Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 1-4
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21001 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Replacement Lemma on Relative M-Characters*

Chenggong Hao, Ping Jin
School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan
Email: {haocg, jinping}@sxu.edu.cn
Received: Nov. 8th, 2011; revised: Dec. 10th, 2011; accepted: Dec. 13th, 2011

Abstract: The main goal of the present paper is to generalize the replacement lemma on M-characters to the relative M-characters. It is proved that if $L \le K$ are normal subgroups of a finite group G such that K/L is commutative of odd order, then every relative M-character of G with respect to L is also a relative M-character with respect to K. In particular, if G is an M-group with a meta-commutative normal subgroup K of odd order, then G is a relative M-group with respect to K.

Keywords: M-Character; M-Group; Relative M-Character; Relative M-Group; Meta-Commutative Group

相对 M-特征标的替换引理*

郝成功，靳 平
山西大学数学科学学院，太原
Email: {haocg, jinping}@sxu.edu.cn
收稿日期：2011 年 11 月 8 日；修回日期：2011 年 12 月 10 日；录用日期：2011 年 12 月 13 日

摘 要：本文主要目的是将 M-特征标的替换引理推广到相对 M-特征标的情形，证明了如果 $L \le K$ 均为有限群 G 的正规子群使得 K/L 为奇数阶交换群，则 G 的每个关于 L 的相对 M-特征标也是关于 K 的相对 M-特征标。特别地，如果 G 为 M-群且 K 为 G 的一个奇数阶亚交换正规子群，则 G 也是关于 K 的相对 M-群。

关键词：M-特征标；M-群；相对 M-特征标；相对 M-群；亚交换群

1. 引言

本文所讨论的群均为有限群，特征标定义在复数域上，所使用的符号及术语均按文献[1]。特别地，对任意群 G，记 Irr(G)为其所有不可约特征标的集合。如果 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 可从某个子群的线性特征标来诱导，即 $\chi = \lambda^G$，其中 $H \le G$ 且 $\lambda \in \mathrm{Irr}(H)$ 为线性特征标，则称 χ 为 G 的一个 M-特征标。进而，如果 G 的每个不可约特征标均为 M-特征标，则称 G 为一个 M-群。

熟知 M-群是可解群的一个重要群类，包含了很多难题和猜想。例如，关于 M-群的一个著名的公开问题是：奇数阶 M-群的正规子群是否仍为 M-群？目前最新的进展是 Loukaki 证明了当 $|G|$ 仅含两个素因子时，该猜想成立，见文献[2,3]。

事实上，在 M-群的研究中，最主要的困难是难以控制 M-特征标 χ 的“诱导过程”，即上述子群 H 在群 G 中的位置很难确定。为此，人们经常使用的是一个替换技术(见文献[4]中引理 4.1)，其意义在于可将 M-特征标 χ

*资助信息：国家自然科学基金资助(11171194)。

的线性诱导放在一个指定的交换正规子群的上方。

定理 A (M-特征标的替换引理) 设 G 为群，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，使得 $\chi = \lambda^{G}$，其中 $H \le G$ 且 $\lambda \in \mathrm{Irr}(H)$ 为线性特征标。如果 A 为 G 的一个交换正规子群，则存在 G 的子群 H_1 和线性特征标 $\lambda_1 \in \mathrm{Irr}(H_1)$，使得 $\chi = \lambda_1^{G}$ 且 $H_1 \ge A$，即可将 M-特征标 χ 的线性诱导过程从 H 替换为 H_1。

另一方面，相对 M-特征标的技术也大量出现在 M-群的研究中。固定群 G 的一个正规子群 L，称 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 为 G 的一个关于 L 的相对 M-特征标，如果存在 G 的子群 H 包含 L，以及某个 $\xi \in \mathrm{Irr}(H)$，使得 $\xi^{G} = \chi$ 且 $\xi_L \in \mathrm{Irr}(L)$。进而，如果每个 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 均为关于 L 的相对 M-特征标，则称 G 为关于 L 的相对 M-群。

从定义不难看出 M-特征标恰为关于平凡子群{1}的相对 M-特征标。当 A 是 G 的一个交换正规子群时，则上述替换引理表明 M-特征标亦可等同于关于 A 的相对 M-特征标。特别地，我们有 G 为 M-群当且仅当其为关于 A 的相对 M-群。有关相对 M-特征标和相对 M-群的更多性质，可参考文献[1]。

类似地，为了控制相对 M-特征标的诱导过程，我们猜想下述关于相对 M-特征标的替换引理仍然成立。

猜想 B (相对 M-特征标的替换引理) 设 L 为群 G 的一个正规子群，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 为关于 L 的相对 M-特征标。如果 K 也是 G 的正规子群，使得 $L \le K$ 且 K/L 为交换群，则 χ 为关于 K 的相对 M-特征标。

在上述猜想 B 中，取 L = {1}即得定理 A，由此表明相对 M-特征标的替换引理包含了通常 M-特征标的替换引理。

本文主要结果是在“扩张条件”(即 χ_L 有一个不可约分量可扩张到 K 上)和“奇数条件”(即 K/L 为奇数阶群)下，分别证明了上述猜想 B 都是成立的。作为应用，我们得到了一个 M-群何时又是相对 M-群的条件。

2. 预备

我们首先需要可扩张的特征标的一个基本性质。

引理 1 设 N 是群 G 的一个正规子群，使得 G/N 为交换群。如果 $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ 可扩张到 G 上，则其上方的每个特征标 $\alpha \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$ 均为 θ 的扩张。

证明： 设 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 为 θ 的一个扩张，根据 Gallagher 定理(见文献[1]推论 6.17)，则任意 $\alpha \in \mathrm{Irr}(G|\theta)$ 均形如 $\alpha = \lambda\chi$，其中 λ 为 G/N 的线性特征标，此时 $\alpha_N = \lambda_N \chi_N = \chi_N = \theta$，即 α 为 θ 到 G 的一个扩张。证毕。

下述为特征标“上升定理”的一个等价表述。

引理 2： 设 K/L 为 G 的一个 Abel 主因子，$\varphi \in \mathrm{Irr}(L)$，满足 $G = I_G(\varphi)K$，则下述之一成立：

1) φ^{K} 不可约。

2) φ 可扩张到 K 上。

3) φ 关于 K/L 完全分歧，即 $\varphi^{K} = e\theta$，其中 $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ 且 $e^2 = |K:L|$。

证明： 见文献[1]习题 6.12，证毕。

最后，我们还需要一个有关 Isaacs 特征标五元组的结果。

引理 3： 设 $(G, K, L, \theta, \varphi)$ 为一个特征标五元组，即 $L \le K$ 均为群 G 的正规子群，使得 K/L 为交换群，$\varphi \in \mathrm{Irr}(L)$ 和 $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$ 均为 G-不变的，并且 φ 和 θ 关于 K/L 为完全分歧的，亦即 $\varphi^{K} = e\theta$ 且 $e^2 = |K:L|$。如果 $|K:L| > 1$ 为奇数，K/L 为 G 的主因子，并且存在子群 H 满足 $HK = G$ 和 $H \cap K = L$，则对任意 $\xi \in \mathrm{Irr}(H|\theta)$，$\xi^{G}$ 可约。

证明： 文献[5]定理 9.1 的直接推论。一个较为简洁的证明见文献[6]推论 1.5，证毕。

3. 主要结果

我们首先在特征标的扩张条件下，证明猜想 B 是成立的。

定理 1： 设 $L \le K$ 均为群 G 的正规子群，K/L 为交换群，并且 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 为关于 L 的相对 M-特征标。如果 χ 在 L 上的限制 χ_L 有一个不可约分量 $\varphi \in \mathrm{Irr}(L)$ 可扩张到 K 上，则 χ 也是关于 K 的相对 M-特征标。

证明：根据相对 M-特征标的定义，存在 G 的子群 H 包含 L，以及某个 $\xi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{H})$ 使得 $\xi^G = \chi$ 且 $\xi_L \in \mathrm{Irr}(\mathrm{L})$。从 Clifford 定理可知 χ 在 L 上的限制 χ_L 的所有不可约分量(显然包含 ξ_L)均和 φ 共轭，而 K 是 G 的正规子群，故这些不可约分量都能扩张到 K 上。简单计，不妨记 $\varphi = \xi_L$，设 $X = \mathrm{KH}$ 和 $Y = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$，令 $\psi = \xi^X$，则 $\psi^G = \xi^G = \chi$，表明 $\psi \in \mathrm{Irr}(X)$。再令 $\rho = \xi_Y$，从 $\rho_L = \xi_L = \varphi$ 不可约，可知 $\rho \in \mathrm{Irr}(Y)$，并且存在某个 $\theta \in Irr(K)$ 既在 ψ 的下方，同时又在 ρ 的上方。因为 K/L 为交换群，并且 θ 也在 φ 的上方，根据引理 1，可知 θ 亦为 φ 的扩张，导致 θ_Y 不可约，只有 $\theta_Y = \rho$。

令 $T = I_X(\theta)$ 为 θ 在 X 中的惯性群，设 $\sigma \in \mathrm{Irr}(T)$ 为 ψ 关于 θ 的 Clifford 对应，即 σ 在 θ 的上方，并且 $\sigma^X = \psi$。此时 $\left(\xi^X\right)_K = \left(\xi_Y\right)^K$，再应用 Clifford 定理计算内积得到

$$[\sigma_K, \theta] = [\psi_K, \theta] = [(\xi^X)_K, \theta] = [(\xi_Y)^K, \theta] = [\rho^K, \theta] = [\rho, \theta_Y] = 1,$$

迫使 $\sigma_K = \theta$。但 $\sigma^G = \left(\sigma^X\right)^G = \psi^G = \chi$，故 χ 为关于 K 的相对 M-特征标，证毕。

在定理 1 中取 L = {1}，则可推出定理 A，表明 M-特征标的替换引理本身即蕴含着“扩张条件”。此外，在下述“奇数条件”下，使用定理 1 可证明猜想 B 仍然成立。

定理 2: 设 $\mathrm{L} \le \mathrm{K}$ 均为群 G 的正规子群，K/L 为交换群，并且 $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ 为关于 L 的相对 M-特征标。如果 $|\mathrm{K}:\mathrm{L}|$ 为奇数，则 χ 也是关于 K 的相对 M-特征标。

证明：因为 χ 是关于 L 的相对 M-特征标，从定义可知存在 G 的子群 $\mathrm{H} \ge \mathrm{L}$ 以及某个 $\xi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{H})$ 使得 $\xi^G = \chi$ 且 $\xi_L \in \mathrm{Irr}(\mathrm{L})$。记 $\varphi = \xi_L$，我们分以下三步完成证明。

1) 可进一步假设 $\mathrm{KH} = \mathrm{G}$ 且 $\mathrm{K} \cap \mathrm{H} = \mathrm{L}$。

事实上，我们令 $X = \mathrm{KH}$ 和 $Y = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$，再设 $\psi = \xi^X$，则 $\psi^G = \xi^G = \chi$。注意到 $\left(\xi_Y\right)_L = \xi_L = \varphi$ 不可约，故 ξ_Y 也不可约，表明 $\psi \in \mathrm{Irr}(X)$ 也是关于 Y 的相对 M-特征标。又因为 K/L 为交换群，而 $\mathrm{L} \le Y \le \mathrm{K}$，故 Y 在 K 中正规。但 $Y = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$ 显然在 H 中正规，故 Y 必然也在 $X = \mathrm{KH}$ 中正规。此时 $|\mathrm{K}:\mathrm{Y}|$ 亦为奇数，因此，如果我们能证明 ψ 是关于 K 的相对 M-特征标，即存在子群 J 和 $\delta \in \mathrm{Irr}(J)$，满足 $\mathrm{K} \le J \le X$ 且 $\delta_K \in \mathrm{Irr}(\mathrm{K})$ 及 $\delta^X = \psi$，则 $\delta^G = \left(\delta^X\right)^G = \psi^G = \chi$，表明 χ 也是关于 K 的相对 M-特征标，即所证结论成立。所以，为简化记法，我们可将 X 和 Y 分别用原先的 G 和 L 替代，即进一步假设 G $= X = \mathrm{KH}$ 且 $\mathrm{L} = Y = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$。

2) 可假设 K/L 为 G 的一个主因子。

我们对 $|\mathrm{K}:\mathrm{L}|$ 做归纳。当 K = L 时，所证结论显然成立。假设 K/L 不是 G 的主因子，则存在 G 的正规子群 N，使得 L < N < K。此时 $|\mathrm{N}:\mathrm{L}| < |\mathrm{K}:\mathrm{L}|$，并且 $|\mathrm{N}:\mathrm{L}|$ 仍为奇数，故由归纳假设可知 χ 是关于 N 的相对 M-特征标。接着，从 $|\mathrm{K}:\mathrm{N}| < |\mathrm{K}:\mathrm{L}|$ 仍为奇数，再次使用归纳假设即可推出 χ 也是关于 K 的相对 M-特征标，故所证结论成立。因此，为证本定理，我们可进一步假设 K/L 为 G 的一个主因子。

3) 使用特征标的上升定理完成证明。

因为 $\varphi = \xi_L$，即 φ 可扩张到 H 上，故 φ 必然是 H-不变的，表明 $\mathrm{H} \le I_\mathrm{G}(\varphi)$。再从结论(1)中的 KH = G 可知 $I_\mathrm{G}(\varphi)\mathrm{K} = \mathrm{G}$，结合(2)及特征标的上升定理(即本文引理 2)，则出现下述三种情形之一：

a) φ 可扩张到 K 上。在此情形下，使用定理 1 即得所证。

b) φ^K 不可约。此时使用结论(1)，则 $\chi_K = \left(\xi^G\right)_K = \left(\xi_L\right)^K = \varphi^K$，故 χ_K 亦不可约，从而 χ 即为关于 K 的相对 M-特征标，表明所证结论成立。

c) φ 关于 K/L 完全分歧，即 $\varphi^K = e\theta$，其中 $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathrm{K})$ 且 $e^2 = |\mathrm{K}:\mathrm{L}|$。此时 $(\mathrm{G}, \mathrm{K}, \mathrm{L}, \theta, \varphi)$ 恰为一个 Isaacs 意义下的特征标五元组。由于 $|\mathrm{K}:\mathrm{L}| > 1$ 为奇数，故从引理 3 推出 $\xi^G = \chi$ 可约，该矛盾表明这个完全分歧的情形不能出现。证毕。

在研究 M-特征标时，在很多约化情形可出现一个类 2 幂零的正规子群(特别是正规的超特殊 p-子群)，这类子群显然都是亚交换群。作为定理 2 的一个应用，我们有：

定理 3: 设 K 为群 G 的一个亚交换的奇数阶正规子群，则 G 的每个 M-特征标均为关于 K 的相对 M-特征标。特别地，如果 G 为 M-群，则 G 也是关于 K 的相对 M-群。

证明：因为 K 亚交换，故 K 的导群 K'是交换群。令 $L = K'$，任取 χ 为 G 的一个 M-特征标。由于 L 为 G 的交换正规子群，从定理 A 可知 χ 也是关于 L 的相对 M-特征标。但 K/L 为奇数阶交换群，再使用定理 2，即可推出 χ 亦为关于 K 的相对 M-特征标。证毕。

4. 致谢

本文作者衷心感谢国家自然科学基金(11171194)的资助及审稿人所提出的宝贵建议。

参考文献 (References)

[1] I. M. Isaacs. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.
[2] M. Loukaki. Extendible characters and monomial groups of odd order. Journal of Algebra, 2006, 299(2): 778-819.
[3] M. L. Lewis. *M*-groups of order p^aq^b: A theorem of Loukaki. Journal of Algebra and Its Applications, 2006, 5(4): 465-503.
[4] E. C. Dade. Momomial characters and normal subgroups. Maths Zone, 1981, 178(1): 401-420.
[5] I. M. Isaacs. Characters of solvable and symplectic groups. American Journal of Mathematics, 1973, 95(3): 594-635.
[6] I. M. Isaacs. On the character theory of fully ramified sections. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1983, 13(4): 689-698.