 $N_C\left(N_R\left(y_1\right)\right)$ 中取 $y_2\ne y_1$，使

$$N_{y_1^+Cy_2^-}\left(N_R\left(y_1\right)\right)=\phi,$$

则 $y_2\notin\left\{y_1^-,y_1^+\right\}$，且 $y_1^-y_2^-\notin E\left(G\right)$ (否则易得 C 的扩圈)。由论断 2(1)，

$$N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\cap N_C\left(y_2^-\right)=\phi=N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\cap N_C\left(y_2^-\right)。$$

又

$$N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\cap N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)=\left\{y_1^-\right\},$$

$$y_2^-\notin N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\cup N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\cup N_C\left(y_2^-\right)。$$

所以

$$\left|N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\le\left|C\right|。\quad(1)$$

考虑 $\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|$。

情况 1

$$\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|\le\left|N_R\left(y_1\right)\right|\quad(2)$$

由 y_2 的取法可知 $N_R\left(y_1\right)\cap N_R\left(y_2^-\right)=\phi$， 所以 $\left|N_R\left(y_1\right)\right|+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|\le\left|R\right|$．注意到(1)、(2)及

$$\left|N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|=\left|N_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|,$$

$$\left|N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|=\left|N_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|,$$

得下述矛盾

$$\begin{aligned}&d\left(y_1^-\right)+d\left(y_2^-\right)\\&=\left(\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_1^-\right)\right|\right)+\left(\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\right)\\&\le\left|N_R\left(y_1\right)\right|+\left|N_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|\\&\quad+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\\&=\left(\left|N_R\left(y_1\right)\right|+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|\right)+\left(\left|N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\right)\\&\le\left|C\right|+\left|R\right|=n\end{aligned}$$

情况 2

$$\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|>\left|N_R\left(y_1\right)\right|\quad(3)$$

若 $N_R\left(y_1^-\right)\cap N_R\left(y_2^-\right)=\phi$，则 $\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|\le\left|R\right|$。结合(1)得

$$\begin{aligned}&d\left(y_1^-\right)+d\left(y_2^-\right)\\&=\left(\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_1^-\right)\right|\right)+\left(\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\right)\\&=\left(\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|\right)+\left(\left|N_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|N_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\right)\\&=\left(\left|N_R\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_R\left(y_2^-\right)\right|\right)+\left(\left|N^-_{y_1Cy_2^-}\left(y_1^-\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|N^+_{y_2Cy_1^-}\left(y_1^-\right)\right|+\left|N_C\left(y_2^-\right)\right|\right)\le\left|C\right|+\left|R\right|=n。\end{aligned}$$

此矛盾说明 $N_R\left(y_1^-\right)\cap N_R\left(y_2^-\right)\ne\phi$，由此可知 $\left|N_C\left(N_R\left(y_1^-\right)\right)\right|\ge 2$。

令 $z_1=y_1^-$，则(3)即 $\left|N_R\left(z_1\right)\right|>\left|N_R\left(z_1^+\right)\right|$。由上述证明可知 $\left|N_C\left(N_R\left(z_1\right)\right)\right|\ge 2$ |。在 $N_C\left(N_R\left(z_1\right)\right)$ 中取 $z_2\ne z_1$，使 $N_{z_2^+Cz_1^-}\left(N_R\left(z_1\right)\right)=\phi$，则 $z_2\notin\left\{z_1^-,z_1^+\right\}$ 且 $z_1^+z_2^+\notin E\left(G\right)$ (否则易得 C 的扩圈)。由论断 2(2)，

$$N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\cap N_C\left(z_2^+\right)=\phi=N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\cap N_C\left(z_2^+\right)。$$

又

$$N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\cap N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)=\left\{z_1^+\right\},$$

$$z_2^+\notin N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\cup N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\cup N_C\left(z_2^+\right)。$$

所以

$$\left|N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\right|+\left|N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\right|+\left|N_C\left(z_2^+\right)\right|\le\left|C\right|\quad(4)$$

由 z_2 的取法可得 $N_R\left(z_1\right)\cap N_R\left(z_2^+\right)=\phi$，所以 $\left|N_R\left(z_1\right)\right|+\left|N_R\left(z_2^+\right)\right|\le\left|R\right|$。再注意到(3)、(4)及

$$\left|N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\right|=\left|N_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\right|,$$

$$\left|N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\right|=\left|N_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\right|,$$

得下述矛盾

$$\begin{aligned}&d\left(z_1^+\right)+d\left(z_2^+\right)\\&=\left(\left|N_R\left(z_1^+\right)\right|+\left|N_C\left(z_1^+\right)\right|\right)+\left(\left|N_R\left(z_2^+\right)\right|+\left|N_C\left(z_2^+\right)\right|\right)\\&<\left(\left|N_R\left(z_1\right)\right|+\left|N_R\left(z_2^+\right)\right|\right)+\left(\left|N_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|N_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\right|+\left|N_C\left(z_2^+\right)\right|\right)\\&=\left(\left|N_R\left(z_1\right)\right|+\left|N_R\left(z_2^+\right)\right|\right)+\left(\left|N^-_{z_1^+Cz_2}\left(z_1^+\right)\right|\right.\\&\quad\left.+\left|N^+_{z_2^+Cz_1}\left(z_1^+\right)\right|+\left|N_C\left(z_2^+\right)\right|\right)\le\left|C\right|+\left|R\right|=n。\end{aligned}$$

定理 4 证完。

推论 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足

$$d(u)+d(v)\ge \frac{3}{2}n-2,$$

则 G 是完全圈可扩的。这里的下界 $\frac{3}{2}n-2$ 是最好可能的。

证明 因为满足推论条件的 3 阶图只有完全图 K_3，此时推论显然成立。以下设 $n\ge 4$。

因为 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v 满足 $d(u)+d(v)\ge \frac{3}{2}n-2=n+k$，这里 $k=\frac{n}{2}-2$。由定理 4，G 中任意一个满足 $3=\frac{n}{k+2}+1\le |C|<n$ 的圈 C 是可扩的。下面只需要证明 G 的每个顶点都在长度为 3 的圈上。

由定理 2，G 是 2-连通的，所以 $\delta\ge 2$。

情况 1 $\exists u\in V(G)$，使 $d(u)=n-1$。

此时 G 中任意一顶点均与 u 相邻．对 $\forall v\in V(G)$，若 $v\ne u$，取 $w\in N(v)-\{u\}$，则 $uv,uw\in E(G)$，可知 v 在 3 圈 $vuwv$ 上。若 $v=u$，任取 G 的一条边 $xy(x\ne v\ne y)$，则 $vx,vy\in E(G)$，可知 v 在 3 圈 $vxyv$ 上。

情况 2 $\forall u\in V(G)$，$d(u)\le n-2$。

此时对 $\forall v\in V(G)$，必存在 $w\in V(G)$，使 $vw\notin E(G)$。所以 $d(v)+d(w)\ge \frac{3}{2}n-2$，

得 $d(v)\ge \frac{3}{2}n-2-d(w)\ge \frac{3}{2}n-2-(n-2)=\frac{n}{2}$。于是 G 中任意两顶点必有公共邻点。取 $vy\in E(G)$，设 v,y 的公共邻点是 x，则 v 在 3 圈 $vxyv$ 上.

推论证完。

3. 致谢

感谢山东省高等学校科技计划项目和山东科技大学“春蕾计划”项目的资助，亦对本文参考文献的所有作者表示诚挚的谢意。

参考文献 (References)

[1] J. A. Bondy，U. S. R. Murty. Graph theory with applications. New York: Macmillan London and Elsevier, 1976.

[2] G.A. Dirac. Some theorems on abstract graphs. Proceedings London Mathematical Society, 1952, s3-2(1): 69-81.

[3] O. Ore. Note on Hamilton circuits. The American Mathematical Monthly, 1960, 67: 55.

[4] G. R. T. Hendry. Extending cycles in graphs. Discrete Mathematics, 1990, 85(1): 59-72.

