Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 198-204
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13038 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Studying of Property of the Solution of the Nonlinear Difference Equation $x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_n^2}{cx_n+dx_{n-1}}$

Limin Yan*, Xiaojie Xu, Jing Liu
Department of Mathematics, China University of Petroleum, Qingdao
Email: limin_613@163.com
Received: Sep. 2nd, 2011; revised: Sep. 27th, 2011; accepted: Oct. 5th, 2011.

Abstract: In paper [1], some properties are investigated about difference equation $x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_n^2}{cx_n+dx_{n-1}}$, where $a>0,b>0,c>0,d>0$ and the initial conditions $x_0,x_1\in(0,+\infty)$, such as the boundedness of the solution and the properties of the equilibrium point. In this paper we will prove that some methods used in paper [1] are wrong at first. Then we continue to study some properties of the difference equation under different circumstances. We get some interesting conclusions. At last, we use some numerical examples to verify the conclusions that we get in this paper.

Keywords: Rational Difference Equation; Asymptotical Stability; Global Attractivity

差分方程$x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_n^2}{cx_n+dx_{n-1}}$的解性质的研究

颜丽敏*，许晓婕，刘 静
中国石油大学(华东)理学院，青岛
Email: limin_613@163.com
收稿日期：2011 年 9 月 2 日；修回日期：2011 年 9 月 27 日；录用日期：2011 年 10 月 5 日

摘　要：文献[1]中研究了差分方程$x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_n^2}{cx_n+dx_{n-1}}$($a,b,c,d$是正实数)解的有界性、平衡点的局部及全局吸引性，并给出了其几类特殊情形下的解的表达式。本文首先指出文献[1]中的第 2、3 段的讨论方法是不正确的。然后本文中我们对平衡点的性质进行了讨论，分为两种情况进行研究，分别为$(1-a)(c+d)\neq b$及$(1-a)(c+d)=b$。在第一种情况中可以得到平衡解在适当的条件下是全局吸引的，在第二种情况下得到任意实数都是平衡解且是不渐进稳定的。在每种情况中举了一些数值例子，并用相应的软件画出其图像，从而进一步证明了结论的正确性。

关键词：有理性差分方程；渐进稳定性；全局吸引性

1. 引言

考虑差分方程

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}),n=0,1,\cdots \tag{1}$$

其中$k\in N, f\in C(R^{k+1},R)$，初值$x_{-k},\cdots,x_{-1},x_0$为任意实数，则对给定的初值$x_{-k},\cdots,x_{-1},x_0$，方程(1)存在唯

一的解序列 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty},n\ge 0$ 。

定义 1：若 $\bar{x}$ 满足平衡方程 $\bar{x}=f(\bar{x},\cdots,\bar{x})$ 则 $\bar{x}$ 称为差分方程(1)的平衡解。

定义 2：设 $\bar{x}$ 方程(1)的一平衡解

(1) 平衡点 $\bar{x}$ 称作稳定的，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_{k,},\cdots,x_{-1},x_0\in R$ 且 $|x_{-k}-\bar{x}|+\cdots|x_{-1}-\bar{x}|<\delta$ 时，解序列 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$，对一切 $n>0$，$|x_n-\bar{x}|<\varepsilon$ 。

(2) 平衡点 $\bar{x}$ 称作渐进稳定的，如果它是稳定的且 $\exists\gamma>0$，当 $x_k,\cdots x_{-1},x_0\in R$ 且 $|x_{-k}-\bar{x}|+\cdots|x_{-1}-\bar{x}|<\gamma$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$ 。

(3) 平衡点 $\bar{x}$ 称作一全局吸引子，如果对任意的 $x_k,\cdots x_{-1},x_0\in R$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$ 。

(4) 平衡点 $\bar{x}$ 称作全局渐进稳定的，如果它是稳定的且为一全局吸引子。

定义 3：设 $\bar{x}$ 是方程(1)的一平衡点且 $f\in C^1\left(R^{k+1},R\right)$，记 $p_i=\dfrac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})}{\partial x_i},i=0,1,\cdots,k$

这里 $f(x_0,x_1,\cdots,x_k)$ 是方程(1)中的函数。称方程

$$y_{n+1}=p_0y_n+p_1y_{n-1}+\cdots+p_ky_{n-k},n=0,1,\cdots,\tag{2}$$

为方程(1)关于平衡点 $\bar{x}$ 的变分方程。方程(2)的特征方程为

$$\lambda^{k+1}=p_0\lambda^k+p_1\lambda^{+-1}+\cdots+p_{k-1}\lambda+p_k\tag{3}$$

定理 A[2] 假设 $p_1,p_2,\cdots,p_k\in R$，$k\in\{1,2,\cdots\}$，如果 $\sum\limits_{i=1}^{k}|p_i|<1$，则差分方程 $x_{n+k}+p_1x_{n+k-1}+\cdots+p_kx_n=0$，$n=0,1,\cdots$ 是渐进稳定的。

定理 B[2] 如果 $f\in C^1$，方程(1)的变分方程（2）的特征方程(3)的所有根满足 $|\lambda|<1$，则方程(1)的平衡解 $\bar{x}$ 是渐进稳定的；如果至少一个根满足 $|\lambda|>1$，则平衡解 $\bar{x}$ 是不稳定的。

定理 C[3] 考虑下述差分方程

$$x_{n+1}=F(x_n,x_{n-k}),n=0,1,\cdots\tag{4}$$

其中 $k\ge1$ 为整数。设 $I=[p,q]$ 为某一实数区间，且 $f:[p,q]\times[p,q]\to[p,q]$ 为满足如下条件的连续函数。

(a)对每个固定的 $v\in[p,q]$，$f(u.v)$ 关于 u 不减，对每个固定的 $u\in[p,q]$，$f(u.v)$ 关于 v 不增。

(b)若 $(m,M)\in[p,q]\times[p,q]$ 是方程组 $\begin{cases}m=f(m,M)\\M=f(M,m)\end{cases}$ 的解，则 $m=M$ 。

那么，方程(4)具有唯一的平衡点 $\bar{x}$ 且方程(4)所有解均收敛于 $\bar{x}$ 。

有理差分方程是非线性差分方程的重要类型，由于其对一般非线性差分方程研究的启示作用、有些科学和工程问题的模型即是有理差分方程(离散虫口模型 $x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n)$ 就是一个有理差分方程)以及这类方程本身具有的复杂性质，近几年来引起广泛的关注(见文献[4]、文献[1]及其引用的参考文献)。

文献[5]中研究了时滞差分方程 $y_{n+1}=A+\dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ 解的性质，从文中结论可见，参数 A 的取值范围对于方程解的性质有着实质性的影响。

文献[1]中对差分方程

$$x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_n^2}{cx_n+\mathrm{d}x_{n-1}}\tag{5}$$

的局部渐进稳定性，作了如下的讨论：

方程(5)的平衡方程

$$\overline{x}=a\overline{x}+\frac{b\overline{x}^2}{c\overline{x}+\mathrm{d}\overline{x}} \tag{6}$$

改写为 $(1-a)(c+d)\neq b$，该文得出结论：如果 $(1-a)(c+d)=b$，则得到唯一的平衡点 $\overline{x}=0$，并且令：$f:(0,\infty)^2\to(0,\infty)$，定义为 $f(u,v)=au+\dfrac{bu^2}{cu+\mathrm{d}v}$

则

$$f_u(u,v)=a+\frac{bcu^2+2\mathrm{d}buv}{(cu+\mathrm{d}v)^2}\quad f_v(u,v)=\frac{-\mathrm{d}bu^2}{(cu+\mathrm{d}v)^2} \tag{7}$$

因此

$$f_u(\overline{x},\overline{x})=a+\frac{bc+2\mathrm{d}b}{(c+d)^2}\quad f_v(\overline{x},\overline{x})=\frac{-\mathrm{d}b}{(c+d)^2} \tag{8}$$

得到方程(1-5)关于平衡点 $\overline{x}$ 的变分方程为：

$$y_{n+1}+\left[a+\frac{bc+2\mathrm{d}b}{(c+d)^2}\right]y_n+\frac{\mathrm{d}b}{(c+d)^2}y_{n-1}=0 \tag{9}$$

问题是：在 $\overline{x}=0$ 处，由(7)的偏导数 $f_u(u,v),f_v(u,v)$ 无法直接得到(8)中的 $f_u(\overline{x},\overline{x})=f_u(0,0),f_v(\overline{x},\overline{x})=f_v(0,0)$。事实上，函数 $f(u,v)$ 在点 $(0,0)$ 处没有定义。即便补充定义 $f(0,0)=0$ (这样定义时，$f(u,v)$ 在点 $(0,0)$ 处连续)，成立的也是

$$f_u(0,0)=\lim_{u\to0}\frac{f(u,0)-f(0,0)}{u}=\lim_{u\to0}\frac{acu^2+bu^2}{cu^2}=\frac{ac+b}{c}$$
$$f_v(0,0)=\lim_{v\to0}\frac{f(0,v)-f(0,0)}{v}=\lim_{v\to0}\frac{0}{v}=0$$

得不到方程(9)，因此，方程(9)并不是原方程在 $\overline{x}=0$ 处的变分方程。

2. 方程(10)平衡解的渐进稳定性

设

$$f(u,v)=\begin{cases}au+\dfrac{bu^2}{cu+\mathrm{d}v},(u,v)\neq(0,0)\\ 0,\qquad (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

考虑(5)的扩充差分方程，我们把它记为(10)，即

$$x_{n+1}=f(x_n,x_{n-1}),n=0,1,\cdots \tag{10}$$

初值 x_{-1},x_0 是任意实数。

设方程(10)的平衡点为 $\overline{x}$，即

$$\overline{x}=f(\overline{x},\overline{x})=a\overline{x}+\frac{b\overline{x}^2}{c\overline{x}+\mathrm{d}\overline{x}}$$

由于 $b=0$ 时方程成为简单方程 $x_{n+1}=ax_n$，解的性质是周知的，下面考虑 $b\neq0$ 的情形。如果 $(1-a)(c+d)\neq b$，我们得到唯一的平衡解 $\overline{x}=0$；如果 $(1-a)(c+d)=b$ 则每个点 $\overline{x}\in R$ 都是平衡点。下面分两种情形讨论。

情形 1 $(1-a)(c+d)\neq b$

当 $(1-a)(c+d)\neq b$ 时，(10)唯一的平衡解是 $\overline{x}=0$。方程(10)的变分方程

$$y_{n+1}-\frac{ac+b}{c}y_n=0 \tag{11}$$

特征根 $\lambda=\dfrac{ac+b}{c}$，取 $y_0\neq 0$ 为任意的实数，则(11)的解为 $y_n=\left(\dfrac{ac+b}{c}\right)^n y_0, n=1,2,\cdots$

因此，(11)的平衡解 $\bar{y}=0$，当 $\dfrac{ac+b}{c}<1$ 时，是全局吸引的；$\dfrac{ac+b}{c}=1$ 是常值解；$\dfrac{ac+b}{c}>1$ 时，非零解都是无界的。对方程(10)有

定理 1 设 $(1-a)(c+d)\neq b$，则

1) 当 $\dfrac{ac+b}{c}<1$，方程(10)的平衡解 $\bar{x}=0$ 是全局吸引的；

2）当 $\dfrac{ac+b}{c}>1$ 时，方程(10)的平衡解 $\bar{x}=0$ 是不稳定的。

证明：

1) 下面验证定理 C 的条件满足，从而结论 1)成立。在定理 C 中，取 $p=0,q>0$ 是任意正实数，则当 $\dfrac{ac+b}{c}<1$ 时，对任意的 $(u,v)\in[0,q]\times[0,q]$，$0\le f(u,v)=au+\dfrac{bu^2}{cu+\mathrm{d}v}\le au+\dfrac{bu}{c}=\dfrac{acu+bu}{c}\le q$ 显然，$f(u,v)$ 关于 (u,v) 在第一象限是连续函数，关于 u 是增函数，关于 v 是减函数。如果对 $fm,M\in[0,q]$ $\begin{cases}M=f(M,m)\\ m=f(m,M)\end{cases}$ 则可得

$c(1-a)\left(M^2-m^2\right)=b\left(M^2-m^2\right)$

由 $\dfrac{ac+b}{c}<1$，得 $ac+b<c$，进而 $b<c(1-a)$，于是，必有 $m=M$。由定理 C 即知，方程(2-1)是全局吸引的，事实上，此时，解序列 $x_{n+1}=ax_n+\dfrac{bx_n^2}{cx_n+\mathrm{d}x_{n-1}}\le ax_n+\dfrac{bx_n}{c}\le\left(\dfrac{ac+b}{c}\right)^n x_0$ 单调减少地收敛于 0。

2) 当 $\dfrac{ac+b}{c}>1$ 时，可取 $d>0$ 充分小使得 $\dfrac{ac+b}{c+d}>1$，如果初值 $x_{-1}<x_0$, 则

$x_1=ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_{-1}}>ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_0}=ax_0+\dfrac{bx_0}{c+d}=\dfrac{ac+b+ad}{c+d}x_0>\dfrac{ac+b}{c+d}x_0>x_0$ 用归纳法证明，

$x_{n+1}=ax_n+\dfrac{bx_n^2}{cx_n+\mathrm{d}x_{n-1}}>ax_n+\dfrac{bx_n^2}{cx_n+\mathrm{d}x_n}=ax_n+\dfrac{bx_n}{c+d}=\dfrac{ac+b+ad}{c+d}x_n>\dfrac{ac+b}{c+d}x_n>\left(\dfrac{ac+b}{c+d}\right)^n x_0\to+\infty\,(n\to\infty)$

注 1 由于变分方程(2-2)不同于文[1]中的方程(9)，对应于定理 1，文献[1]中的定理 2，提出的条件是 $b\neq c(1-a)$，是通过验证定理 C 的条件来证明的，但是，证明中并未指出如何选取 $p<q$ 使得上面定义的函数 $f(u,v)$ 满足 $f:[p,q]\times[p,q]\to[p,q]$。当 $b>c(1-a)$ 时，是否存在这种 p,q 是存疑的。

注 2 值得注意的是，由于 $f_u(u,v)=a+\dfrac{bcu^2+2\mathrm{d}buv}{(cu+\mathrm{d}v)^2}$ $f_v(u,v)=\dfrac{-\mathrm{d}bu^2}{(cu+\mathrm{d}v)^2}$ 直接计算，有

$$\lim_{v=ku\to 0}\left(a+\frac{bcu^2+2\mathrm{d}buv}{(cu+\mathrm{d}v)^2}\right)=a+\frac{bc+2\mathrm{d}bk}{(cu+kd)^2}$$

上述极限因 k 而异，因此，$\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}f_u(u,v)$ 不存在，于是，$f_u(u,v)$ 在 $(0,0)$ 点不连续，定理 B 的条件 $f\in C^1$ 往往被忽略而导致推理出错。当 $\dfrac{ac+b}{c}>1$ 时，方程(10)的不稳定性并不能从定理 B 得出。

下面通过数值例子来直观地说明定理 1。

考察方程 $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{x_n^2}{3x_n+\mathrm{d}x_{n-1}}$ 则 $\dfrac{ac+b}{c}=\dfrac{0.5\times3+1}{3}=\dfrac{2.5}{3}<1$ 取 $d=0,d=1,d=5$，初值 $x_{-1}=1,x_0=2$，可分别得到图形如下(图 1)

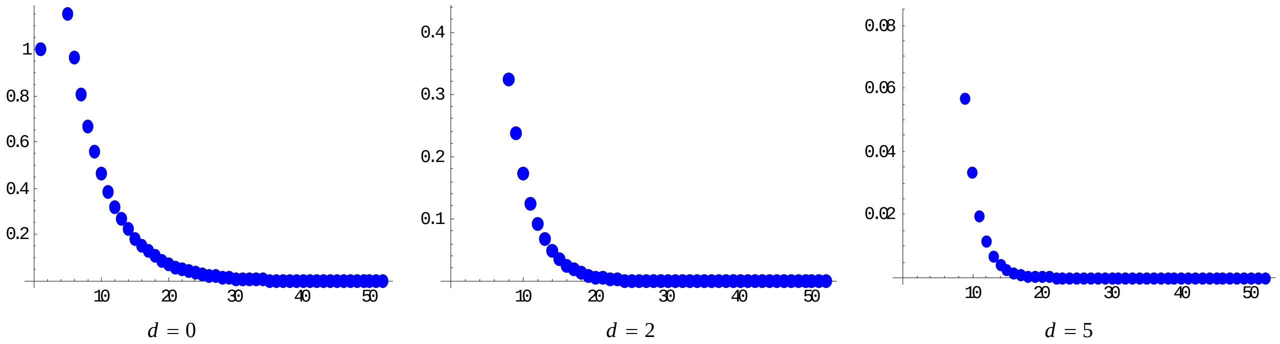

Figure 1. The solution of $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{x_n^2}{3x_n+\mathrm{d}x_{n-1}}$**, when** $d=0,d=1,d=5$**,** $x_{-1}=1,x_0=2$

图 1. 当 $d=0,d=1,d=5$**，** $x_{-1}=1,x_0=2$ **时，** $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{x_n^2}{3x_n+\mathrm{d}x_{n-1}}$ **的图形**

考察方程 $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{3x_n^2}{2x_n+x_{n-1}}$ 有 $\dfrac{ac+b}{c+d}=\dfrac{4}{3}>1$，数值例子图形为(图 2)

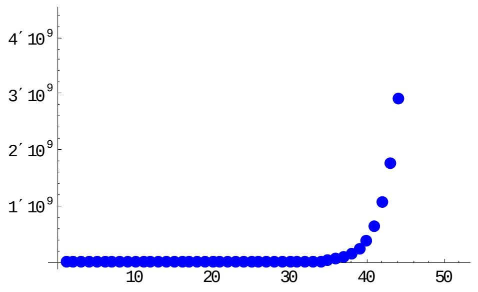

Figure 2. The solution of $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{3x_n^2}{2x_n+x_{n-1}}$**, when** $x_{-1}=1,x_0=2$

图 2. 当 $x_{-1}=1,x_0=2$ **时，** $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{3x_n^2}{2x_n+x_{n-1}}$ **的图形**

如果 $\dfrac{ac+b}{c}>1$，当取 $d>0$ 充分大时，数值例子 $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{4x_n^2}{2x_n+8x_{n-1}}$ 其图形为(图 3)

图形 2 和图形 3 说明，当 $(1-a)(c+d)\neq b$ 时，仅有条件 $c(1-a)\neq b$ 不能保证解序列收敛到平衡解 $\bar{x}=0$，从而，文[1]中的定理 2 是不正确的。

情形 2 $(1-a)(c+d)=b$ 。

定理 2 如果 $(1-a)(c+d)=b,b\neq0$，则任意的实数 $\bar{x}$ 都是方程(10)的平衡解。因此，任何非零的平衡解都不是渐进稳定的。

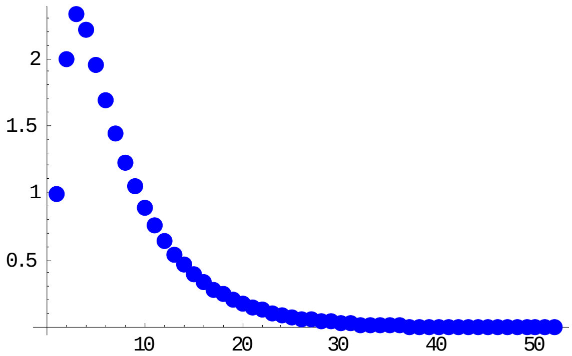

Figure 3. The solution of $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{4x_n^2}{2x_n+8x_{n-1}}$**, when** $x_{-1}=1, x_0=2$

图 3. 当 $x_{-1}=1, x_0=2$ **时，** $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{4x_n^2}{2x_n+8x_{n-1}}$ **的图形**

证明：由前面的讨论，方程(10)的平衡方程是 $\bar{x}=a\bar{x}+\dfrac{b\bar{x}^2}{c\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x}}$

因此，$(1-a)(c+d)=b, b\neq 0$ 时，任意的非零 $\bar{x}$ 都是平衡解，从而平衡解不唯一。

当初值 $x_{-1}=x_0=\bar{x}\neq 0$ 时，解为常值序列，当 $x_0>x_{-1}=\bar{x}$ 时 $x_1=ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_{-1}}>\ ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_0}=x_0$ 归纳地可得，对任意的 $n\geq 2$， $x_{n+1}>x_n>x_{n-1}>\cdots>x_1>x_0>x_{-1}=\bar{x}$ 。因此，解序列是单调增加的。大量的数值例子都表明，此时解序列是有界的，一般结论尚待证明。

当 $x_0<x_{-1}=\bar{x}$ 时， $x_1=ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_{-1}}<\ ax_0+\dfrac{bx_0^2}{cx_0+\mathrm{d}x_0}=x_0$ 同理归纳地可得，对任意的 $n\geq 2$

$x_{n+1}<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0<x_{-1}=\bar{x}$

在此初值条件下，方程的解序列单调减少，是有界的。总之，方程(10)的任何非零平衡解都不是渐近稳定的，解的性质与两个初值 x_{-1}, x_0 的大小关系相关。

注 3 定理 2 刻画的事实可以表述为，在条件 $(1-a)(c+d)=b, b\neq 0$ 下，方程具有局部单调性，即对任意的 $\bar{x}_0>\bar{x}_{-1}\geq 0$， 存在 $\delta>0$， 非负初值 x_{-1}, x_0 满足 $|\bar{x}_{-1}-x_{-1}|<\delta, |\bar{x}_0-x_0|<\delta$ 时，解序列 $\{x_n\}$ 单调增加。事实上，当 $\bar{x}_0>\bar{x}_{-1}\geq 0$ 时，取 $\delta=\dfrac{\bar{x}_0-\bar{x}_{-1}}{2}>0, |x_{-1}-\bar{x}_{-1}|<\delta, |x_0-\bar{x}_0|<\delta$ 时，$x_{-1}<\bar{x}_{-1}+\delta=\dfrac{\bar{x}_0+\bar{x}_{-1}}{2}=\bar{x}_0-\delta<x_0$，从而，以 x_{-1}, x_0 为初值的解序列 $\{x_n\}$ 单调增加。

同理，对任意的 $0\leq\bar{x}_0<\bar{x}_{-1}$， 存在 $\delta>0$， 初值 x_{-1}, x_0 满足 $|\bar{x}_{-1}-x_{-1}|<\delta, |\bar{x}_0-x_0|<\delta$ 时，解序列 $\{x_n\}$ 单调减少。

数值例子 $x_{n+1}=0.5x_n+\dfrac{3x_n^2}{2x_n+4x_{n-1}}$

取初值 $x_{-1}=1, x_0=2$，其图形为图 4。

如取初值 $x_{-1}=2, x_0=1$，则其图形为图 5。

3. 致谢

本论文的完成离不开各位老师、同学和朋友的关心与帮助，在这里我特别要感谢我的导师费祥历教授，本文在导师的指导之下完成的，在此我向我的导师表示深切的谢意与祝福！

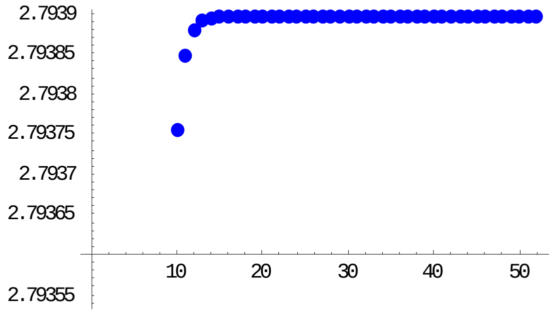

Figure 4. The solution of $x_{n+1}=0.5x_n+\frac{3x_n^2}{2x_n+4x_{n-1}}$ **, when** $x_{-1}=1, x_0=2$

图 4. 当 $x_{-1}=1, x_0=2$ **时，** $x_{n+1}=0.5x_n+\frac{3x_n^2}{2x_n+4x_{n-1}}$ **的图形**

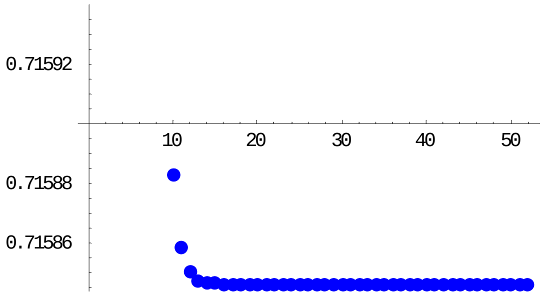

Figure 5. The solution of $x_{n+1}=0.5x_n+\frac{3x_n^2}{2x_n+4x_{n-1}}$ **, when** $x_{-1}=2, x_0=1$

图 5. 当 $x_{-1}=2, x_0=1$ **时，** $x_{n+1}=0.5x_n+\frac{3x_n^2}{2x_n+4x_{n-1}}$ **的图形**

参考文献 (References)

[1] E. M. Elsayed. Qualitative behavior of difference equation of order two. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 50(7-8): 1130-1141.
[2] V. L. Koci, G. Ladas. Behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
[3] V. L. Koci, G. Ladas. Behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
[4] H. E. Wan-Sheng, L. I. Wan-Tong. Global attractivity of a second order nonlinear difference equation. 大学数学, 2005, 21(2): 47-51.
[5] 时宝, 张德存, 盖明久. 微分方程及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

