Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 39-44
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21008 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Preconditioned Diagonally Dominant Properties of *H*-Matrix

Xuezhong Wang, Xiaomei Li
School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye
Email: xuezhongwang77@126.com
Received: Nov. 28th, 2011; revised: Dec. 27th, 2011; accepted: Dec. 30th, 2011

Abstract: It is well-known that most iterative methods converge for linear system whose coefficient matrix $\boldsymbol{A}$ is strictly diagonally dominant. When $\boldsymbol{A}$ is not diagonally dominant, preconditioned techniques can be employed. This paper presents a method to establish appropriate preconditioned matrices $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ for transforming an $\boldsymbol{H}$-matrix which is non-diagonally dominant matrix into the diagonally dominant matrix. Numerical examples also show the effectiveness of this method.

Keywords: Iterative Method; ***H***-Matrix; Preconditioned Matrix; Diagonally Dominant Properties

H-矩阵的预条件对角占优性

王学忠，李晓梅
河西学院，数学与统计学院，张掖
Email: xuezhongwang77@126.com
收稿日期：2011 年 11 月 28 日；修回日期：2011 年 12 月 27 日；录用日期：2011 年 12 月 30 日

摘　要：对于线性方程组 $\boldsymbol{A}x=b$，当 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵时大部分迭代法都收敛。当 $\boldsymbol{A}$ 不是对角占优矩阵时，预条件技术常被采用。本文给出了一种选取预条件矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的方法，把一个非对角占优的 $\boldsymbol{H}$-矩阵转化为严格对角占优矩阵。数值例子也说明了该方法的有效性。

关键词：迭代法；***H***-矩阵；预条件矩阵；对角占优性

1. 引言

对于给定的线性方程组

$$\boldsymbol{A}x=b \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$ 和 $b\in R^n$ 已知， $x\in R^n$ 未知。当用迭代法求解时迭代格式为

$$x^{(k)}=\boldsymbol{G}x^{(k-1)}+c,\ \ k=1,2,\cdots$$

其中 $\boldsymbol{G}\in R^{n\times n}$ 称为迭代矩阵， $x^{(0)}\in R^n$ 称为初值[1]。

$\boldsymbol{A}=M-N$， M 非奇被称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个分裂，对 $\boldsymbol{A}$ 进行不同的分裂可得到经典的 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法，SOR $(0<\omega\le 1)$ 迭代法，AOR 迭代法以及它们的变形。当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵时，这些迭代法都收敛，而且系数矩阵的对角占优性越强时，迭代法的收敛速度越快。但是，在实际问题中

我们所遇到的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定是严格对角占优的。*H*-矩阵作为实际应用中常见的一种矩阵，它不一定对角占优，因此，对原方程组进行预条件等价变形，把非对角占优矩阵转化为对角占优矩阵便显得十分重要。例如，我们可以找两个非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 严格对角占优，这样便把解 $Ax=b$ 的问题转化为解其同解问题

$$\boldsymbol{PAQ}y = Pb \tag{2}$$

和

$$x = \boldsymbol{Q}y \tag{3}$$

因此，找到好的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 便成为问题的关键，这里 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 被称为预条件矩阵。

本文主要考虑了当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 *H*-矩阵时，怎样建立适当的预条件矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 严格对角占优。

2. 预备知识

定义 1[2,3]：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)\in Z^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 $\boldsymbol{A}=sI-B$，其中 $B\ge 0$，则当 $s>\rho\left(B\right)$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的 *M*-矩阵，简称 *M*-矩阵，这里 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径，$\boldsymbol{Z}^{n\times n}$ 表示 n 阶 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。

定义 2[4]：$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 *H*-矩阵，如果它的比较矩阵 $\langle \boldsymbol{A}\rangle=\left(m_{ij}\right)$ 是一个 *M*-矩阵，这里 $m_{ii}=\left|a_{ii}\right|$，$m_{ij}=-\left|a_{ij}\right|\left(i\ne j\right)$。

定义 3[3]：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\left|a_{ii}\right|\ge \sum\nolimits_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

且至少有一个 i 使上述不等式严格成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 为弱严格对角占优矩阵；如果上述 n 个不等式都严格成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵。

定义 4[3]：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}\left(\boldsymbol{QA}\right)$ 为行(列)严格对角占优矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行(列)广义对角占优矩阵。

引理 1[4]：$\boldsymbol{A}$ 是 *H*-矩阵的充要条件是存在 $r>0$ 使 $\langle \boldsymbol{A}\rangle r>0$，其中 $r=\left(r_1,r_2,\cdots,r_n\right)^T$。

引理 2[5]：$\boldsymbol{A}$ 是对角元全为 1 的 *H*-矩阵，若 $\langle \boldsymbol{A}\rangle^{-1}=\left(m_{ij}\right)$，则成立不等式

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} m_{ij}\ge 1,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

3. 主要结论

若 $\boldsymbol{A}$ 是对角元全为 1 的 *H*-矩阵，我们考虑如下预条件矩阵 $\boldsymbol{P}_\alpha\in R^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{Q}\in R^{n\times n}$，

$$\boldsymbol{P}_\alpha=I+S(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & & & -\alpha_1 a_{1s} & & \\ & 1 & & & -\alpha_2 a_{2t} & \\ & & \ddots & & & \\ & -\alpha_r a_{rm} & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & -\alpha_n a_{nr} & & & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\left(r_1,r_2,\cdots,r_n\right)>0$$

其中 $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 是参数，$\boldsymbol{r}=\left(r_1,r_2,\cdots,r_n\right)^T$ 是使得 $\langle \boldsymbol{A}\rangle r>0$ 的正向量。

定理 1：若 $\boldsymbol{A}$ 是对角元全为 1 的 *H*-矩阵，假设存在一个正的向量 $\boldsymbol{r}=\left(r_1,r_2,\cdots,r_n\right)^T$ 使得 $\langle \boldsymbol{A}\rangle r$>0 让

$$c=\frac{\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i+2\left|a_{im}\right|r_m}{\left|a_{im}\right|\left[2r_m-\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_m\right]}$$

那么 $c>1$。

证明： 由 $\langle \boldsymbol{A}\rangle \le I$，及 $r>0$ 知，$r \ge \langle \boldsymbol{A}\rangle r$，因而

$$c=\frac{\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i+2|a_{im}|r_m}{|a_{im}|\left[2r_m-\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_m\right]}>\frac{\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i+2|a_{im}|r_m}{2|a_{im}|r_m}>1.$$

定理 2： $\boldsymbol{A}$ 是对角元全为 1 的 ***H*-**矩阵，假设存在一个正向量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$，使得 $\langle \boldsymbol{A}\rangle r>0$，如果满足条件 $0\le \alpha_i \le c$，那么，$\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}$ 是 ***H*-**矩阵，并且 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 是严格对角占优矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数。

证明： 让

$$\left(\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\right)_{ij}=a_{ij}-\alpha_i a_{im}a_{mj},\ i,j=1,2,\cdots,n,\ m=r,s,\cdots,t,$$

取 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$，则

$$\begin{aligned}\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i&=|1-\alpha_i a_{im}a_{mi}|r_i-|a_{im}-\alpha_i a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}-\alpha_i a_{im}a_{mj}|r_j\\&\ge r_i-|\alpha_i a_{im}a_{mi}|r_i-|1-\alpha_i||a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}|r_j-\sum_{j\ne i,m}|\alpha_i a_{im}a_{mj}|r_j\end{aligned}$$

1) 当 $\alpha_i\le 1$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i&\ge r_i-\alpha_i|a_{im}||a_{mi}|r_i-|a_{im}|r_m+\alpha_i|a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}|r_j-\alpha_i|a_{im}|\sum_{j\ne i,m}|a_{mj}|r_j\\&=r_i-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|r_j+\alpha_i|a_{im}|\left(r_m-\sum_{j\ne i}|a_{mj}|r_j\right)=\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i+\alpha_i|a_{im}|\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_m>0\end{aligned}$$

2) 当 $1\le\alpha_i\le c$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i&\ge r_i-\alpha_i|a_{im}||a_{mi}|r_i+|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}|r_j-\alpha_i|a_{im}|\sum_{j\ne i,m}|a_{mj}|r_j\\&=r_i-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|r_j+2|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|\left(-r_m+\sum_{j\ne i}|a_{mj}|r_j+2r_m\right)\\&=\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i+2|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|\left[2r_m-\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_m\right]>0\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}$ 是 ***H*-**矩阵，并且 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 是严格对角占优矩阵。

从上面的定理 2，我们可以看出，只要存在一个正向量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$，使得 $0<\left(\langle \boldsymbol{A}\rangle \boldsymbol{r}\right)_i\le 2,\ i=1,2,\cdots,n$，那么结论就是成立的，但在具体的应用过程中，我们很难确定 $\boldsymbol{r}$ 数值，从而给应用带来不便，因此可考虑 $\boldsymbol{r}$ 取特殊值来避免此不便。现对 $\boldsymbol{r}$ 取特殊值为

$$r=\langle \boldsymbol{A}\rangle^{-1}e>0,\ e=(1,1,\cdots,1)^T,\ \boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(r)$$

可得下面的定理。

推论 1： $\boldsymbol{A}$ 是对角元全为 1 的 ***H*-**矩阵，让 $r=\langle \boldsymbol{A}\rangle^{-1}e>0,\ e=(1,1,\cdots,1)^T$ 和 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(r)$，如果

$$\alpha_i\le\frac{1+2|a_{im}|r_m}{|a_{im}|(2r_m-1)},\ i=1,2,\cdots,n,\ m=r,s,\cdots,t$$

那么，$\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}$ 是 ***H*-**矩阵，并且 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 是严格对角占优矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数。

定理 3： 如果 $0<\alpha_i\le\dfrac{2|a_{im}|r_m}{|a_{im}|(2r_m-1)}$，那么 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 是比 $\boldsymbol{AQ}$ 对角占优性更强的矩阵。

证明 显然 $\frac{2|a_{im}|r_m}{|a_{im}|(2r_m-1)}>1$，只需表明

$\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i \ge \left(\langle \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i = 1,\ i=1,2,\cdots,n$ 即可，

1) 当 $\alpha_i \le 1$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i &\ge r_i-\alpha_i|a_{im}||a_{mi}|r_i-|a_{im}|r_m+\alpha_i|a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}|r_j-\alpha_i|a_{im}|\sum_{j\ne i,m}|a_{mj}|r_j\\ &=r_i-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|r_j+\alpha_i|a_{im}|\left(r_m-\sum_{j\ne i}|a_{mj}|r_j\right)\\ &=1+\alpha_i|a_{im}|\ge 1\end{aligned}$$

2) 当 $1<\alpha_i\le\frac{2|a_{im}|r_m}{|a_{im}|(2r_m-1)}$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\langle \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\rangle r\right)_i &\ge r_i-\alpha_i|a_{im}||a_{mi}|r_i+|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|r_m-\sum_{j\ne i,m}|a_{ij}|r_j-\alpha_i|a_{im}|\sum_{j\ne i,m}|a_{mj}|r_j\\ &=r_i-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|r_j+2|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|\left(-r_m+\sum_{j\ne i}|a_{mj}|r_j+2r_m\right)\\ &=1+2|a_{im}|r_m-\alpha_i|a_{im}|\left[2r_m-1\right]\ge 1\end{aligned}$$

4. 数值例子

例 1：特别地，对 $r=s=m=t=1$，我们运用定理 2 的结论，对下面的测试矩阵去建立对角占优矩阵。取 ***H***-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.1000 & -0.2000 & 0.1000\\ -0.9000 & 1 & 0.7000 & -0.8000\\ 0.1000 & -0.1000 & 1 & 0.3000\\ 0.3000 & -0.5000 & 0.2000 & 1\end{pmatrix}$$

运用预条件矩阵 $\boldsymbol{P}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{Q}$，其中

$$\boldsymbol{P}_\alpha=\begin{pmatrix}0.9700 & 0 & 0 & 0\\ -0.0270 & 1 & 0 & 0\\ -0.0300 & 0 & 1 & 0\\ -0.0300 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(r)$， $r=\langle \boldsymbol{A}\rangle^{-1}e>0,\ e=(1,1,\cdots,1)^T$，即

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}16.4275 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 66.1832 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 22.3053 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 43.4809\end{pmatrix}$$

得到

$$\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}15.9347 & 6.4198 & -4.3272 & 4.2176\\ -15.2283 & 66.0045 & 15.7342 & -34.9021\\ 1.1499 & -6.8169 & 22.4391 & 12.9138\\ 4.4354 & -33.2901 & 4.5949 & 43.3505\end{pmatrix}$$

很明显 $\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{AQ}$ 是严格对角占优矩阵。

例 2：对任意给定的 $m=r,s,\cdots,t$，给出定理 2 的数值例子。取 ***H***-矩阵 ***A*** 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -0.1000 & 0.2000 & -0.1000 \\ -0.9000 & 1 & -0.7000 & 0.8000 \\ 0.1000 & -0.1000 & 1 & -0.3000 \\ 0.3000 & -0.5000 & -0.2000 & 1 \end{pmatrix}$$

运用预条件矩阵 $\boldsymbol{P}_{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，其中

$$\boldsymbol{P}_{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 0.0070 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0080 \\ -0.0300 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0200 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}$ 同例 1，得到

$$\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix} 16.3240 & -6.1550 & 4.3518 & -4.1046 \\ -14.8242 & 66.4479 & -15.5780 & 34.4369 \\ 1.1499 & -6.4198 & 22.1715 & -12.9138 \\ 4.9611 & -33.2240 & -4.0150 & 43.2200 \end{pmatrix}$$

很明显 $\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{AQ}$ 是严格对角占优矩阵。

例 3：考虑如下 ***H***-矩阵 ***A***，下面对它测试了(2)的 Gauss-Seidel 迭代法，为了比较，同时也测试了(1)的 Gauss-Seidel 迭代法。取 ***H***-矩阵 ***A*** 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 & c_2 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_3 \\ c_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_2 \\ c_2 & c_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix}$$

其中，$c_1=-\dfrac{2}{n}$，$c_2=\dfrac{1}{(n+1)}$，$c_3=-\dfrac{1}{(n+1)}$，n 表示矩阵 ***A*** 的阶数。我们选择 b 使得(1)的解为 $x=(1,2,\cdots,n)^T$，让收敛准则为 $\dfrac{x^{k+1}-x^k}{x^{k+1}}\le 10^{-6}$，取初始迭代向量为 $\boldsymbol{x}_0=(0,0,\cdots,0)^T$，对 $n=4,10,16,25,49$ 分别进行测试。我们在下面的表格中表明了系数矩阵 ***A*** 和 $\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{AQ}$ 的 Gauss-Seidel 迭代的谱半径和迭代次数。在测试中，我们取预条件矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为推论 1 中的矩阵，取

$$\boldsymbol{P}_{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -c_1 \\ -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

让 $GS(\boldsymbol{A})$ 表示系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Gauss-Seidel 迭代，$GS\left(\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}\right)$ 表示系数矩阵 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 的 Gauss-Seidel 迭代。如下表 1：

Table 1. The spectral radius and iterative number
表 1. 谱半径和迭代次数

n	GS($\boldsymbol{A}$)		GS($\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$)	
	谱半径	迭代次数	谱半径	迭代次数
4	0.4293	17	0.0055	4
10	0.5235	20	0.2543	11
16	0.5659	22	0.4012	14
25	0.5990	23	0.4968	17
49	0.6339	24	0.5838	21

从表 1，我们可以看出系数矩阵为 $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{AQ}$ 的 Gauss-Seidel 迭代要好于系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的 Gauss-Seidel 迭代。这也说明了我们方法的有效性。

5. 总结

选取预条件矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 是严格对角占优矩阵的方式有很多种，本文给出了一种建立预条件矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的方法，并给出了相应的结论，数值例子也说明结论是正确的。

6. 致谢

作者由衷地感谢匿名的审稿人对本文提出的修改意见，这大大提高了原稿的质量。

参考文献 (References)

[1] 刑志栋, 曹建荣. 矩阵数值分析[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2005.
[2] 张凯院, 徐仲. 数值代数[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[3] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[4] 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[5] 王学忠, 黄廷祝, 李良等. ***H***-矩阵方程组的预条件迭代法[J]. 计算数学, 2007, 29(1): 89-96.