Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 34-38
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21007 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Opial Modular of Cesaro Sequence Spaces $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$

Feifei Yu, Jun Li
College of Science, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin
Email: yuff_75@yahoo.com.cn
Received: Oct. 18th, 2011; revised: Nov. 21st, 2011; accepted: Nov. 25th, 2011

Abstract: The Opial modular is the most important digital index in sequence spaces, it riches the intension of the Opial property, and it is a powerful tool for the discussion and the applications in sequence spaces. The calculation formula of Opial modular in Cesaro sequence spaces $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ was given and proved, the fact that $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ has the uniform Opial property was also proved.

Keywords: Cesaro Sequence Spaces $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$; Opial Property; Opial Modular; Uniform Opial Property

Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 的 Opial 模

于非非，李　君
天津科技大学理学院，天津
Email: yuff_75@yahoo.com.cn
收稿日期：2011 年 10 月 18 日；修回日期：2011 年 11 月 21 日；录用日期：2011 年 11 月 25 日

摘　要：Opial 模是序列空间最重要数字指标，丰富了 Opial 性质的内涵，是序列空间的讨论与应用的有力工具，给出了 Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 的 Opial 模的计算公式并予以证明；验证了 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 具有一致 Opial 性质。

关键词：Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$；Opial 性质；Opial 模；一致 Opial 性质

1. 引言

设 X 为 Banach 序列空间，$x=\{x(i)\}$，对 $i\in\mathbb{N}$，称 $p_i(x)=x(i)$ 为坐标映射；若每个坐标映射都连续，则 X 为 BK 空间[1]。

Banach 序列空间 X 称为具有 AK 性质，如果 $\|x^N-x\|\to 0$，$\forall x\in X$，$N\to\infty$，其中 $x^N=(x(1),x(2),\cdots x(N),0,\cdots)$。

绝对型序列空间是最基本的序列空间，具有广泛的应用价值。1970 年[1]，薛昭雄引入了一种新的绝对型序列空间——Cesaro 序列空间，$\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 是常用的 Cesaro 序列空间的记法。已经知道：

$$\mathrm{ces}_p=\left\{x=\{x(i)\}:\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x(i)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

在范数 $\|x\|=\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x(i)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$ 意义下成为具有 AK 性质，BK 性质的 Banach 空间。而且对于 $y=\{y(i)\}\in\mathrm{ces}_p^*$，$x=\{x(i)\}\in\mathrm{ces}_p$，有

$$y(x)=\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)y(i)$$

关于 ces_p 的讨论，诸多数学工作者已经做了大量工作。俞鑫泰，张文耀[2]讨论了 ces_p 的基、凸性和光滑性，刘郁强[3]讨论了 ces_p 的 H 性质，*NUC* 等性质。

X 是 Banach 序列空间，若对于 $\{x_n\}\subset X$，且 $x_n\xrightarrow{w}0$，如果 $\forall x\in X, x\neq 0$ 有

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\|x_k+x\|\geq\liminf_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\|x_k\|$$

则称 X 有 Opial 性质。为了记法上的方便，在不引起混淆的情况下，以下文中上式记为

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+x\|\geq\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

具有 Opial 性质的 Banach 空间 X 的 Opial 模如下定义:

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{\liminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|\right\}$$

其中

$$x_n\xrightarrow{w}0,\ \|x_n\|=1,\ \|x\|=\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq 1$$

Banach 空间 X 称为具有一致 Opial 性质如果 $\forall\varepsilon>0,\ \exists r>0$，使得对于 $\forall\{x_n\}\subset S(X),\ x_n\xrightarrow{w}0$ 及 $\forall x,\ \|x\|\geq\varepsilon$，有

$$1+r\leq\liminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|$$

Banach 空间 X 具有一致 Opial 性质 $\Leftrightarrow\delta(\varepsilon)>1$。

Z. Opial 于 1967 年[4]引入了 Opial 性质的概念，这一性质蕴含不动点性质[5]，这使得它在分析处理许多实际问题中发挥巨大作用，而另外一个数字指标——Opial 模，则丰富了 Opial 性质的内涵，为序列空间性质的讨论与应用提供了有力工具。1996 年[6]，王廷辅、崔云安讨论了 Orlicz 序列空间的 Opial 性质；2001 年[7]，于非非，崔云安讨论了 Orlicz 函数空间的依测度收敛的 Opial 性质；2009 年[8]，于非非，李君证明了 Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 具有 Opial 性质。

本文给出了 Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 的 Opial 模计算公式并予以证明；并利用 Opial 模验证 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 具有一致 Opial 性质。

2. 结论

结论 1： Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 是具有 AK 性质的 BK 空间，则 $\delta(\varepsilon)=c_p$，其中

$$c_p=\inf_{\|y\|=\varepsilon}\left\{c_{xy}:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_{xy}}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y(i)|}{c_{xy}}\right)^p=1\right\}$$

其中 $\|x\|=1,\ 0<\varepsilon\le 1$ 。

证明：先来验证 $\delta(\varepsilon)\ge c_p$。对任意的 $\{x_n\}\subset \mathrm{ces}_p$，$\|x_n\|=1$，满足 $x_n\xrightarrow{w}0$，$(n\to\infty)$，$x\in\mathrm{ces}_p$，$\|x\|=\varepsilon$。由范数的绝对连续性，$\forall\eta>0\left(\eta<\frac{\varepsilon}{5}\right)$，$\exists k_1\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right)^p<\eta \tag{1}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{k_1}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right)^p\ge\varepsilon-\eta \tag{2}$$

由 $x_n\xrightarrow{w}0\ (n\to\infty)$ 知 $\forall i\in\mathbb{N}$ 有 $x_n(i)\to 0$，$(n\to\infty)$，于是对上述 $\eta>0,\ \exists k_2\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{k=1}^{k_2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p}\right)^p<\eta \tag{3}$$

可见取 $k_0=\max\{k_1,k_2\}$ 时，(1)(2)(3)同时成立。因为 $\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right\}\in l_p$，$\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p}\right\}\in l_p$，$\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right\}\in l_p$，所以 $\forall\zeta>0\ (\zeta<\eta)$，$n$ 充分大时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p-\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right)^p\right|<\zeta$$

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p-\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p}\right)^p\right|<\zeta$$

进而得到

$$\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p>\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right)^p-\zeta \tag{4}$$

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p>\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p}\right)^p-\zeta \tag{5}$$

结合(4)(5)有

$$\left\|\frac{x_n+x}{c_p}\right\|^p=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right]^p=\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+x(i)|}{c_p}\right)^p$$

$$>\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_p}\right)^p-\zeta+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p}\right)^p-\zeta>1+\varepsilon-4\zeta>1+\varepsilon-4\eta>1$$

于是 $\|x_n+x\|\ge c_p$，这就验证了 $\delta(\varepsilon)\ge c_p$。

再验证 $\delta(\varepsilon)\ge c_p$。由 c_p 的表达式，$\forall\zeta>0,\ \ \exists x,\ \ y\in\mathrm{ces}_p, \|x\|=1,\ \|y\|=\varepsilon$，使得

$$c_{xy}-\zeta<c_p$$

令

$$y_0=\left(0,y(1),0,y(2),0,y(3)\cdots\right),\quad x_1=\left(x(1),0,x(2),0,x(3),0\cdots\right),\quad x_2=\left(0,x(1),0,x(2),0,0,x(3),0\cdots\right)$$

如此进行下去得到 $\{x_n\}\subset\mathrm{ces}_p,\ y_0\in\mathrm{ces}_p$，满足 $\|x_n\|=1,\ \|y_0\|=\varepsilon$，$x_n\xrightarrow{w}0\ (n\to\infty)$，从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)+y_0(i)|}{c_p+\zeta}\right)^p\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_p+\zeta}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y_0(i)|}{c_p+\zeta}\right)^p$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_{xy}}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y_0(i)|}{c_{xy}}\right)^p\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x(i)|}{c_{xy}}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y(i)|}{c_{xy}}\right)^p=1$$

令 $\zeta\to0$ 知 $\|x_n+y_0\|\le c_p$，也就验证了 $\delta(\varepsilon)\le c_p$，于是 $\delta(\varepsilon)=c_p$ 得证。

结论 2：Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 具有一致 Opial 性质。

证明：由 c_p 的表达式知 $c_{xy}>1$，于是 $c_p\ge1$。假设 Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 中 $c_p=1$，则 $\forall\eta>0$，存在 $x,y\in\mathrm{ces}_p$，满足 $\|x\|=1,\ \|y\|^p=\varepsilon^p$，使得

$$c_p+\eta=1+\eta>c_{xy}$$

对于 $\eta_n\to0(0<\eta_n<1)$，存在 $x_n,y_n\in\mathrm{ces}_p$，$\|x_n\|=1,\|y_n\|^p=\varepsilon^p$，使得

$$1+\eta_n>c_{xy}$$

因为 $\|y\|^p=\varepsilon^p$，所以

$$\left\|\frac{y_n}{1+\eta_n}\right\|^p=\frac{\varepsilon^p}{1+\eta_n}>\frac{\varepsilon^p}{2}$$

从而得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y_n(i)|}{1+\eta_n}\right)^p>\frac{\varepsilon^p}{2}>0$$

令 $\eta_n\to0(0<\eta_n<1)$，则有 $\left\|\dfrac{x_n}{1+\eta_n}\right\|\to1$。于是当 n 充分大时总可以做到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{1+\eta_n}\right)^p>1-\frac{\varepsilon^p}{4}$$

于是

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{c_{x_ny_n}}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y_n(i)|}{c_{x_ny_n}}\right)^p>\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_n(i)|}{1+\eta_n}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|y_n(i)|}{1+\eta_n}\right)^p>1-\frac{\varepsilon^p}{4}+\frac{\varepsilon^p}{2}=1+\frac{\varepsilon^p}{4}>1$$

矛盾，从而 $c_p>1$，这就证明了 Cesaro 序列空间 $\mathrm{ces}_p(1<p<\infty)$ 具有一致 Opial 性质。

关于 Cesaro 矢值序列空间 $\mathrm{ces}_p(E)$，乃至于矢值序列空间 $ss(E)$ 的 Opial 模的讨论及计算，相应的 Cesaro 函数空间的有关性质及数字指标的计算，还需要进一步的研究工作。

参考文献 (References)

[1] 刘郁强, 吴博儿, 李秉彝. 序列空间方法[M]. 广州: 广东科技出版社, 1996: 120-388.
[2] 俞鑫泰, 张文耀. 关于 Banach-Saks 性质[J]. 数学学报, 1987, 30(6): 753-756.
[3] 刘郁强. Cesaro 矢值序列空间[J]. 数学杂志, 1989, 9(3): 253-260.
[4] Z. Opial. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73(4): 591-597.
[5] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984: 45-126.
[6] 王廷辅, 崔云安. Orlicz 序列空间的 Opial 性质[J]. 应用数学, 1996, 9(3): 392-394.
[7] 于非非, 崔云安. Orlicz 函数空间的依测度收敛的 Opial 性质[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2002, 19(1): 6-9.
[8] 于非非, 李君. 两种性质在矢值序列空间中的提升[J]. 天津理工大学学报, 2009, 25(3): 4-6.

