Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 103-109
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22017 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Long Time Behavior of Solution for Generalized BBM Equation in R^n*

Jincui Yin, Jianwen Zhang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan
Email: jincui_yin@hotmail.com, zhangjianwen@tyut.edu.cn

Received: Jan. 9th, 2012; revised: Jan. 23rd, 2012; accepted: Feb. 3rd, 2012

Abstract: The article presents the long time behavior of solution for the generalized BBM equation on unbounded domains R^n. First, the existence and unique of the solutions on unbounded domains R^n $(n > 1)$ was proved by the Galerkin method and the method of the domain approximate. Secondly, operator decomposition method and the compactness of the weighted norm as well as kuratowskii α-the non-compacted measure are applied to study the smooth property of the solution. Finally, the existence of the global attractor for the corresponding semi-group on unbounded domains $H^2(R^n)$ was proved.

Keywords: Unbounded Domain; The kuratowskii α-Non-Compact Measure; Operator Decomposition; Global Attractor

无界区域 R^n 上推广的 B-BBM 方程的长时间行为*

殷金翠，张建文

太原理工大学数学学院，太原
Email: jincui_yin@hotmail.com, zhangjianwen@tyut.edu.cn

收稿日期：2012 年 1 月 9 日；修回日期：2012 年 1 月 23 日；录用日期：2012 年 2 月 3 日

摘　要：本文研究了无界区域 R^n 上推广的 B-BBM 方程的长时间动力学行为。首先，利用 Galerkin 方法和对区域做极限的方法，验证了在无界区域 R^n $(n > 1)$上解的存在唯一性；其次，通过算子分解技巧和加权范数的紧性以及 kuratowskii α-非紧测度，讨论了解的渐近光滑性；最后得到了该方程在无界区域 $H^2(R^n)$ 上整体吸引子的存在性。

关键词：无界区域； kuratowskii α-非紧测度；算子分解；整体吸引子

1. 引言

BBM 方程是一类重要的非线性发展方程，它最初起源于 Benjamin、Bona、Mahony 在水波研究中建立的模型

$$\dot{u} + uu^{(1)} - \beta\dot{u}^{(2)} = 0$$

如果考虑粘性和耗散作用(如湍流)，则对应的模型方程推广为文献[1]中的 Burgurs-BBM 方程，

$$\dot{u} + uu^{(1)} - \mu u^{(2)} - \beta\dot{u}^{(2)} + \gamma\Delta^2 u = 0.$$

*资助信息：国家自然科学基金(批准号：11172194)，山西省自然科学基金(批准号：2010011008)，山西省青年科技研究基金(批准号：2011021002-2)资助。

文献[2]中证明了如下有阻尼的 GBBM 方程的整体和指数吸引子的存在性，

$$\dot{u}-\alpha\Delta\dot{u}-b\Delta u+\nabla F(u)+\gamma u=h(x).$$

本文考虑无界区域 $R^n\,(n\ge 1)$ 上推广的 B-BBM 方程的初值问题

$$\dot{u}-\alpha\Delta\dot{u}+\Delta^2 u-\beta\Delta u+\gamma u+\bar{\nabla}F(u)=h(x),\qquad x\in R^n, t\in R^+; \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x).\qquad x\in R^n. \tag{2}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)^T$，$u(x,t)$ 表示关于空间变量 x 和时间变量 t 的实值函数。常数 $\alpha,\beta,\gamma>0$，Δ 为 n 维 Laplace 算子。u_0，h 为给定函数。$\dot{u}$ 表示 u 关于 t 的一阶导数。

$\boldsymbol{F}(u)$ 为 u 的实值向量函数。$\boldsymbol{F}(u)=(\boldsymbol{F}_1(u)\cdots,\boldsymbol{F}_n(u))$，定义 $\bar{\nabla}\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_i}$ 且满足[2]：

(A_1) $\boldsymbol{F}_i(0)=0, i=1,2,\cdots n$。

(A_2) $\boldsymbol{F}_i, i=1,2,\cdots n$ 为二阶导数连续的函数，即 $\boldsymbol{F}_i\in C^2(R^n)$。

(A_3) $f_i(s)=\frac{d}{ds}F_i(s), i=1,2,\cdots n.$ f_i 满足：$f_i(0)=0,\left|f_i(s)\right|\le c\left|\left(1+|s|^m\right)\right|$。

当 $n\le 2$ 时，$0\le m<\infty$；当 $n\ge 3$ 时，$0\le m<\frac{2}{n-2}$。

记 $H^s(R^n)=H^{s,2}(R^n)$，用 $(u,v)=\int_{R^n}uv\mathrm{d}x$，$\|u\|=(u,v)^{1/2}$ 分别表示 $L^2(R^n)$ 中的内积和范数，$\|u\|_s=\left\|\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right\|$ 表示 $H^s(R^n)$ 中的范数。

2. 解的存在性

定理 2.1 设 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in H^2(R^n)$，$u_0\in H^2(R^n)$，则方程(1) (2)存在唯一解 $u(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2(R^n)\right)$，且有 $\dot{u}(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2(R^n)\right)$。

该定理利用 Galerkin 方法和对区域作极限的方法证明，在此不作详细陈述。

3. 有界吸收集的存在性

引理 3.1 假设 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in H^2(R^n)$，$u_0\in H^1(R^n)$，则方程(1)(2)的解 $u(t)\in L^\infty\left(R^+;H^1(R^n)\right)$，且 $\exists t_1(\rho_1)>0,\forall t>t_1(\rho_1)$ 时，有 $\|u\|^2+\alpha\|u\|_1^2\le E_1$。$E_1$ 及下文中的 $E_i(i=1,\cdots 5)$ 皆为常数。

证：用 u 与(1)式做内积得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|^2+\alpha\|u\|_1^2\right)+\beta\|u\|_1^2+\gamma\|u\|^2+\|u\|_2^2+\left(\bar{\nabla}F(u),u\right)=(h,u).$$

因为 $\left(\bar{\nabla}F(u),u\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(u),u\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i'(u),1\right)=0$，其中 $\phi_i(u)=\int_0^u f_i(s)\mathrm{d}s$。

则 $\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|^2+\alpha\|u\|_1^2\right)+\beta\|u\|_1^2+\gamma\|u\|^2+\|u\|_2^2\le\|h\|\|u\|\le\frac{\gamma}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\gamma}\|h\|^2$。

因为 $\|u\|_2^2>0$，取 $c_1=\min\left\{\gamma,\frac{2\beta}{\alpha}\right\}$，

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|^2+\alpha\|u\|_1^2\right)+c_1\left(\|u\|^2+\alpha\|u\|_1^2\right)\le\frac{1}{2\gamma}\|h\|^2.$$

由 Gronwall 引理得证。

引理 3.2 假设 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in H^2(R^n)$，$u_0\in H^2(R^n)$，则方程(1)(2)的解 $u(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2(R^n)\right)$，且 $\exists t_2(\rho_2)>0,\forall t>t_2(\rho_2)$ 时，有 $\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2\le E_2$。

证：用 $-\Delta u$ 与(1)做内积得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2\right)+\beta\|u\|_2^2+\gamma\|u\|_1^2+\|u\|_3^2-\left(\bar{\nabla}F(u),\Delta u\right)\le\|h\|\|u\|_2 . \tag{3}$$

因为

$$\left(\bar{\nabla}F(u),-\Delta u\right)\le\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}\left|f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||\Delta u|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}\left|f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x\|u\|_2\le c\|u\|_2\le\frac{\beta}{4}\|u\|_2^2 \text{ [2]}.$$

代入(3)式得

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2\right)+\gamma\|u\|_1^2+\frac{\beta}{2}\|u\|_2^2+\|u\|_3^2\le\frac{\beta}{4}\|u\|_2^2+\frac{1}{\beta}\|h\|^2+\frac{\beta}{4}\|u\|_2^2=\frac{\beta}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{\beta}\|h\|^2=:K_1 . \tag{4}$$

因为 $\|u\|_3^2\ge 0$，取 $c_2=\min\left\{2\gamma,\frac{\beta}{\alpha}\right\}$，

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2\right)+c_2\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2)\le c .$$

由 Gronwall 引理，得证。

引理 3.3 假设 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in H^2(R^n)$，$u_0\in H^2(R^n)$，则方程(1) (2)的解 $u(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2\left(R^n\right)\right)$，且 $\forall t>t_2(\rho_2)+1$ 时，有 $\|u\|_3^2\le E_3$。

证：用 $\Delta^2 u$ 与(1)做内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_2^2+\alpha\|u\|_3^2\right)+\beta\|u\|_3^2+\gamma\|u\|_2^2+\|u\|_4^2+\left(\bar{\nabla}F(u),\Delta^2 u\right)=\left(h,\Delta^2 u\right). \tag{5}$$

由引理 3.2

$$\left(\bar{\nabla}F(u),\Delta^2 u\right)\le\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}\left|f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\Delta^2 u\right|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}\left|f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x\|u\|_4\le c\|u\|_4\le\frac{1}{4}\|u\|_4^2 .$$

代入(5)式有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_2^2+\alpha\|u\|_3^2\right)+\beta\|u\|_3^2+\gamma\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u\|_4^2\le\frac{1}{2}\|h\|^2=:K_2 .$$

因为 $\|u\|_4^2\ge 0$，于是取 $c_3=\min\left\{\gamma,\frac{\beta}{\alpha}\right\}$，

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_2^2+\alpha\|u\|_3^2\right)+c_3\left(\|u\|_2^2+\alpha\|u\|_3^2\right)\le K_2 . \tag{6}$$

由(4)式得 $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_1^2+\alpha\|u\|_2^2\right)+\|u\|_3^2\le K_1$。积分上式得 $\|u(t+1)\|_1^2+\alpha\|u(t+1)\|_2^2+\int_t^{t+1}\|u(s)\|_3^2\,\mathrm{d}s\le K_1+\|u(t)\|_1^2+\alpha\|u(t)\|_2^2$。由引理 3.2 知，$\int_t^{t+1}\|u(s)\|_3^2\,\mathrm{d}s\le K_3$。对(6)使用一致 Gronwall 引理，得证。

引理 3.4 若引理 3.1 成立，则 $\dot{u}(t)\in L^\infty\left(R^+;H^1\left(R^n\right)\right)$ 且 $\|\dot{u}\|^2+\alpha\|\dot{u}\|_1^2\le E_4$。

证(1)式对 t 求导后，再与 $\dot{u}$ 做内积

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|\dot{u}\|^2+\alpha\|\dot{u}\|_1^2\right)+\beta\|\dot{u}\|_1^2+\gamma\|\dot{u}\|^2+\|\dot{u}\|_2^2+\left(\bar{\nabla}\dot{F}(u),\dot{u}\right)=0 .$$

因为

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}\dot{F}(u),\dot{u}\right)&=\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{f}_i(u)\dot{u}\frac{\partial u}{\partial x_i},\dot{u}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(u)\frac{\partial\dot{u}}{\partial x_i},\dot{u}\right)\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\dot{f}_i(u)\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|\right)\|\dot{u}\|^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|f_i(u)\right\|\left\|\frac{\partial\dot{u}}{\partial x_i}\right\|\right)\|\dot{u}\|\\&\le\sum_{i=1}^{n}\left\|\dot{f}_i(u)\right\|\|u\|_1\|\dot{u}\|^2+\sum_{i=1}^{n}\left\|f_i(u)\right\|\|\dot{u}\|_1\|\dot{u}\|\le c\|\dot{u}\|^2+c\|\dot{u}\|\|\dot{u}\|_1 .\end{aligned}$$

则 $\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|\dot{u}\|^2+\alpha\|\dot{u}\|_1^2\right)+\beta\|\dot{u}\|_1^2+\gamma\|\dot{u}\|^2+\|\dot{u}\|_2^2\le c\|\dot{u}\|\|\dot{u}\|_1+c\|\dot{u}\|^2$。

因为 $\|\dot{u}\|_2^2\ge 0$，所以

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|\dot{u}\|^2+\alpha\|\dot{u}\|_1^2\right)\le c_4\left(\|\dot{u}\|^2+\alpha\|\dot{u}\|_1^2\right).$$

由 Gronwall 引理得证。

引理 3.5 若引理 3.2 成立，则 $\dot{u}(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2\left(R^n\right)\right)$ 且 $\|\dot{u}\|_2^2\le E_5$。

证：用 $-\Delta\dot{u}$ 与(1)式做内积，得

$$\begin{aligned}\alpha\|\dot{u}\|_2^2&=\left(h-\dot{u}+\beta\Delta u-\Delta^2u-\gamma u-\bar{\nabla}F(u),-\Delta\dot{u}\right)\\&\le\left(\|h\|+\|\dot{u}\|+\beta\|u\|_2+\|u\|_4+\gamma\|u\|+\|\bar{\nabla}F(u)\|\right)\|\dot{u}\|_2\le c_5\|\dot{u}\|_2.\end{aligned}$$

故得 $\|\dot{u}\|_2^2\le E_5$。

综上所述，若 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in H^2\left(R^n\right)$，$u_0\in H^2\left(R^n\right)$，则方程(1) (2)存在唯一解 $u(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2\left(R^n\right)\right)$，且有 $\dot{u}(t)\in L^\infty\left(R^+;H^2\left(R^n\right)\right)$。定义解算子 $S(t)$：$u_0\to u(t)$。由以上引理，可得。

定理 3.1 解算子 $S(t)$ 在 $H^2\left(R^n\right)$ 上是连续的并且存在有界吸收集 $B\subset H^3\left(R^n\right)$。

4. 解的光滑性

设 $h=h(x)\in L^2\left(R^n\right)$，$\lambda_L(x)\in C_0^\infty\left(R^n\right)$，$0\le\lambda_L\le 1$ 满足

$$\lambda_L(x)=\begin{cases}1, if\ |x|\le L;\\0, if\ |x|>1+L,\end{cases}$$

则对 $\forall\eta\in(0,1),\exists L(\eta)>0$，使得

$$\|h-h_\eta\|^2\le\eta, h_\eta=h\cdot\lambda_{L(\eta)};\quad\|\bar{\nabla}F-\bar{\nabla}F_\eta\|^2\le\eta,\bar{\nabla}F_\eta=\bar{\nabla}F\cdot\lambda_{L(\eta)};$$

设 u_η 是下列方程的解

$$\dot{u}_\eta-\alpha\Delta\dot{u}_\eta+\Delta^2u_\eta-\beta\Delta u_\eta+\gamma u_\eta=\left(h-h_\eta\right)-\left(\bar{\nabla}F-\bar{\nabla}F_\eta\right);\tag{7}$$

$$u_\eta(x,0)=u_0.\tag{8}$$

记 $S_{1\eta}(t)u_0=u_\eta,v_\eta=S_{2\eta}(t)u_0=S(t)u_0-S_{1\eta}(t)u_0$，且 v_η 是如下方程的解

$$\dot{v}_\eta-\alpha\Delta\dot{v}_\eta+\Delta^2v_\eta-\beta\Delta v_\eta+\gamma v_\eta=h_\eta-\bar{\nabla}F_\eta;\tag{9}$$

$$v_\eta(x,0)=0.\tag{10}$$

定义 4.1 Banach 空间中集合 A 的 kuratowskii α-非紧测度定义为

$$\alpha(A)=\inf\left\{d\,|\,d(A)<d\right\}.$$

其中 $d(A)$ 为 A 的有限覆盖的小球的直径。且 $\alpha(A\cup B)\le\alpha(A)+\alpha(B)$ 成立。若是 A 紧集，则 $\alpha(A)=0$ (参见文献[3])。

引理 4.1 设 $(A_1)-(A_3)$ 满足，$h(x)\in L^2\left(R^n\right)$，$u_0\in H^2\left(R^n\right)$，则 $\exists c>0,\forall\eta\in(0,1)$，使得

$$\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\le c,\ \|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\le c,\ \|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\le c.$$

并且 $\forall\eta\in(0,1),\exists t^*>0,\forall t>t^*>0$ 有

$$\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\le c\eta,\ \|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\le c\eta,\ \|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\le c\eta.$$

证：用 u_η 与(7)式做内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\right)+\beta\|u_\eta\|_1^2+\gamma\|u_\eta\|^2+\|u_\eta\|_2^2\le\left(\|h-h_\eta\|+\|\bar{\nabla}F-\bar{\nabla}F_\eta\|\right)\|u_\eta\|\le c\eta\|u_\eta\|\le\frac{\gamma}{2}\|u_\eta\|^2+\frac{c}{2}\eta.$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\right)+c_1\left(\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\right)\le c\eta.$$

由 Gronwall 引理，有

$$\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\le\left(\|u_0\|^2+\alpha\|u_0\|_1^2\right)\exp\{-c_1\,\mathrm{t}\}+\frac{c_\eta}{c_1}. \tag{11}$$

故 $\exists c>0$，使得

$$\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\le\eta\le c,\forall\eta\in(0,1].$$

$\exists t_3(\rho_1)>0$，当 $t\ge t_3(\rho_1)$ 时，使得

$$\left(\|u_0\|^2+\alpha\|u_0\|_1^2\right)\exp\{-c_1\,\mathrm{t}\}\le\eta.$$

所以 $\forall t^*\ge t_3(\rho_1)$，$\|u_\eta\|^2+\alpha\|u_\eta\|_1^2\le c\eta$。

用 $-\Delta u_\eta$ 与(7)式做内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\right)+\beta\|u_\eta\|_2^2+\gamma\|u_\eta\|_1^2+\|u_\eta\|_3^2\le\left(\|h-h_\eta\|+\|\bar{\nabla}F-\bar{\nabla}F_\eta\|\right)\|u_\eta\|_2\le c\eta\|u_\eta\|_2\le\frac{\beta}{2}\|u_\eta\|_2^2+\frac{c}{2}\eta; \tag{12}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\right)+c_2\left(\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\right)\le c\eta. \tag{13}$$

由 Gronwall 引理，得

$$\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\le\left(\|u_0\|_1^2+\alpha\|u_0\|_2^2\right)\exp\{-c_2\,\mathrm{t}\}+\frac{c_\eta}{c_2}.$$

故 $\exists c>0$，使 $\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\le c$，当 $t\ge t_4(\rho_2)$ 时，使得

$$\left(\|u_0\|_1^2+\alpha\|u_0\|_2^2\right)\exp\{-c_2\,\mathrm{t}\}\le\eta.$$

故 $\forall t\ge t_4(\rho_2)$，$\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\le c\eta$。其中 c_1,c_2,ρ_1,ρ_2 分别与引理 3.1、3.2 和 3.3 中取法相同。

用 Δ^2u_η 与(7)式做内积得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\right)+\beta\|u_\eta\|_3^2+\|u_\eta\|_4^2+\gamma\|u_\eta\|_2^2\le\left(\|h-h_\eta\|+\|\bar{\nabla}F-\bar{\nabla}F_\eta\|\right)\|u_\eta\|_4\le\frac{1}{2}\|u_\eta\|_4+\frac{c}{2}\eta;$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\right)+2c_1\left(\|u_\eta\|_2^2+\beta\|u_\eta\|_3^2\right)\le c\eta.$$

又由(12)，有 $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|u_\eta\|_1^2+\alpha\|u_\eta\|_2^2\right)+\|u_\eta\|_3^2\le c$。积分此式得

$$\|u(t+1)\|_1^2+\alpha\|u(t+1)\|_2^2+\int_t^{t+1}\|u(s)\|_3^2\mathrm{d}s\le c+\|u(t)\|_1^2+\alpha\|u(t)\|_2^2.$$

故 $\int_t^{t+1}\|u(s)\|_3^2\mathrm{d}s\le c$。由一致 Gronwall 引理，有 $\|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\le c$。进而存在 $t_5=t_4(\rho_2)+1$，$\forall t>t_5$，有 $\|u_\eta\|_2^2+\alpha\|u_\eta\|_3^2\le c\eta$。

为了证明空间嵌入的紧性，我们引入加权范数 $\|xv_\eta\|$，$\|x\nabla v_\eta\|$，$\|x\Delta v_\eta\|$。

引理 4.2 假设 $(A_1)-(A_3)$ 成立，$u_0\in H^2(R^n)$，则 $c(\eta)>0$，使得

$$\|xv_\eta\|^2+2\alpha\|x\Delta v_\eta\|^2+\alpha^2\|x\Delta v_\eta\|^2\le c(\eta). \tag{14}$$

证：用 $x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta$ 与(9)式各项做内积，得

$$\left(\dot v_\eta-\alpha\dot v_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|xv_\eta\|^2+2\alpha\|x\nabla v_\eta\|^2+\alpha^2\|x\Delta v_\eta\|^2+2\alpha^2\|\nabla v_\eta\|^2\right);$$

$$\left(-\beta\Delta v_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)=\beta\|x\nabla v_\eta\|^2+2\beta\left(\nabla v_\eta,xv_\eta\right)+\alpha\beta\|x\Delta v_\eta\|^2+2\alpha\beta\|\nabla v_\eta\|^2;$$

$$\left(\gamma v_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)=\gamma\|xv_\eta\|^2+\alpha\gamma\|x\nabla v_\eta\|^2+2\alpha\gamma\|v_\eta\|^2;$$

$$\left(\Delta^2v_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)=\|xv_\eta\|^2+2\left(\Delta v_\eta,v_\eta\right)+2\alpha\left(\Delta v_\eta,x\nabla v_\eta\right)+2\alpha\|\nabla v_\eta\|^2+\alpha\|x\nabla\Delta v_\eta\|^2;$$

$$\left(h_\eta-\bar\nabla F_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)=\left(\|xh_\eta\|+\|x\bar\nabla F_\eta\|\right)\|xv_\eta\|+\alpha\left(\|xh_\eta\|+\|x\bar\nabla F_\eta\|\right)\|x\Delta v_\eta\|+2\alpha\left(\|h_\eta\|+\|\bar\nabla F_\eta\|\right)\|v_\eta\|.$$

由于当 $t>t^*$ 时，u,u_η 在 $H^3\left(R^n\right)$ 中有界，从而当 $t>t^*$ 时，v_η 在 $H^3\left(R^n\right)$ 中有界，h_η，$\nabla\bar F_\eta$ 有界。由此可得

$$\left(h_\eta-\bar\nabla F_\eta,x^2v_\eta-\alpha x^2\Delta v_\eta+2\alpha v_\eta\right)\le c_1'(\eta)\|xv_\eta\|+c_2'(\eta)\|x\Delta v_\eta\|+c_3'(\eta)\|v_\eta\|.$$

综合以上各式，整理得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|xv_\eta\|^2+2\alpha\|x\nabla v_\eta\|^2+\alpha^2\|x\Delta v_\eta\|^2+2\alpha^2\|\nabla v_\eta\|^2\right)+\alpha\gamma\|x\nabla v_\eta\|^2\\&+\frac{1}{2}(\alpha\beta+1)\|x\Delta v_\eta\|^2+2\alpha\beta\|\nabla v_\eta\|^2+\frac{1}{2}\gamma\|xv_\eta\|^2+\alpha\|\Delta v_\eta\|^2\le c(\eta).\end{aligned}$$

取 $c_4>0$，有

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\|xv_\eta\|^2+2\alpha\|x\nabla v_\eta\|^2+\alpha^2\|x\Delta v_\eta\|^2+2\alpha^2\|\nabla v_\eta\|^2\right)+c_4\left(\|xv_\eta\|^2+2\alpha\|x\nabla v_\eta\|^2+\alpha^2\|x\Delta v_\eta\|^2\right)\le c(\eta).$$

由 Gronwall 引理即得(14)式成立。

引理 4.3 设 $s>s_1,s,s_1$ 为整数，则 $H^s\left(R^n\right)\cap H^{s_1}\left(R^n;\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x\right)$ 到 $H^{s_1}\left(R^n\right)$ 是紧嵌入[4]。

定理 4.1 解算子 $S(t)$ 是渐进光滑的。

证：由引理 4.2 和引理 4.3 知，方程(9)(10)所确定的 $S_{2\eta}(t)$ 在 $H^2\left(R^n\right)$ 上紧，$\forall B\subset H^2\left(R^n\right)$ 有界，有 $dist\left(S_{2\eta}(t),B\right)=0,\forall t\ge0$。由引理 4.1 有

$$\|S_{1\eta}(t)u_0\|<\varepsilon,\forall t\ge t_*,u_0\in B.$$

因此 $\alpha\left(S(t),B\right)\le\alpha\left(S_{1\eta}(t),B\right)+\alpha\left(S_{2\eta}(t),B\right)=\alpha\left(S_{1\eta}(t),B\right)\le\varepsilon$。从而 $\lim\limits_{t\to0}\alpha\left(S(t),B\right)=0$。即 $S(t)$ 是渐近光滑的。

5. 整体吸引子的存在性

综上所述，可得如下结论

引理 5.1 假设 X 为 Banach 空间，$\left\{S(t)\right\}_{t\ge0}$ 是 X 上的连续算子半群，若 $\left\{S(t)\right\}_{t\ge0}$ 是渐近光滑的且有一个有界吸收集，则 $\left\{S(t)\right\}_{t\ge0}$ 有一个整体吸引子，它是 X 中的紧不变集，吸收 X 中的每一个有界集[5]。

定理 5.2 $A=\omega(B)=\bigcap\limits_{s\ge0}\overline{\bigcup\limits_{t\ge s}S(t)B}$ 是 $S(t)$ 在 $H^2\left(R^n\right)$ 中的紧吸引子，其中闭包是在 $H^2\left(R^n\right)$ 取的，是 $S(t)$ 在 $H^2\left(R^n\right)$ 中的有界吸收集[3]。

6. 致谢

我衷心的感谢我的导师张建文教授，在论文的创作中，给予我悉心的指导和帮助。张老师严谨的治学

态度、勤奋的工作作风、平易近人的处世风范，将会在我今后的学习和生活中时刻影响我。值此论文完稿之际，特此向张老师致以衷心的感谢！

感谢王旦霞和李桂莲两位老师对我的指导。二位老师对我进入这个领域起到了巩固性的作用，得益于她们的耐心讲解，使我对基本知识的理解更为深刻，为我打下了坚实的基础。王旦霞老师是我在吸引子方面研究的启蒙者，给予了我许多具体的指导并提出了许多好的建议。

感谢姚华珍、石丹青、姜伟三位同学。在进入这个领域学习时，是她们一直陪伴着我，共同讨论，解决了许多疑惑。

我还要特别感谢我的父母，是他们为我提供了这个学习的机会，为我的学业付出了辛勤的劳动。是他们让我有了心灵上的慰藉，可以踏实的在学校学习。

最后，感谢国家自然科学基金(批准号：11172194)，山西省自然科学基金(批准号：2010011008)，山西省青年科技研究基金(批准号：2011021002-2)的资助。

参考文献 (References)

[1] H. J. Zhao, B. J. Xuan. Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term. Nonlinear Analysis, 1997, 28(11): 1835-1850.
[2] 潘杰. 无界区域上 GBBM 方程的长时间动力学行为[D]. 四川: 四川师范大学, 2004.
[3] 李开泰. 马逸尘. 数学物理方程 Hilbert 空间方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 226-253.
[4] J. K. Hale. Asymptotic behavior of dissipative systems. Providence: Mathematical Surveys and Monographs, 1988: 113-145.
[5] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. 北京: 世界图书出版公司, 2006: 41-171.

