Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 132-135
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12026 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Convergence in Mean of Order *r* and Almost Sure Convergence for Generalized Pairwise *NQD* Random Sequences*

Zonggang Deng[1], Weiping Fan[2]
[1]Hunan Vocational Institute of Technology, Xiangtan
[2]Central South University of Forestry and Technology Swan College, Changsha
Email: 744690180@qq.com
Received: Mar. 31st, 2011; revised: Apr. 16th, 2011; accepted: Apr. 19th, 2011.

Abstract: In this paper, we discuss convergence in mean of order *r* and almost sure convergence for generalized pairwise *NQD* random sequences. As pairwise *NQD* random sequence, we get convergence in mean of order *r*, almost sure convergence and three series theorem.

Keywords: Generalized Pairwise *NQD* Sequences; Convergence in Mean of Order *r*; Almost Sure Convergence; Three Series Theorem

两两广义 *NQD* 列的 *r* 阶平均收敛性和几乎必然收敛性*

邓总纲 [1]，范伟平 [2]
[1]湖南理工职业技术学院，湘潭
[2]中南林业科技大学涉外学院，长沙
Email: 744690180@qq.com
收稿日期：2011 年 3 月 31 日；修回日期：2011 年 4 月 16 日；录用日期：2011 年 4 月 19 日

摘　要：本文主要研究了两两广义 *NQD* 列的 *r* 阶平均收敛性和几乎必然收敛性，获得了与两两 *NQD* 列一样的 *r* 阶平均收敛性和几乎必然收敛性及三级数定理。

关键词：两两广义 *NQD* 列；*r* 阶平均收敛性；几乎必然收敛性；三级数定理

1. 定义与引理

定义[1] 设$\{X_n,n\ge1\}$是定义在同一概率空间上的随机变量序列，记$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\ (n\ge1)$。集合 A 的示性函数记为I_A，称随机变量 X 和 Y 是广义的 *NQD* 的，若对任意的$x,y\in R$，存在常数$c\ge1$，都有

$$P(X\prec x,Y\prec y)\le cP(X\prec x)P(Y\prec y),$$

$$P(X\succ x,Y\succ y)\le cP(X\succ x)P(Y\succ y)\quad(c\ge1)。$$

称随机变量序列$\{X_n,n\ge1\}$是两两广义 *NQD* 列，若对任意$i\ne j$，X_i与X_j是广义 *NQD* 的。

称随机变量序列$\{X_k,k\ge1\}$是 p 阶 *Cesàro* 一致可积的$(p\succ0)$，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\ge1}n^{-1}\sum_{k\le n}E|X_k|^pI(|X_k|\ge x)=0$$

两两 *NQD* 列是一类相当广泛的随机变量序列，自从 1966 年由著名统计学家 Lehmann[2]提出以来，关于两两 *NQD* 列极限理论的研究已取得很多成果[3-7]。

本文在两两广义 *NQD* 列的定义下，研究了两两广义 *NQD* 列的 L_P 收敛性和 *a.s* 收敛性，得到了几个结果。本文约定：文中出现的 c 总表示正常数，它在不同的地方可以表示不同的值；i,j,k,n 表示整数，R 是实数集，E 是期望，P 表示概率。下面给出三个引理。

引理 1[1] (推广的 Kolmogorov 型不等式)设$\{X_n,n\ge1\}$是两两广义 *NQD* 列的，且

$EX_n^2<\infty(n\ge1)$，记$T_j(k)=\sum_{i=j+1}^{j+k}(X_i-EX_i)(j\ge0)$，

则有 1) $E(T_j(k))^2\le(2k+1)c\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2$

2) $E[\max_{1\le k\le n}(T_j(k))^2]\le\dfrac{4\log^2n}{\log^2 2}\sum_{i=j+1}^{j+n}EX_i^2$

3) 若$EX_n=0(n\ge1)$，则$E(T_j(k))^2\le\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2$

*基金项目：湖南省教育厅资助科研项目(11C0637；10C0185)。

引理 2[1] 设随机变量 X 和 Y 是广义 NQD 的，则

1) $EXY \le cEXEY$

2) 如果 f,g 同为非降(或非增)函数，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为广义 NQD 的。

引理 3[5] (推广的 *Boral-Cantelli* 引理)

1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \prec \infty$，则 $P(A_n, i.o.) = 0$，

2) 若 $P(A_k \cdot A_m) \le P(A_k) \cdot P(A_m), k \ne m$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$，则 $P(A_n, i.o.) = 1$

2. 主要结果

定理 1 设 $1 \le t \prec 2$，对任意 2 阶 *Cesàro* 一致可积零均值的两两广义 NQD 列 $\{X_n, n \ge 1\}$，都有 $n^{-\frac{1}{t}} S_n \xrightarrow{L_t} 0$。

证 对任意给定的 $x \succ 0$，$1 \le k \le n$，记

$$X_k' = -xI\{X_k \le -x\} + X_k I\{|X_k| \prec x\} + xI\{X_k \ge x\}$$

$$X_k'' = X_k - X_k' = (X_k + x) I\{X_k \le -x\} + (X_k - x) I\{X_k \ge x\}$$

则 X'，X_k'' 仍为两两广义 NQD 的，由 C_r 不等式和 Holder 不等式知

$$\begin{aligned}
n^{-1} E\left|\sum_{k \le n} X_k\right|^t &= n^{-1} E\left|\sum_{k \le n}(X_k' - EX_k') + \sum_{k \le n}(X_k'' - EX_k'')\right|^t \\
&\le cn^{-1} E\left|\sum_{k \le n}(X_k' - EX_k')\right|^t + cn^{-1} E\left|\sum_{k \le n}(X_k'' - EX_k'')\right|^t \\
&\le cn^{-1}\left[E\left(\left|\sum_{k \le n}(X_k' - EX_k')\right|^t\right)^{\frac{2}{t}}\right]^{\frac{t}{2}} + cn^{-1}\left[E\left(\left|\sum_{k \le n}(X_k'' - EX_k'')\right|^t\right)^{\frac{2}{t}}\right]^{\frac{t}{2}} \\
&= cn^{-1}\left(E\left|\sum_{k \le n}(X_k' - EX_k')\right|^2\right)^{\frac{t}{2}} + cn^{-1}\left(E\left|\sum_{k \le n}(X_k'' - EX_k'')\right|^2\right)^{\frac{t}{2}} \\
&\le cn^{-1}\left(\sum_{k \le n} EX_k'^2\right)^{\frac{t}{2}} + cn^{-1}\left(\sum_{k \le n} EX_k''^2\right)^{\frac{t}{2}} = A_1 + A_2
\end{aligned}$$

因为 $EX_k'^2 \le E|X_k|^2 I\{|X_k| \prec x\} + Ex^2 I\{|X_k| \ge x\} \le 2x^2$

所以 $A_1 \le cn^{-1}(2nx^2)^{\frac{t}{2}} = cx^t n^{\frac{t}{2}-1}$

又因为
$$\begin{aligned}
EX_k''^2 &\le E\left(|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + 2|X_k| xI\{|X_k| \ge x\} + x^2 I\{|X_k| \ge x\}\right) \\
&\le E\left(|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + 2|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + x^2 I\{|X_k| \ge x\}\right) \\
&\le c\left(E|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + x^2 P(|X_k| \ge x)\right) \le c\left(E|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + x^2\right)
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
A_2 &\le cn^{-1}\left(\sum_{k \le n} E|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\} + \sum_{k \le n} x^2\right)^{\frac{t}{2}} \\
&\le cn^{\frac{t}{2}-1}\left(n^{-1}\sum_{k \le n} E|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\}\right)^{\frac{t}{2}} + cn^{\frac{t}{2}-1} x^t
\end{aligned}$$

所以 $A_1 + A_2 \le cn^{-1+\frac{t}{2}}\left(n^{-1}\sum_{k \le n} E|X_k|^2 I\{|X_k| \ge x\}\right)^{\frac{t}{2}} + cn^{-1+\frac{t}{2}} x^t$

因为 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为 2 阶 *Cesàro* 一致可积，所以 $\lim_{x \to \infty} \sup_{n \ge 1} n^{-1} \sum_{k \le n} E|X_k|^2 I(|X_k| \ge x) = 0$

先令 $n\to\infty$，再令 $x\to\infty$，则有 $A_1+A_2\to 0$。

所以 $n^{-\frac{1}{t}}S_n \xrightarrow{L_t} 0$。

定理 2 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是两两广义 NQD 列，$EX_n=0$，满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nVarX_n \prec \infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ $a.s$ 收敛。

证 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，当正整数 $m\succ n\to\infty$ 时，由引理 1 中(3)及条件有

$$E\left(S_m-S_n\right)^2\le\sum_{k=n+1}^{m}EX_k^{\ 2}\to 0$$

所以 $\{S_n\}$ 是 L^2 的 *Cauchy* 序列，故存在 $r.v.S$ 使得 $E\left(S_m-S_n\right)^2\to 0$

因为 $EX_n=0$，由条件和 *Chebyshev* 不等式有

$$P\left(\left|S_{2^k}-S\right|\ge\varepsilon\right)\le cE\left|S_{2^k}-S\right|^2\le c\limsup_{n\to\infty}E\left(S_n-S_{2^k}\right)^2$$

$$\le c\sum_{i=2^k+1}^{n}EX_i^{\ 2}=c\sum_{i=2^k+1}^{n}\log^2 i\cdot\frac{1}{\log^2 i}EX_i^{\ 2}$$

$$\le\frac{c}{\log^2 i}\sum_{i=2^k+1}^{n}\log^2 iEX_i^{\ 2}\prec\frac{c}{k^2}$$

所以
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|S_{2^k}-S\right|\ge\varepsilon\right)\prec\infty \qquad (1)$$

有引理 1 中(2)和条件知

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\max_{2^{k-1}\prec j\le 2^k}\left|S_j-S_{2^{k-1}}\right|\ge\varepsilon\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log 2^k\right)^2\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k}EX_j^{\ 2}$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k}\left(\log j\right)^2EX_j^{\ 2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log k\right)^2EX_k^{\ 2}\prec\infty \qquad (2)$$

由 *Boral-Cantelli* 引理知，当 $k\to\infty$ 时 $S_{2^k}\to S$ $a.s$，$\max_{2^{k-1}\prec j\le 2^k}\left|S_j-S_{2^{k-1}}\right|\to 0$ $a.s$

所以 $S_n\to S$ $a.s$

定理 3 (广义三级数定理)设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是两两广义 NQD 列，$EX_n=0$。对某 $c\succ 0$，记 $X_n^c=-c\cdot I\{X_n\prec -c\}+X_n\cdot I\{|X_n|\le c\}+c\cdot I\{X_n\succ c\}$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\succ c\right)\prec\infty \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^c\prec\infty \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nVarX_n^c\prec\infty \qquad (3)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n\prec\infty$ $a.s$ 收敛 (4)

且条件(1)也是条件(4)的必要条件。

证 先证(1)～(3)式蕴含(4)式，由引理 2 知 X_n^c 是两两广义 NQD 列，

再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nVarX_n^c\prec\infty$ 及定理 2

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n^c-EX_n^c\right)\prec\infty$ $a.s$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^c\prec\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n^c\prec\infty$ $a.s$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\succ c\right)\prec\infty$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n\ne X_n^c\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\succ c\right)\prec\infty$

所以由 *Boral-Cantelli* 引理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left\{X_n\ne X_n^c\right\},i.o\right)=0$$

又由 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n^c\prec\infty$ $a.s$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n\prec\infty$ $a.s$，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$，$a.s$ 收敛

再证(4)蕴含(1)。

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n\prec\infty$ $a.s$ 收敛，所以 $X_n\to 0$，$a.s$ 收敛

从而 $X_n^+=\min\left(X,0\right)\to 0$，$a.s$

$X_n^-=-\max\left(X,0\right)\to 0$，$a.s$

若记 $A_n(1)=\left\{X_n^+\succ\frac{c}{2}\right\},A_n(2)=\left\{X_n^-\succ\frac{c}{2}\right\}$，

则 $P\left\{A_n(j),i.o.\right\}=0$ $j=1,2$，

由引理 2 知 $\left\{X_n^+\right\}$，$\left\{X_n^-\right\}$ 仍是两两广义 NQD 列，对 $k\ne m$，由定义知

$P\left(A_k(j)A_m(j)\right)\le cP\left(A_k(j)\right)P\left(A_m(j)\right)$，$j=1,2$。

由引理 3 得 $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n(j)\right)\prec\infty$，$j=1,2$。

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_n|\succ c\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n^++X_n^-\succ c\right)$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n^+\succ\frac{c}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n^-\succ\frac{c}{2}\right)\prec\infty$$

即(1)成立。

参考文献 (References)

[1] 邓总纲. 两两广义 NQD 列的一些性质[J]. 汕头大学学报, 2009, 24(2): 20-26.

[2] E. L. Lehmann. Some concepts of dependence. The Annals of Mathematical Statistics, 1966, 37(5): 1137-1153.

[3] 甘师信. *B* 值随机元阵列加权和的收敛性和大数定律[J]. 武汉大学学报, 1997, 43(5): 569-574.
[4] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 随机序列之和极限理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 223-227.
[5] P. A. Matula. Note on the almost sure convergence of sums negatively dependent random variables. Statistics & Probability Letters, 1992, 15(3): 209-213.
[6] 吴群英. 两两 *NQD* 的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.
[7] 万成高. 两两 *NQD* 的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 253-261.

