Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 28-33
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21006 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Implicit-Explicit Multistep Finite Element Methods for Some Nonlinear Reaction-Diffusion Equations*

Haiming Gu#, Mengmeng Guo
Department of Mathematics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao
Email: #coolmi.g@163.com
Received: Nov. 30th, 2011; revised: Dec. 20th, 2011; accepted: Dec. 23rd, 2011

Abstract: Implicit-explicit multistep methods were recently proposed, and mainly used to nonlinearparabolicequations. We approximate the solution of initial boundary value problems for some nonlinear reaction-diffusion Equations, and discretize by Implicit-Explicit Multistep finite element methods. The optimal order error estimates is derived in this paper.

Keywords: Nonlinear Reaction-Diffusion Equations; Implicit-Explicit Multistep Finite Element Methods; Optimal Order Error Estimates

一类非线性反应扩散方程的隐－显多步有限元方法*

顾海明#，郭蒙蒙
青岛科技大学数理学院，青岛
Email: #coolmi.g@163.com
收稿日期：2011 年 11 月 30 日；修回日期：2011 年 12 月 20 日；录用日期：2011 年 12 月 23 日

摘　要：隐－显多步有限元方法是近年来提出的一种方法，主要用于非线性抛物问题。我们对一类非线性反应扩散方程的初边值问题进行近似，给出了隐－显多步有限元方法的逼近格式，并证明了该格式的最优阶误差估计。

关键词：非线性反应扩散方程；隐－显多步有限元方法；最优估计

1. 引言

隐－显多步有限元方法是由 Georgios Akrivis，Michel Crouzeix，Charalambos Makridakis 在 1998 年提出的，他们对非线性抛物方程的初边值问题的结果进行近似.在空间中，用有限元方法进行描述，而对于时间变量的离散，以线性多步格式为基础，方程的一部分显式离散，一部分隐式离散。这种演绎格式是稳定的，相容的，有效的[1-3]。因为对于每个时间层，有相同的矩阵线性系统解，且在每个时间步长上，都要求他们实现。对于非线性反应扩散方程的数值求解，我们通常是在空间中用有限元离散，而在时间上用低阶有限差分离散[4]。

本文在第 2 节中给出了文中所用到的一些记号，第 3 节中给出了给出的反应扩散方程的隐－显多步有限元方法，在第 4 节中我们对该格式进行了最优误差估计。

*青岛市应用基础项目资助。
#通讯作者。

2. 预备知识

考虑下列非线性反应扩散方程：设$\Omega\in R^d\left(d=2,3\right)$是具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域。对于$T>0$，求实值函数$u\in\Omega\times\left[0,T\right]$，满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\left(x\right)\Delta u=f\left(x,t,u\right),\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times\left[0,T\right] \tag{1}$$

$$u\left(x,t\right)=0,\qquad \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left[0,T\right] \tag{2}$$

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\qquad x\in\Omega \tag{3}$$

其中，$a\left(x\right)$及$f\left(x,t,u\right)$为已知光滑函数。假设存在常数a_*和a^*，使得$a\left(x\right)$满足

$$0<a_*<a\left(x\right)<a^*$$

下面给出本文将要用到的一些记号。

$$\alpha\left(\zeta\right)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\zeta,\ \beta\left(\zeta\right)=\sum_{i=0}^{q}\beta_i\zeta,\ \gamma\left(\zeta\right)=\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\zeta \tag{4}$$

用上述多项式描述的数值求解一阶*O.D.E* q-步线性多步法，记为$\left(\alpha,\beta\right)$，$\left(\alpha,\gamma\right)$。假设格式$\left(\alpha,\beta\right)$为强$A\left(0\right)$-稳定的隐式多步法，格式$\left(\alpha,\gamma\right)$为显式多步法。设格式$\left(\alpha,\beta\right)$，$\left(\alpha,\gamma\right)$的收敛阶都为$p$阶,其中$p,q$为正整数，且$p\le q$ [1,5,6]。

在假设$p=q$时，记多项式$\alpha\left(\zeta\right)$，$\beta\left(\zeta\right)$，$\gamma\left(\zeta\right)$分别为

$$\alpha(\zeta)=\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j}\zeta^{q-j}\left(\zeta-1\right)^j,\ \beta\left(\zeta\right)=\zeta^q,\ \gamma\left(\zeta\right)=\zeta^q-\left(\zeta-1\right)^q \tag{5}$$

由上述多项式给出的隐式$\left(\alpha,\beta\right)$格式是著名的*B.D.F*方法，这种方法对$1\le q\le 6$是强$A\left(0\right)$-稳定的。

设$\left(v,w\right)=\int_\Omega vw\mathrm{d}s$，$\left\|v\right\|^2=\left(v,v\right)$ [7,8] $W_s^k\left(\Omega\right)$是上模为$\left\|v\right\|_{W_\alpha^\kappa}=\left\{\sum_{|\alpha|\le\kappa}\left\|\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\right\|_{L^S(\Omega)}^S\right\}^{1/s}$的 Sobolev 空间。

当$s=2$时，$\left\|v\right\|_{W_2^\kappa}=\left\|v\right\|_{H^\kappa}=\left\|v\right\|_\kappa$。

用$\left\|.\right\|_{-s}$表示$\left\|.\right\|_s$的半范数，则当$s=2,k=1$时，半范数$\left|v\right|_1^2=\left|\nabla v\right|$。

用$H_0^1\left(\Omega\right)$表示函数值在边界$\partial\Omega$上为 0 的$H^1\left(\Omega\right)$的子空间，则在子空间上$\left|.\right|_1=\left\|.\right\|_1$。

定义椭圆算子A：

$$Av=-a\left(x\right)\Delta v \tag{6}$$

显然，算子A是在 Hilbert 空间H上的线性自共轭正定算子，且$\sqrt{\left(Av,v\right)}$等价于$\left|v\right|_1$。不失一般性，记$\left|v\right|_1=\sqrt{\left(Av,v\right)}$。定义：

$$\left\|\left|v\right\|\right|=(\alpha_q\left\|v\right\|^2+\beta_q\tau\left|v\right|_1^2)^{1/2} \tag{7}$$

对于$V=\left(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_q\right)^T\in\left(H_0^1\right)^q,W=\left(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_q\right)^T\in\left(H_0^1\right)^q$，我们定义

$$\left(V,W\right)=\sum_{i=1}^{q}\left(\upsilon_i,\omega_i\right),\ \left\|V\right\|=\left(\sum_{i=1}^{q}\left\|\upsilon_i\right\|^2\right)^{1/2},\quad \left|V\right|_1=\left(\sum_{i=1}^{q}\left|\upsilon_i\right|_1^2\right)^{1/2}$$

$$\left\|\left|V\right\|\right|=\left(\sum_{i=1}^{q}\left\|\left|\upsilon_i\right\|\right|^2\right)^{1/2},\ \left\|V\right\|_{-1}=\left(\sum_{i=1}^{q}\left\|\upsilon_i\right\|_{-1}^2\right)^{1/2},\ \left\|V\right\|_{j,\infty}=\max_{1\le i\le q}\left\|\upsilon_i\right\|_{j,\infty}$$

对于线性算子$M:\left(H_0^1\right)^q\to\left(H_0^1\right)^q$，我们记

$$\|M\| = \sup_{V \in \left(H_0^1\right)^q, V \neq 0} \frac{\|MV\|}{\|V\|}$$

3. 隐–显多步有限元格式

(1)的弱形式为：$\forall v \in H_0^1$，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(a(x)\nabla u, \nabla v\right) = (f, v) \tag{8}$$

取 $\tau > 0$， $N = T/\tau \in Z$, $t^n = n\tau$, $v^n = v\left(x, t^n\right)$。设 $V_h \in H_0^1(\Omega)$ 为有限元空间，且相应于 Ω 上的拟一致正则剖分指标为 r。

设下列逼近性和逆性质都成立，

$$\inf_{u_h \in V_h}\left[\|u - u_h\| - h\|u - u_h\|_1\right] \le M\|u\|_{r+1} h^{r+1} \tag{9}$$

$$\|u_h\|_{j,\infty} \le Mh^{-d/2}\|u_h\|_j,\quad j = 0,1,\quad \forall u_h \in V_h \tag{10}$$

定义 $A_h : H_0^1 \to V_h$, $R_h : H_0^1 \to V_h$, $P_0 : H_0^1 \to V_h$ ， 满足

a) $\left(A_h v, \chi\right) = \left(Av, \chi\right) = \left(a(x)\nabla v, \nabla \chi\right)$， $\forall \chi \in V_h$

b) $\left(AR_h v, \chi\right) = \left(Av, \chi\right)$， $\forall \chi \in V_h$ (11)

c) $\left(P_0 v, \chi\right) = \left(v, \chi\right)$， $\forall \chi \in V_h$

则有 $A_h R_h = P_0 A$ 成立。

记 $z = u - R_h u$ ， 由椭圆投影的逼近性，可知

$$\|z\| + \left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\| + h\left(\|z\|_1 + \left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|_1\right) \le M\left(\|u\|_{r+1}, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{r+1}\right) h^{r+1} \tag{12}$$

非线性反应扩散方程(1)的隐–显多步格式为：设给定 $U^0 \in V_h$， 求 $U^n \in V_h$ 为 $u^n = u\left(t^n\right)$ 的离散估计， $n = 0,1,\cdots,N$， 满足

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i U^{n+i} + \tau \sum_{i=0}^{q} \beta_i A_h U^{n+i} = \tau P_0 \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \left[f\left(t^{n+i}, U^{n+i}\right) \cdot U^{n+i} \right] \tag{13}$$

$$n = 0,1,\cdots,N-q$$

其初始值计算格式为

a) $U^0 = R_h u_0$

b) $U^k = R_h T_k^\nu u_0$, $k = 1,2,\cdots,q-1$, (14)

其中

$$T_k^\nu u_0 = u_0 + u_0^{(1)} + \frac{(k\tau)^2}{2!} u_0^{(2)} + \cdots + \frac{(k\tau)^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!} u_0^{(\nu-1)} \tag{15}$$

这里 $u_0^{(i)}\left(i = 1,2,\cdots,\nu-1\right)$ 为(1)的解在 $t = 0$ 处关于时间 t 的 i 阶导数，可以根据原方程计算求得。

由多步格式 (α, β) 为强 $A(0)$-稳定的，可得 $\alpha_q \beta_q > 0$ ，则 $\alpha_q I + \beta_q A_h$ 为可逆算子。因此，格式(13)(14)有唯一解。

4. 收敛性分析

令 $\vartheta^n = R_h u^n - U^n$ ， 由格式(13)(14)得

$$\left\|\vartheta^n\right\| < M\tau^{\nu}, \quad n = 0,1,\cdots,q-1 \tag{16}$$

由(8)和(13)及 $A_h R_h = P_0 A$，可得误差方程

$$\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\vartheta^{n+i} + \tau\sum_{i=0}^{q}\beta_i A_h\vartheta^{n+i} = \tau\sum_{i=0}^{q-1}F_i^n\vartheta^{n+i} + \tau E_1^n + \tau E_2^n + \tau E_3^n,\ n = 0,1,\cdots,q-1 \tag{17}$$

其中

$$F_i^n = P_0\gamma_i\int_0^1 f'\left(R_h u^{n+i} - s\vartheta^{n+i}\right)\mathrm{d}s, \tag{18}$$

$$E_1^n = P_0\left(\sum_{i=0}^{q}\beta_i A u^{n+i} - \sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i A u^{n+i}\right) \tag{19}$$

$$\tau E_2^n = \left(R_h - P_0\right)\sum_{i=0}^{q}\alpha_i u^{n+i} + P_0\left(\sum_{i=0}^{q}\alpha_i u^{n+i} - \tau\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial t}\left(t^{n+i}\right)\right) \tag{20}$$

$$\tau E_3^n = \tau P_0\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\left[f\left(t^{n+i},u^{n+i}\right) - f\left(t^{n+i},R_h u^{n+i}\right)\right] \tag{21}$$

记

$$\delta_i\left(x\right) = -\frac{\alpha_i + \beta_i x}{\alpha_q + \beta_q x},\ \Delta_i = \delta_i\left(\tau A_h\right),\ i = 0,1,\cdots,q-1 \tag{22}$$

$$\theta^n = \begin{pmatrix}\vartheta^{n+q-1}\\ \vartheta^{n+q-2}\\ \vdots\\ \vartheta^n\end{pmatrix},\ \varepsilon_1^n = \begin{pmatrix}E_1^n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2^n = \begin{pmatrix}E_2^n + E_3^n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \varepsilon^n = \varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n,\quad \Lambda = \Lambda\left(\tau A_h\right) = \begin{pmatrix}\Delta_{q-1} & \Delta_{q-2} & \cdots & \Delta_0\\ I & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & I & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}^n = \begin{pmatrix}F_{q-1}^n & F_{q-2}^n & \cdots & F_{q-3}^n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\theta^n = \begin{pmatrix}\left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\vartheta^{n+q-1}\\ \left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\vartheta^{n+q-2}\\ \vdots\\ \left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\vartheta^n\end{pmatrix}$$

则，误差方程(17)可改写为

$$\left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\theta^{n+1} = \left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)\Lambda\theta^n + \tau F^n\theta^n + \tau\varepsilon^n \tag{23}$$

下面运用 Crouzeix 在参考文献[2]中的结果

引理 1 存在常数 η，$0 \le \eta \le 1$，以及连续 $H:\overline{R}^+ \to C^{q\times q}$，使得对 $x \ge 0$，矩阵 $\boldsymbol{H}\left(x\right)$ 是可逆的，且对于矩阵 $\boldsymbol{L}\left(x\right)$

$$\boldsymbol{L}\left(x\right) = \frac{\alpha_q + \beta_q x}{\alpha_q + \beta_q x}\boldsymbol{H}\left(x\right)^{-1}\Lambda\left(x\right)\boldsymbol{H}\left(x\right)$$

有

$$\left\|\boldsymbol{L}(x)\right\|_2 \le 1 \tag{24}$$

记

$$H = H\left(\tau A_h\right),\ L = L\left(\tau A_h\right),\ Y^n = H^{-1}\theta^n,\ \boldsymbol{F}^n = H^{-1}F^n,\ \boldsymbol{\varepsilon}^n = H^{-1}\varepsilon^n$$

则，误差方程(23)可以改写为

$$\left(\alpha_q + \tau\beta_q A_h\right)Y^{n+1} = \left(\alpha_q + \tau\eta\beta_q A_h\right)LY^n + \tau\boldsymbol{F}^n\theta^n + \tau\boldsymbol{\varepsilon}^n \tag{25}$$

将上式两端与 Y^{n+1} 作内积，可得

$$\left\|Y^{n+1}\right\|^2 = \left(\left(\alpha_q + \tau\eta\beta_q A_h\right)LY^n, Y^{n+1}\right) + \left(\tau\boldsymbol{F}^n\theta^n, Y^{n+1}\right) + \left(\tau\boldsymbol{\varepsilon}^n, Y^{n+1}\right) = T_1 + T_2 + T_3 \tag{26}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，得

$$\begin{aligned}|T_1| &= \left|\left(\left(\alpha_q+\tau\eta\beta_q A_h\right)LY^n, Y^{n+1}\right)\right| = \left|\alpha_q\left(LY^n, Y^{n+1}\right)+\tau\eta\beta_q\left(L\left(A^{1/2}Y^n\right), A^{1/2}Y^{n+1}\right)\right| \\ &\le \alpha_q\left\|Y^n\right\|\left\|Y^{n+1}\right\|+\tau\eta\beta_q\left|Y^n\right|_1\left|Y^{n+1}\right|_1\end{aligned} \tag{27}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及 Poincare 不等式，得

$$\begin{aligned}|T_2| &= \left|\left(\tau \boldsymbol{F}^n\theta^n, Y^{n+1}\right)\right| = \tau\left|\left(H^{-1}F^n\theta^n, H^T\left(H^T\right)^{-1}Y^{n+1}\right)\right| = \tau\int_\Omega\left(F^n\theta^n, \left(H^T\right)^{-1}Y^{n+1}\right)\mathrm{d}x \\ &\le M\tau\left\|\theta^n\right\|\cdot\left\|\left(H^T\right)^{-1}Y^{n+1}\right\| \le M\tau\left\|Y^n\right\|\cdot\left\|Y^{n+1}\right\| \le M\tau\left\|Y^n\right\|\cdot\left|Y^{n+1}\right|_1\end{aligned} \tag{28}$$

同理可得

$$|T_3| \le M\left\|\varepsilon^n\right\|\cdot\left|Y^{n+1}\right|_1, \tag{29}$$

由(27)(28)(29)，及不等式 $ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2$，可得

$$\left\|Y^{n+1}\right\|^2 \le \frac{1}{2}\alpha_q\left\|Y^n\right\|^2+\frac{1}{2}\alpha_q\left\|Y^{n+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\tau\eta\beta_q\left|Y^n\right|_1^2+\frac{1}{2}\tau\eta\beta_q\left|Y^{n+1}\right|_1^2+\frac{\varepsilon}{2}M^2\tau\left(\left\|Y^n\right\|^2+\left\|\varepsilon^n\right\|^2\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left|Y^{n+1}\right|_1^2 \tag{30}$$

取 $0<\varepsilon<\left(1-\eta^2\right)\beta_q$，有

$$\left\|Y^{n+1}\right\|^2 \le (1+M\tau)^2\left\|Y^n\right\|^2+\frac{\varepsilon}{2}M^2\tau\left(\left\|Y^n\right\|^2+\left\|\varepsilon^n\right\|^2\right) \tag{31}$$

下面我们估计 $\left\|E^n\right\|_{-1}$ 多步格式 $(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)$ 是 ν 阶收敛的，即 $\left(0^0=1\right)$

a) $\sum_{i=0}^q\alpha_i=0$

b) $\sum\limits_{i=0}^q i^k\alpha_i = k\sum\limits_{i=0}^q i^{k-1}\beta_i = k\sum\limits_{i=0}^{q-1} i^{k-1}\gamma_i, k=1,2,\cdots,\nu$ (32)

由 Taylor 定理及(32)，可得

$$\sum_{i=0}^q\beta_i u^{n+j}+\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i u^{n+j}=o\left(\tau^\nu\right),\quad j=1,2,\cdots,d \tag{33}$$

则

$$\left|\left(E_1^n, v\right)\right| = \left|\left(\left(\sum_{i=0}^q\beta_i Au^{n+i}-\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i Au^{n+i}\right), v\right)\right| \le M\tau^\nu\|v\| \tag{34}$$

即得

$$\left\|\varepsilon_1^n\right\|_{-1}=\left\|E_1^n\right\|_{-1}\le M\tau^\nu \tag{35}$$

下面我们估计(20)(21)。由 Taylor 定理及(32)，可得

$$\left\|E_2^n\right\| \le M\tau h^{r+1} \tag{36}$$

同理可得

$$\sum_{i=0}^q\alpha_i u^{n+j}-\tau\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i u_t\left(t^{n+j}\right)=o\left(\tau^{\nu+1}\right) \tag{37}$$

即得

$$\left\|E_3^n\right\| \le M\tau^{\nu+1} \tag{38}$$

则有

$$\left\|\varepsilon_2^n\right\| = \left\|E_2^n+E_3^n\right\| \le M\left(h^{r+1}+\tau^\nu\right) \tag{39}$$

设

$$h^{r+1-d/2}=o\left(\tau^{1/2}\right),\ \tau^{\nu-1/2}=o\left(h^{d/2}\right) \tag{40}$$

则

$$\left\|\theta^{n+1}\right\| \le M\left[\left\|\theta^{0}\right\| + \tau\left(\left\|\varepsilon_1^n\right\|_{-1}^2 + \left\|\varepsilon_2^n\right\|^2\right)^{1/2}\right] \le M\left(h^{r+1} + \tau^{\nu}\right),\ \left(n = 1, 2, \cdots, N-q\right)$$

综上可得

定理 1 u 是(1)~(3)的解，且充分光滑，U^n 是格式(13)(14)的解,设 $r \ge \dfrac{d}{2}$，且满足网格条件(40)，则有最优误差估计

$$\max_{0\le n\le N}\left\|u\left(t^n\right) - U^n\right\| \le M\left(h^{r+1} + \tau^{\nu}\right)$$

参考文献 (References)

[1] G. Akrivis, M. Crouzeix and C. Makridakis. Implicit-explicit multistep finite element methods for nonlinear parabolic problems. Mathematics of Computation, 1998, 67(222): 457-477.

[2] G. Akrivis, M. Crouzeix and C. Makridakis. Implicit-explicit multistep methods for quasilinear parabolic problems. Numerische Mathematik, 1999, 82: 521-541.

[3] G. A. F. Karakatsani. Modified implicit-explicit BDF methods for nonlinear parabolic equations. BIT Numerical Mathematics, 2003, 43: 467-483.

[4] V. Thome. Galerkin finite element methods for parabolic problems. Lecture Notes in Mathmatics 1054. Berlin: Spinger-Verlag, 1984.

[5] M. Crouzeix. An implicit-explicit multistep method of the approximation of parabolic equations. Numerische Mathematik, 1980, 35: 257-276.

[6] J. D. Lamber. Computation methods in ordinary differential equations. New York: John Wiley Son, 1973.

[7] W. Chen. Implicit-explicit multistep finite element methods for some nonlinear reaction-diffusion systems and its analysis. 数学物理学报, 2002, 22A(2): 180-188.

[8] W. Chen. Implicit-explicit multistep finite element methods for a semiconductor device with heat conduction. Journal of Mathematical Study, 2002, 2: 110-115.

