Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 177-183
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13035 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

The Relation between Solutions of a Class of Differential Equations and Functions of Small Growth*

Wei Liu, Zongxuan Chen
School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: lw010094@163.com; chzx@vip.sina.com
Received: Jun. 27th, 2011; revised: Aug. 5th, 2011; accepted: Aug. 6th, 2011.

Abstract: In this paper, we investigate the relation between solutions, their 1st derivatives of equations $f''+A_1f'+A_0f=0$ and $f''+A_0f=0$ and functions of small growth, where A_0, A_1 are entire functions with finite orders and not identically zero. The exponent of convergence of the zero-sequence of A_j is less than the order of A_j, and the order of A_0/A_1 equals the maximum of the orders of A_0 and A_1.

Keywords: Differential Equation; Entire Function; Function of Small Growth; Exponent of Convergence

一类微分方程解和小函数的关系*

刘　薇，陈宗煊
华南师范大学数学科学学院，广州
Email: lw010094@163.com; chzx@vip.sina.com
收稿日期：2011 年 6 月 27 日；修回日期：2011 年 8 月 5 日；录用日期：2011 年 8 月 6 日

摘　要：在文中研究了微分方程 $f''+A_1f'+A_0f=0$ 和 $f''+A_0f=0$ 的解以及它们的一阶导数与小函数的关系，其中和 A_0 和 A_1 是不恒为零的有限级整函数，其零点收敛指数小于其增长级，且 A_0/A_1 的增长级等于 A_0 与 A_1 增长级的最大值。

关键词：微分方程；整函数；小函数；收敛指数

1. 引言与结果

本文使用值分布理论的标准记号[1-3]，并用 $\lambda(f)$，$\bar{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的零点及不同零点序列的收敛指数，$\sigma(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级，$\deg P$ 表示多项式 $p(z)$ 的次数。还使用 $\bar{\lambda}(f-\varphi)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 取小函数 φ 的零点收敛指数。

文[4]中，陈宗煊首次建立了二阶零点收敛指数，二阶不动点收敛指数的概念，考虑了二阶复域微分方程的不动点与超级，得到了不动点个数的精确估计，并用超级、二阶零点收敛指数和二阶不动点收敛指数进一步精确估计了无穷级解的增长率，零点密度及不动点密度。曹春雷和陈宗煊在[5]中证明了：

定理 A 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是不全恒等于零的有限级整函数，$k\ge 2$。若对每个 A_j (j 为整数，$0\le j\le k-1$)，如果 $A_j\not\equiv 0$，有 $\lambda(A_j)<\sigma(A_j)$，且对 $A_j\not\equiv 0, A_i\not\equiv 0$ 有 $\sigma(A_i/A_j)=\max\{\sigma(A_j),\sigma(A_i)\}(i\ne j)$，那么微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0 \tag{1.1}$$

的任一超越解 f 满足 $\sigma(f)=\infty$。进一步，如果按 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 的顺序，第一个不恒等于零的系数为 A_j，则(1.1)最多出现次数不超过 $j-1$ 的多项式解，其余解均为无穷级；若 $A_0\not\equiv 0$，则(1.1)的任一非零解 f 均为无穷级。

*国家自然科学基金资助项目(NO.10871076)。

定理 B 假设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F(\not\equiv 0)$ 为有限级整函数，$k \ge 2$，$A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 不全恒等于零，若对 $A_j \not\equiv 0, A_i \not\equiv 0\left(i, j \in \{0,1,\cdots,k-1\}\right)$，有 $\lambda(A_j) < \sigma(A_j)$ 及 $\sigma(A_i/A_j) = \max\{\sigma(A_j), \sigma(A_i)\}(i \ne j)$，那么对于非齐次微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F \tag{1.2}$$

(a) 若 $F(z) \equiv c, c \ne 0$ 为复常数，则方程(1.2)的任一解 f 满足 $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$。

(b) 若 $F(z) = Q(z)\mathrm{e}^{P(z)}$，其中 $P(z) = \xi_1 z^n + \cdots (\xi_1 \ne 0)$ 为非常数多项式，$Q(z) \not\equiv 0$ 为级小于 n 的整函数，对 $A_j \not\equiv 0$，$\sigma(A_j/F) = \max\{\sigma(A_j), \sigma(F)\}$ $j \in \{0,1,\cdots,k-1\}$，且存在某个整数 v：$0 \le v \le k-1$，使 $A_v = B_v \mathrm{e}^{P_v}$，其中 $P_v = \xi_2 z^n + \cdots (\xi_2 \ne 0)$ 为非常数多项式，$\xi_2/\xi_1 > 1$，$B_v \not\equiv 0$ 且 $\sigma(B_v) < n$，则方程(1.2)的任一解 f 满足 $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$。

本文研究了微分方程 $f'' + A_1 f' + A_0 f = 0$ 和 $f'' + A_0 f = 0$ 的解以及它们的一阶导数与小函数的关系得到了如下结果：

定理 1 假设 A_0, φ 是不恒等于零的有限级整函数且 $\lambda(A_0) < \sigma(A_0)$，那么对于微分方程

$$f'' + A_0 f = 0 \tag{1.3}$$

的任一非零解 f 满足 $\overline{\lambda}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty$。

定理 2 假设 A_0, A_1, φ 是不恒等于零的有限级整函数，且有 $\lambda(A_j) < \sigma(A_j)$ 及 $\sigma(A_i/A_j) = \max\{\sigma(A_j), \sigma(A_i)\}$ $(i \ne j)$。那么对于微分方程

$$f'' + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{1.4}$$

任一非零解 f 满足 $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty$。若 $\lambda(\varphi) < \lambda(A_0)$，那么方程(1.4)的任一非零解 f 满足 $\overline{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$。

2. 引理

引理 1[6]假设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F(\not\equiv 0)$ 是有限级亚纯函数，如果 f 是方程(1.2)的亚纯解，并且 $\sigma(f) < \infty$，则有 $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$。

引理 2[7] 假设 f 是超越亚纯函数且 $\sigma(f) = \sigma < \infty$，$H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_q, j_q)\}$ 是不同整数对的有限集合，满足 $k_i > j_i \ge 0 (i = 1, 2, \cdots, q)$。$\varepsilon > 0$ 是一给定常数，那么

(1) 存在一线测度为零的集合 $E \subset [0, 2\pi)$，如果 $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E$，那么存在常数 $R_0 = R_0(\psi) > 1$，使得对所有满足 $\arg z = \psi$ 和 $|z| \ge R_0$ 的 z 以及对所有 $(k, j) \in H$，

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| \le |z|^{(k-j)(\sigma - 1 + \varepsilon)}, \tag{2.1}$$

(2) 存在一集合 $E \subset (1, \infty)$ 有有限对数测度，使得对所有满足 $|z| \notin E \cup [0,1]$ 的 z，及对所有 $(k, j) \in H$

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| \le |z|^{(k-j)(\sigma - 1 + \varepsilon)}, \tag{2.2}$$

(3) 存在一集合 $E \subset (0, \infty)$ 有有限线测度，使得对所有满足 $|z| \notin E$ 的 z 及对所有 $(k, j) \in H$，

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| \le |z|^{(k-j)(\sigma + \varepsilon)}. \tag{2.3}$$

引理 3[5]设 $P(z)$ 是次数为 n 的非常数多项式，$w(z) \not\equiv 0$ 是亚纯函数，其级 $\sigma(w) < n$，令 $g = w\mathrm{e}^P$，则存在零测度集 $H_1 \subset [0, 2\pi)$，对每一 $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$ 及给定常数 $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$，当 $r > r_0(\theta, \varepsilon)$ 时，有

(1) 如果 $\delta(P, \theta) > 0$，那么

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta) r^n\} \le \left|g(r\mathrm{e}^{i\theta}\right| \le \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta) r^n\}, \tag{2.4}$$

(2) 如果$\delta(P,\theta)<0$，那么

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\}\le\left|g(re^{i\theta}\right|\le\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\}, \tag{2.5}$$

其中$H_2=\left\{\theta\in[0,2\pi);\delta(P,\theta)=0\right\}$是有限集。

引理 4[8,9] 假设$G(r)$与$H(r)$为两个定义在$(0,\infty)$内的非减实函数。

(1) 若除去一个有穷线测度的集合E外有那么对任意的$\alpha>1$，存在r_0使得对所有$r\ge r_0$都有$G(\alpha r)\le H(\alpha r)$。

(2) 若存在一个集合E，其对数测度$lmE=\delta<+\infty$ (集合E的对数测度lmE定义为$lmE=\int_1^{+\infty}\left(\chi_E(t)/t\right)\mathrm{d}t$，其中$\chi_E=\begin{cases}1 & r\in E\\ 0 & r\notin E\end{cases}$)，使得当$r\notin E$时$G(r)\le H(r)$，那么对任意常数$\beta\left(>e^{\delta}\right)$，当$r>1$时有$G(r)\le H(\beta r)$。

引理 5[3] 假$f(z)$与$g(z)$为开平面上非常数亚纯函数，其级分别为$\lambda(f)$与$\lambda(g)$。如果$\lambda(f)<\lambda(g)$，则$\lambda(fg)=\lambda(g)$，$\lambda(f+g)=\lambda(g)$。

3. 定理 1 的证明

假设f为方程(1.3)的任一非零解，则由定理 A 知$\sigma(f)=\infty$。令$g_0=f-\varphi$，那么$\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$和$\bar{\lambda}(g_0)=\bar{\lambda}(f-\varphi)$。将$f=g_0+\varphi$代入方程(1.3)，得到

$$g_0''+A_0g_0=-(\varphi''+A_0\varphi). \tag{3.1}$$

由于方程(1.3)的所有非零解具有无穷级而φ是有限级整函数，可知$\varphi''+A_0\varphi\not\equiv0$。对方程(3.1)的无穷级解$g_0$，由引理 1 有$\bar{\lambda}(g_0)=\bar{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$。

下面证明$\bar{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。令$g_1=f'-\varphi$，那么有$\sigma(g_1)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$和$\bar{\lambda}(g_1)=\bar{\lambda}(f'-\varphi)$对方程(1.3)的两边微分，得到

$$f'''+A_0f'+A_0'f=0. \tag{3.2}$$

由方程(1.3)得到

$$f=-\frac{f''}{A_0}, \tag{3.3}$$

将式(3.3)代入式(3.2)得到

$$f'''-\frac{A_0'}{A_0}f''+A_0f'=0. \tag{3.4}$$

将$f'=g_1+\varphi, f''=g_1'+\varphi', f'''=g_1''+\varphi''$代入式(3.4)得到

$$g_1''-\frac{A_0'}{A_0}g_1'+A_0g_1=h, \tag{3.5}$$

其中$h=-\left(\varphi''-\frac{A_0'}{A_0}\varphi'+A_0\varphi\right)$。

若$h\not\equiv0$，那么

$$\varphi''-\frac{A_0'}{A_0}\varphi'+A_0\varphi=0, \tag{3.6}$$

对(3.6)的两边同时除以φ，整理得到

$$A_0=-\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{A_0'}{A_0}\frac{\varphi'}{\varphi}. \tag{3.7}$$

由于φ，A_0为有限级整函数，从而除去一个线测度为有穷的集合$H\subset[0,+\infty)$外，有

$$m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)=O\left(\log r\right) \tag{3.8}$$

及

$$m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O\left(\log r\right) \quad \left(r\to\infty\right). \tag{3.9}$$

由式(3.8)和(3.9)

$$m\left(r,-\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{A_0'}{A_0}\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\le m\left(r,\frac{\varphi''}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O\left(\log r\right) \qquad \left(r\to\infty, r\notin H\right). \tag{3.10}$$

由于 A_0 为整函数，根据式(3.7)和(3.10)得到 $T\left(r,A_0\right)=m\left(r,A_0\right)=m\left(r,-\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{A_0'}{A_0}\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O\left(\log r\right)$ 矛盾，这个矛盾表明 $h\not\equiv 0$。

对于方程(3.5)，由于 $h\not\equiv 0$ 和 $\sigma\left(g_1\right)=\infty$，并由引理 1，有 $\overline{\lambda}\left(g_1\right)=\overline{\lambda}\left(f'-\varphi\right)=\sigma\left(g_1\right)=\infty$。

4. 定理 2 的证明

假设 f 为方程(1.4)的任一非零解，则由定理 A 知 $\sigma\left(f\right)=\infty$。令 $g_0=f-\varphi$，那么 $\sigma\left(g_0\right)=\sigma\left(f\right)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}\left(g_0\right)=\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)$。将 $f=g_0+\varphi$ 代入方程(1.4)得到

$$g_0''+A_1g_0'+A_0g_0=-\left(\varphi''+A_1\varphi'+A_0\varphi\right). \tag{4.1}$$

由于方程(1.4)的所有非零解具有无穷级而 φ 是有限级整函数，可知 $\varphi''+A_1\varphi'+A_0\varphi\not\equiv 0$。对方程(4.1)的无穷级解 g_0，由引理 1 有 $\overline{\lambda}\left(g_0\right)=\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)=\sigma\left(g_0\right)=\sigma\left(f\right)=\infty$。

下面证明 $\overline{\lambda}\left(f'-\varphi\right)=\infty$。令 $g_1=f'-\varphi$，那么有 $\sigma\left(g_1\right)=\sigma\left(f'\right)=\sigma\left(f\right)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}\left(g_1\right)=\overline{\lambda}\left(f'-\varphi\right)$ 对方程(1.4)的两边微分，得到

$$f'''+A_1f''+\left(A_1'+A_0\right)f'+A_0'f=0. \tag{4.2}$$

由方程(1.4)得到

$$f=-\frac{f''+A_1f'}{A_0}, \tag{4.3}$$

将式(4.3)代入式(4.2)得到

$$f'''+\left(A_1-\frac{A}{A_0}\right)f''+\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)f'=0. \tag{4.4}$$

将 $f'=g_1+\varphi$，$f''=g_1'+\varphi'$，$f'''=g_1''+\varphi''$ 代入式(4.4)，得到

$$g_1''+\left(A_1-\frac{A_0'}{A_0}\right)g_1'+\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)g_1=h, \tag{4.5}$$

其中 $h=-\left[\varphi''+\left(A_1-\frac{A_0'}{A_0}\right)\varphi'+\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)\varphi\right]$。

由于 $\lambda\left(A_j\right)<\sigma\left(A_j\right)\left(j=0,1\right)$，则由 Hadamard-Borel 定理知 $A_j\left(z\right)=h_j\left(z\right)e^{P_j\left(z\right)}$，$h_j\left(z\right)$ 为整函数，$P_j\left(z\right)$ 为非常数多项式，且 $\sigma\left(h_j\right)=\lambda\left(A_j\right)<\sigma\left(A_j\right)=\deg P_j$。于是得到

$$A_1'=\left(h_1'+P_1'h_1\right)e^{P_1}. \tag{4.6}$$

若 $h\equiv 0$，那么

$$\varphi''+\left(A_1-\frac{A_0'}{A_0}\right)\varphi'+\left(A_1'+A_0-\frac{A_0'}{A_0}A_1\right)\varphi=0. \tag{4.7}$$

对(4.7)的两边同时除以 φ，并且将 $A_j(z)=h_j(z)\mathrm{e}^{P_j(z)}$ 与式(4.6)代入式(4.7)中整理得到

$$B_1\mathrm{e}^{P_1(z)}+B_0\mathrm{e}^{P_0(z)}+B=0, \tag{4.8}$$

其中

$$\begin{cases} B=\dfrac{\varphi''}{\varphi}-\dfrac{A_0'}{A_0}\dfrac{\varphi'}{\varphi}, \\ B_0=h_0, \\ B_1=h_1\dfrac{\varphi'}{\varphi}+\left(h_1'+h_1P_1'-\dfrac{A_0'}{A_0}h_1\right) \end{cases} \tag{4.9}$$

若 $B_1\equiv 0$ 时，则 $B_0\mathrm{e}^{P_0(z)}+B=0$，使用类似于定理 1 的证明方法，可得到一个矛盾，从而 $h\not\equiv 0$。

若 $B_1\not\equiv 0$ 时，下面分两种情况讨论：

(i) 若 $\deg P_0\neq\deg P_1$，由于 φ，A_0 为有限级整函数，从而除去一个线测度为有穷的集合 $H_1\subset[0,+\infty)$ 外，有

$$m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)=O(\log r) \tag{4.10}$$

及

$$m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=O(\log r)\quad (r\to\infty). \tag{4.11}$$

由式(4.9)~(4.11)

$$\begin{aligned} m(r,B_1)&\le 3m(r,h_1)+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)+m(r,h_1')+m(r,P_1')+O(1)\\ &\le 3T(r,h_1)+T(r,h_1')+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{A_0'}{A_0}\right)+O(\log r)\\ &\le 4T(r,h_1)+O(\log r). \end{aligned} \tag{4.12}$$

由于 $\lambda(\varphi)<\lambda(A_0)$，从而 $N\left(r,\dfrac{1}{\varphi}\right)<N\left(r,\dfrac{1}{A_0}\right)$，于是

$$N(r,B_1)\le N\left(r,\frac{1}{A_0}\right)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\le 2N\left(r,\frac{1}{A_0}\right). \tag{4.13}$$

对任意的 $\varepsilon>0$，当 r 充分大时

$$T(r,h_1)\le r^{\sigma(h_1)+\varepsilon} \tag{4.14}$$

及

$$N\left(r,\frac{1}{A_0}\right)\le r^{\lambda(A_0)+\varepsilon}. \tag{4.15}$$

所以由式(4.12)~(4.15)，当 $r\notin H_1$，r 充分大时

$$\begin{aligned} T(r,B_1)&=m(r,B_1)+N(r,B_1)\\ &\le 4r^{\sigma(h_1)+\varepsilon}+2r^{\lambda(A_0)+\varepsilon}+O(\log r). \end{aligned}$$

由引理 $4(\mathrm{i})$ 及上式得

$$\sigma(B_1) \le \max\{\lambda(A_0), \sigma(h_1)\} < \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_0)\}. \tag{4.16}$$

由式(4.9)~(4.10)，当 $r \notin H_1$，r 充分大时

$$\begin{aligned} m(r,B) &= m\left(r, \frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{A_0'}{A_0}\frac{\varphi'}{\varphi}\right) \\ &\le m\left(r, \frac{\varphi''}{\varphi}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) \\ &= O(\log r), \qquad\qquad (r \to \infty, r \notin H_1). \end{aligned}$$

$$N(r,B) \le N\left(r, \frac{1}{A_0}\right) + N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \le 2N\left(r, \frac{1}{A_0}\right).$$

所以 $T(r,B) = m(r,B) + N(r,B) \le 2N\left(r, \frac{1}{A_0}\right) + O(\log r)$。

由引理 $4(\mathrm{i})$ 及上式得

$$\sigma(B) < \lambda(A_0) < \sigma(A_0). \tag{4.17}$$

由于 $\sigma(B_0) = \sigma(h_0) = \lambda(h_0) = \lambda(A_0) < \sigma(A_0)$ 及 $\sigma\left(\mathrm{e}^{P_0}\right) = \deg P_o = \sigma(A_0)$，故根据引理 5，有

$$\sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0}\right) = \sigma\left(\mathrm{e}^{P_0}\right) = \sigma(A_0) \tag{4.18}$$

如果 $\deg P_0 < \deg P_1$，即 $\sigma(A_0) < \sigma(A_1)$。由式(4.16)可知，$\sigma(B_1) < \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_0)\} = \sigma(A_1)$，根据引理 5，有

$$\sigma\left(B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma\left(\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma(A_1). \tag{4.19}$$

由式(4.18)~(4.19)及引理 5，有

$$\sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0} + B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma\left(B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma(A_1). \tag{4.20}$$

由式(4.8)和(4.20)，有 $\sigma(B) = \sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0} + B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma(A_1)$，与式(4.17)矛盾。

如果 $\deg P_0 > \deg P_1$，即 $\sigma(A_0) > \sigma(A_1)$。由式(4.16)可知，$\sigma(B_1) < \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_0)\} = \sigma(A_0)$，根据引理 5，有

$$\sigma\left(B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) < \sigma(A_0). \tag{4.21}$$

由式(4.18)，(4.20)及引理 5

$$\sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0} + B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma\left(B_0e^{P_0}\right) = \sigma(A_0). \tag{4.22}$$

由式(4.8)和(4.22)，有 $\sigma(B) = \sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0} + B_1\mathrm{e}^{P_1}\right) = \sigma\left(B_0\mathrm{e}^{P_0}\right) = \sigma(A_0)$ 与式(4.17)矛盾。这两个矛盾表明 $h \not\equiv 0$。

(ii) 若 $\deg P_0 = \deg P_1$，由于 $\sigma(\varphi) < +\infty$ 和 $\sigma(A_0) < +\infty$，故根据引理 2 知，存在子集 $E_1 \subset [0, 2\pi)$ 有线测度零，如果 $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$，那么存在常数 $R = R(\theta) > 1$，对所有满足 $\arg z = \theta$ 和 $|z| \ge R$ 的 z，有

$$\left|\frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)}\right| \le |z|^{j \cdot \sigma(\varphi)} \qquad (j = 1, 2) \tag{4.23}$$

及

$$\left|\frac{A_0'(z)}{A_0(z)}\right| \le |z|^{\sigma(A_0)}, \tag{4.24}$$

其中 $\sigma=\max\{\sigma(\varphi),\sigma(A_0)\}$。

由式(4.9)、(4.23)和(4.24)，对于满足 $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus E_1$ 且 $|z|=r$ 充分大的 z，有

$$|B|\le\left|\frac{\varphi''}{\varphi}\right|+\left|\frac{A_0'}{A_0}\right|\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right|\le|z|^{2\sigma(\varphi)}+|z|^{\sigma(A_0)}|z|^{\sigma(\varphi)}\le 2r^{2\sigma}, \tag{4.25}$$

其中 $\sigma=\max\{\sigma(\varphi),\sigma(A_0)\}$。

记 $E=\{\theta\in[0,2\pi)\,|\,\delta(P_0,\theta)>0\}$，显然能取到 θ 满足 $\delta(P_0,\theta_0)>0$。记

$$E_2=\{\theta\in[0,2\pi)\,|\,\delta(P_1,\theta_0)=0\}\cup\{\theta\in[0,2\pi)\,|\,\delta(P_0,\theta_0)\ne\delta(P_1,\theta_0)\},$$

则 E_2 为有限集。考虑 $B_j e^{P_j}$，由式(4.16)可知 $\sigma(B_1)<\max\{\sigma(A_1),\sigma(A_0)\}=\deg P_1$，并且 $\sigma(B_0)=\sigma(h_0)<\sigma(A_0)=\deg P_0$，得到 $\sigma(B_j)<\deg P_j$。设 $G_j\subset[0,2\pi)$ 为应用引理 3 于 $B_j e^{P_j}$ 时存在的零测度例外集，则 $E_3=G_0\cup G_1$ 线测度仍为零。现在取定 $\arg z=\theta_0\in E\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3)$，则 $\delta(P_0,\theta_0)>0$，$\delta(P_0,\theta_0)\ne\delta(P_1,\theta_0)$ 和 $\delta(P_1,\theta_0)\ne 0$。令 $\delta=\max\{\sigma(P_j,\theta_0)\}$，因为 $\delta(P_0,\theta_0)\ne\delta(P_1,\theta_0)$，则 $\delta>0$ 且有唯一的 $j\,(j=0,1)$，使得 $\delta(P_j,\theta_0)=\delta$，不妨设 δ 为 $\delta(P_0,\theta_0)$。对于任意的 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\min\left\{\dfrac{\delta(P_0,\theta_0)-\delta(P_1,\theta_0)}{\delta(P_0,\theta_0)+\delta(P_1,\theta_0)},\dfrac{1}{2}\right\}\right)$，当 $|z|=r$ 充分大时，有

$$\left|B_0 e^{P_0}\right|\ge\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta_0)r^{\deg P_0}\}. \tag{4.26}$$

若 $\delta(P_1,\theta_0)>0$，由引理 3 当 $r\to\infty$ 时

$$\left|B_1 e^{P_1}\right|\le\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_1,\theta_0)r^{\deg P_1}\}. \tag{4.27}$$

由式(4.8)，(4.25)，(4.26)和(4.27)，有 $\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta_0)r^{\deg P_0}\}\le 2r^{2\sigma_1}+\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P_1,\theta_0)r^{\deg P_1}\}$，得到 $1\le 0$，矛盾。

若 $\delta(P_1,\theta_0)<0$，由引理 3 当 $r\to\infty$ 时

$$\left|B_1 e^{P_1}\right|\le\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta_0)r^{\deg P_1}\}\le 1. \tag{4.28}$$

由式(4.9)，(4.25)，(4.26)和(4.28)，有 $\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_0,\theta_0)r^{\deg P_0}\}\le 2r^{2\sigma_1}+1$，得到 $1\le 0$，这两个矛盾表明 $h\ne 0$。

对于方程(4.5)，由于 $h\ne 0$ 和 $\sigma(g_1)=\infty$，并由引理 1，有 $\overline{\lambda}(g_1)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\sigma(g_1)=\infty$。

参考文献 (References)

[1] W. K. Hayman. Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
[3] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数的唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[4] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点与超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.
[5] 曹春雷, 陈宗煊. 一类整函数系数线性微分方程解的增长级和零点[J]. 应用数学学报, 2002, 25(1): 123-131.
[6] Z. X. Chen. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations. Analysis, 1994, 14: 425-438.
[7] G. Gundersen. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. Journal of the London Mathematical Society, 1988, 37(2): 88-104.
[8] S. A. Gao. On the complex oscillation of solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients. Comment mathematici Universitatis Sancti Pauli, 1989, 38(1): 11-20.
[9] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

