Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 177-184
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24028 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Relation between Solutions of a Class of Higher-Order Periodic Differential Equations with Functions of Small Growth

Wei Lou, Zongxuan Chen

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: 330136754@qq.com, chzx@vip.sina.com

Received: Jul. 5th, 2012; revised: Jul. 19th, 2012; accepted: Jul. 27th, 2012

Abstract: In this paper we research the relation between solution of a class of higher-order periodic differential equations with their first derivative, second derivative and functions of small growth. And then discuss fixed points and hyperorder of the class of solutions to get the character of their fixed points. Under the condition of the higher-order periodic differential equations, the character of their fixed points is different from other general entire functions'.

Keywords: Higher-Order Differential Equations; Fixed Point; Convergence Exponent; Entire Function; Hyperorder

一类高阶周期微分方程的解和小函数的关系

娄　伟，陈宗煊

华南师范大学数学科学学院，广州
Email: 330136754@qq.com, chzx@vip.sina.com

收稿日期：2012 年 7 月 5 日；修回日期：2012 年 7 月 19 日；录用日期：2012 年 7 月 27 日

摘　要：在本文中研究了一类高阶周期微分方程的解和它们的一阶，二阶导数与小函数之间的关系，进而探讨这类解的不动点及超级的问题，得到它们的不动点性质，由于受到周期微分方程的制约，与一般整函数的不动点性质相比有所不同。

关键词：高阶微分方程；收敛指数；整函数；不动点；超级

1. 引言与结果

在本文中，我们使用值分布论标准记号(见[1-3])。另外，我们还使用$\sigma(f)$表示亚纯函数$f(z)$的级，$\lambda(f)$表示$f(z)$的零点收敛指数，$\overline{\lambda}(f)$表示$f(z)$的不同零点序列的收敛指数。

我们还使用$\overline{\lambda}(f-\varphi)$表示亚纯函数$f$取小函数$\varphi$的点的收敛指数。

陈宗煊在文[4]中证明了如下结果：

定理 A 假设$A_j(z)(\neq 0)(j=0,1)$是整函数且$\sigma(A_j)<1$，假设a,b是复常数且$ab\neq 0$和$a\neq b$，那么方程

$$f''+A_1e^{az}f'+A_0e^{bz}f=0 \tag{1.1}$$

的每一个解$f(\neq 0)$具有无穷级。

对于二阶线性微分方程的解及它们的一阶，二阶导数，微分多项式取小函数的点的性质，已经有大量的研究成果，文[5]证明如下的结果：

定理 B 假设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$，假设 a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $a\neq b$，如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数，那么方程(1.1)的每一个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。进一步，如果将 $a\neq b$ 加强为条件 $\arg a\neq \arg b$ 或 $a=cb\ (0<c<1)$，则方程(1.1)的每一个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$。

定理 C 假设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$。假设 $d_0(z),d_1(z),d_2(z)$ 是不全恒等于零的多项式，a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq \arg b$ 或 $a=cb\ (0<c<1)$，$\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数，如果 $f(\not\equiv 0)$ 是方程(1.1) $f(\not\equiv 0)$ 的一个整数解，那么微分多项式 $g(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

在文[6]中作者将较强的条件 $\arg a\neq \arg b$ 或 $a=cb\ (0<c<1)$减弱，得到如下结果：

定理 D 假设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$，假设 a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $a/b\notin[1,2]$，如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数，那么方程(1.1)的每一个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$。

定理 E 假设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$，假设 $d_0(z),d_1(z),d_2(z)$ 是不全恒等于零的多项式，a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $a/b\notin[1,3/2,4/3,2,3,4]$，如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数，$f(\not\equiv 0)$ 是方程(1.1) $f(\not\equiv 0)$ 的一个整数解，那么微分多项式 $g(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

考虑高阶周期线性微分方程

$$f^{(k)}+p_{k-1}(e^z)f^{(k-1)}+\cdots+p_0(e^z)f=0 \tag{1.2}$$

以及非齐次线性方程

$$f^{(k)}+p_{k-1}(e^z)f^{(k-1)}+\cdots+p_0(e^z)f=Q_1(e^z)+Q_2(e^z) \tag{1.3}$$

在本文中，我们深入研究了高阶周期微分方程的解和它们的一阶，二阶导数取小函数的点的性质，得到下面的定理：

定理 1 假设

$$p_j(e^z)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j(m_j)-1}e^{(m_j-1)z}+\cdots+a_{j1}e^z,$$

其中 a_{jm_j}，$a_{j(m_j)-1},\cdots,a_{j1}$ 是常数且 $a_{jm_j}\neq 0; m_j\geq 1$ 是整数。假设存在 $m_s\ (s\in\{0,\cdots,k-1\})$ 满足 $m_s>\max\{m_j: j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\}=m$。假设 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数。那么方程(1.2)的每个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

定理 2 假设 $p_j(e^z)$ 如定理 1 中表示，设存在 $m_s\ (s\in\{0,\cdots,k-1\})$ 满足 $m_s>\max\{m_j: j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\}=m$。$\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是超越整函数且 $\sigma(\varphi)<1$，或者是满足 $\deg(\varphi)\geq s-1$ 的多项式。那么方程(1.2)的每个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

定理 3 假设

$$p_j(e^z)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j(m_j)-1}e^{(m_j-1)z}+\cdots+a_{j1}e^z,$$

且 $\deg p_0(\xi)>\deg p_j(\xi)(\xi=e^z)$ 对所有 $1\leq j\leq k-1$ 成立。且 $\sigma(\varphi)<1$，那么方程(1.2)的每个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。

由前面的问题可知，如果小函数 $\varphi(z)=z$，那么这些问题可以推导出高阶周期微分方程的解的不动点的性质。对于一般整函数、亚纯函数的不动点，近些年来，人们已经取得了一系列丰硕成果(见[7])。一般超越整函数可能没有或仅有有限多个不动点，例如 $f_c(z)=ce^z+z$ (c 为任意非零常数)。([7]，系理 2.2)指出：若 f 为超越整函数，则 $f[f(z)]$ 有无穷多个不动点。

文[8]中建立了二级零点收敛指数，二级不动点收敛指数的概念，得到了齐次与非齐次线性微分方程解的不动点的个数的精确估计，并用超级，二级零点收敛指数，二级不动点收敛指数的概念进一步精确地估计了微分方程的无穷极解的增长率，零点密度，不动点密度。

在本文中，为进一步精确估计无穷级解的增长率，零点与不动点的密度，我们引入如下定义。

定义 1 假设 $z_1,z_2,\cdots\left(\left|z_j\right|=r_j,0<r_1\le r_2\le\cdots\right)$ 为超越整函数 $f(z)$ 的不动点，那么我们定义 $f(z)$ 的不动点的收敛指数 $\tau(f)$ 为 $\tau(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f-z}\right)}{\log r}$。

定义 2 (见[9])设 $f(z)$ 为亚纯函数，那么我们定义 $f(z)$ 的超级 $\sigma_2(f)$ 为 $\sigma_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log T(r,f)}{\log r}$。

定义 3 假设 $f(z)$ 为整函数，那么我们定义 $f(z)$ 的二级不动点收敛指数 $\tau_2(f)$ 为
$\tau_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f-z}\right)}{\log r}$。

定义 4 假设 $f(z)$ 为整函数，那么我们定义 $f(z)$ 的二级零点收敛指数 $\lambda_2(f)$ 为 $\lambda_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log N\left(r,\dfrac{1}{f}\right)}{\log r}$，定义 $f(z)$ 的二级不同零点收敛指数 $\overline{\lambda}_2(f)$ 为 $\overline{\lambda}_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)}{\log r}$。

本文将得到下面两个推论。

推论 1 假设

$$p_j\left(e^z\right)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j\left(m_j\right)-1}e^{\left(m_j-1\right)z}+\cdots+a_{j1}e^z,$$

其中 a_{jm_j}，$a_{j\left(m_j\right)-1},\cdots,a_{j1}$ 是常数且 $a_{jm_j}\ne 0;m_j\ge 1$ 是整数。假设存在 $m_s\left(s\in\{0,\cdots,k-1\}\right)$ 满足 $m_s>\max\left\{m_j:j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\right\}=m$。则方程(1.2)的所有非零解 $f(z)$ 有无穷多个不动点，且 $\tau(f)=\sigma(f)=\infty,\ \tau_2(f)=\sigma_2(f)=1$。

推论 2 假设 $p_j\left(e^z\right)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j\left(m_j\right)-1}e^{\left(m_j-1\right)z}+\cdots+a_{j1}e^z$，$Q_d(z)(d=1,2)$ 是关于 z 的多项式，存在 $m_s\left(s\in\{0,\cdots,k-1\}\right)$ 满足

$$m_s>\max\left\{m_j:j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\right\}=m.$$

且 $Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)-p_1\left(e^z\right)\not\equiv 0$，则方程(1.3)至多除去一个例外解，其他所有解有无穷多个不动点，且 $\tau(f)=\sigma(f)=\infty$，$\tau_2(f)=\sigma_2(f)=1$。

2. 为证明定理所需的引理

在文[10]中定理 1.3 的证明过程中，作者首先证明了下面的一个结论：

引理 1 假设

$$p_j\left(e^z\right)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j\left(m_j\right)-1}e^{\left(m_j-1\right)z}+\cdots+a_{j1}e^z,$$

其中 a_{jm_j}，$a_{j\left(m_j\right)-1},\cdots,a_{j1}$ 是常数且 $a_{jm_j}\ne 0;m_j\ge 1$ 是整数。假设存在 $m_s\left(s\in\{0,\cdots,k-1\}\right)$ 满足 $m_s>\max\left\{m_j:j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\right\}=m$。如果 $p_0\left(e^z\right)\not\equiv 0$，那么方程(1.1)的每个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\sigma(f)=\infty$。

引理 2 ([10]，定理 1.4)假设

$$p_j\left(e^z\right)=a_{jm_j}e^{m_jz}+a_{j\left(m_j\right)-1}e^{\left(m_j-1\right)z}+\cdots+a_{j1}e^z,$$

其中 a_{jm_j}，$a_{j(m_j)-1},\cdots,a_{j1}$ 是常数且 $a_{jm_j}\neq 0; m_j\geq 1$ 是整数。假设存在 $m_s\left(s\in\{0,\cdots,k-1\}\right)$ 满足 $m_s>\max\{m_j: j=0,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1\}=m$。$Q_d(z)(d=1,2)$ 是关于 z 的多项式，如果 $p_0(e^z)\not\equiv 0$，则方程(1.2)最多有一个非平凡次正规解 f_0，其他所有解满足 $\sigma_2(f)=1$。

引理 3 ([11]，引理 6) 假设 $A_j(j=0,\cdots,k-1), F\not\equiv 0$ 是整函数，$f(z)$ 满足微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F$ 且

$$\max\left\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j=0,1,\cdots,k-1)\right\}<\sigma(F)=\sigma(0<\sigma\leq\infty),$$

则 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)$。

引理 4 ([12]，引理 5.8) 假设 $G(r)$ 与 $H(r)$ 为两个定义在$(0,\infty)$内的非减实函数

1) 若除去一个有穷线测度的集合 E 外有 $G(r)\leq H(r)$，那么对任意的 $\alpha>1$，存在 r_0 使得对所有 $r\geq r_0$ 都有 $G(r)\leq H(\alpha r)$。

2) 若存在一个集合 E，其对数测度 $lmE=\xi<+\infty$，使得当 $r\notin E$ 时 $G(r)\leq H(r)$，那么对任意常数 $\beta\left(>e^{\xi}\right)$，当 $r>1$ 时有 $G(r)\leq H(\beta r)$。

3. 定理 1 的证明

假设 $f(\not\equiv 0)$ 是(1.2)的解，那么 f 是整函数，且由引理 1 可知 $\sigma(f)=\infty$。令 $g_0(z)=f(z)-\varphi(z)$，那么 $\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}(g_0)=\overline{\lambda}(f-\varphi)$。将 $f=g_0+\varphi$ 代入(1.2)，得到

$$g_0^k+p_{k-1}(e^z)g_0^{k-1}+\cdots+p_0(e^z)g_0=-\left\{\varphi^k+p_{k-1}(e^z)\varphi^{k-1}+\cdots+p_0(e^z)\varphi\right\} \tag{3.1}$$

我们注意到方程(3.1)可能具有有限级解，但这里我们可以仅讨论满足 $g_0=f-\varphi$ 为无穷级的解，所以我们仅需对方程(3.1)的无穷级整函数解 g_0 证明 $\overline{\lambda}(g_0)=\infty$ 成立。

由于方程(1.2)的所有非零解有无穷级及 $\varphi(z)$ 是有限级整函数，我们可知

$$\varphi^k+p_{k-1}(e^z)\varphi^{k-1}+\cdots+p_0(e^z)\varphi\not\equiv 0$$

对方程(3.1)，由[13]和 $\varphi^k+p_{k-1}(e^z)\varphi^{k-1}+\cdots+p_0(e^z)\varphi\not\equiv 0$ 可知 $\overline{\lambda}(g_0)=\sigma(g_0)=\infty$，即 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

4. 定理 2 的证明

由定理 1 的证明显然 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$ 成立，下面证 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。

对方程(1.2)的两边进行微分，得到

$$f^{(k+1)}+p_{k-1}(e^z)f^{(k)}+\left[p'_{k-1}(e^z)+p_{k-2}(e^z)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[p'_1(e^z)+p_0(e^z)\right]f'+p'_0f=0 \tag{4.1}$$

由方程(1.2)可得到 $f=-\dfrac{f^{(k)}+\cdots+p_1(e^z)f'}{p_0}$ 代人上面的方程中有

$$f^{(k+1)}+h_{k-1}f^{(k)}+h_{k-2}f^{(k-1)}+\cdots+h_0f'=0 \tag{4.2}$$

其中 $h_{k-1}=p_{k-1}-\dfrac{p'_0}{p_0}, h_{k-2}=p'_{k-1}+p_{k-2}-p_{k-1}\dfrac{p'_0}{p_0},\cdots,h_0=p'_1+p_0-p_1\dfrac{p'_0}{p_0},$

将 $f'=g_1+\varphi, f''=g'_1+\varphi',\cdots,f^{(k+1)}=g_1^{(k)}+\varphi^{(k)}$ 代人方程(4.2)有

$$g_1^{(k)}+h_{k-1}g_1^{(k-1)}+\cdots+h_1g'_1+h_0g_1=-\left\{\varphi^{(k)}+h_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+h_0\varphi\right\},$$

令 $h=\varphi^{(k)}+h_{k-1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+h_0\varphi$，如果 $h=0$，则 $p_0\varphi^{(k)}+\left(p_{k-1}p_0-p'_0\right)\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left(p_0p'_1+p_0^2-p'_0p_1\right)\varphi=0$。

当 $m_s\neq m_0$ 时，上面方程左边关于 e 的最高次项含有 $e^{(m_s+m_0)z}$，根据已知条件可得

$$\left(a_{0m_0}a_{sm_s}\right)\varphi^{(s)}+\left(m_s a_{0m_0}a_{sm_s}-m_0 a_{0m_0}a_{sm_s}\right)\varphi^{(s-1)}=0,$$

化简可得 $\varphi^{(s)}+\left(m_s-m_0\right)\varphi^{(s-1)}=0$。对方程变形两边求积分有 $\int\frac{\varphi^{(s)}}{\varphi^{(s-1)}}\mathrm{d}z=\int\left(m_0-m_s\right)\mathrm{d}z$，因为 $\varphi(z)$ 是超越整函数或者满足 $\deg(\varphi)\geq s-1$ 的多项式。可得 $ln\varphi^{(s-1)}=\left(m_0-m_s\right)z$，所以 $\varphi^{(s-1)}=e^{mz}$。显然 $\sigma(\varphi)=1$，这与条件相矛盾，所以 $h\neq 0$。

当 $m_s=m_0$ 时，则有 $p_0^2\varphi=0$，即 $p_0=0$，矛盾，综上可知 $h\neq 0$。由文[13]能得到 $\overline{\lambda}\left(g_1(z)\right)=\infty$，即 $\overline{\lambda}\left(f'-\varphi\right)=\infty$。定理 2 证毕。

5. 定理 3 的证明

由定理 2 的证明方法可以类似的证得 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。下面证 $\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$。令 $g_2(z)=f''-\varphi$，则 $\sigma(g_2)=\sigma(f'')=\sigma(f)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}(g_2)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)$。

对方程(4.1)的两边微分可得

$$\begin{aligned}&f^{(k+2)}+p_{k-1}\left(e^z\right)f^{(k+1)}+\left(2p'_{k-1}\left(e^z\right)+p_{k-2}\left(e^z\right)\right)f^{(k)}+\left(p''_{k-1}\left(e^z\right)+2p'_{k-2}\left(e^z\right)+p_{k-3}\left(e^z\right)\right)f^{(k-1)}+\\&\cdots+\left(p''_2\left(e^z\right)+2p'_1\left(e^z\right)+p_0\left(e^z\right)\right)f''+\left(p''_1\left(e^z\right)+2p'_0\left(e^z\right)\right)f'+p''_0\left(e^z\right)f=0\end{aligned}.$$

将 $f=-\frac{f^{(k)}+\cdots+p_1\left(e^z\right)f'}{p_0}$ 代人上式，再结合方程(4.2)有

$$f^{(k+2)}+H_{k+1}f^{(k+1)}+H_k f^{(k)}+\cdots+H_2 f''=0 \tag{5.1}$$

其中

$$H_{k+1}=p_{k-1}\left(e^z\right)-\frac{\varphi_1}{\varphi_2},H_k=\left(2p'_{k-1}\left(e^z\right)+p'_{k-2}\left(e^z\right)-\frac{p''_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)}\right)-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(p_{k-1}\left(e^z\right)-\frac{p'_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)}\right),$$

$$H_{k-1}=\left(p''_{k-1}\left(e^z\right)+2p'_{k-2}\left(e^z\right)+p_{k-3}\left(e^z\right)-p_{k-1}\left(e^z\right)\frac{p''_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)}\right)-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(p'_{k-1}\left(e^z\right)+p_{k-2}\left(e^z\right)-p_{k-1}\left(e^z\right)\frac{p'_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)}\right),\cdots,$$

$$H_2=\left[p''_2\left(e^z\right)+2p'_1\left(e^z\right)+p'_0\left(e^z\right)-p_2\left(e^z\right)\frac{p''_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)}\right]-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left[p'_2\left(e^z\right)+p_1\left(e^z\right)-p_2\left(e^z\right)\right]\frac{p'_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)},$$

$$\varphi_1=p''_1+2p'_0-p_1\frac{p''_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)},\varphi_2=p'_1+p_0-p_1\frac{p'_0\left(e^z\right)}{p_0\left(e^z\right)},\text{及 }\varphi_2\neq 0\text{。}$$

将 $f''=g_2+\varphi, f'''=g'_2+\varphi',\cdots,f^{(k+2)}=g_2^{(k)}+\varphi^{(k)}$ 代人方程(5.1)得到

$$g_2^{(k)}+H_{k+1}g_2^{(k-1)}+\cdots+H_2 g_2=-\left\{\varphi^{(k)}+H_{k+1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+H_2\varphi\right\},$$

令 $h=\varphi^{(k)}+H_{k+1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+H_2\varphi$，只需证明 $h\neq 0$ 即可。假设 $h=0$，化简 H_2 可得

$H_2=\frac{\sum_{i=1}^{m_{s2}}+p_0^4}{\varphi_2 p_0^2}$，由 $h\neq 0$，可得 $\varphi_2 p_0^2\varphi^{(k)}+\varphi_2 p_0^2 H_{k+1}\varphi^{(k-1)}+\cdots+\varphi_2 p_0^2 H_2\varphi\neq 0$ 成立。

由条件中的 $\deg p_0>\deg p_j$ 观察上式可知方程左边关于 e 的最高次项含有 $e^{4m_0 z}$。含有这项的是 p_0^4，所以 $p_0^4=0$。从而与已知条件矛盾，$\therefore h\neq 0$。

由文[13]能得到 $\overline{\lambda}\left(g_2\left(z\right)\right)=\infty$。即 $\overline{\lambda}\left(f''-\varphi\right)=\infty$。定理 3 得证。

6. 推论 1 的证明

设 $f\left(z\right)$ 为方程(1.2)的解，由复域微分方程的基本理论可知 f 为整函数。令 $g\left(z\right)=f\left(z\right)-z$，则 z 为解 $f\left(z\right)$ 的不动点的充分必要条件是 $g\left(z\right)=0$。由 $g\left(z\right)=f\left(z\right)-z$ 知 $\sigma\left(g\right)=\sigma\left(f\right),\sigma_2\left(g\right)=\sigma_2\left(f\right)$。由定义知 $\tau\left(f\right)=\overline{\lambda}\left(f-z\right)=\overline{\lambda}\left(g\right)$。

将 $f=g+z$ 代入方程(1.2)有

$$g^{(k)}+p_{k-1}\left(e^z\right)g^{(k-1)}+\cdots+p_1\left(e^z\right)g'+p_0\left(e^z\right)g=-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right) \tag{6.1}$$

由已知条件可得 $-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)\not\equiv 0$，由引理 2 可知方程(6.1)最多有一个例外解 g_0。其他所有解满足 $\lambda\left(g\right)=\sigma\left(g\right)=\infty,\sigma_2\left(g\right)=1$。由方程(6.1)可知 $g_0=-z$ 为方程(6.1)的例外解，从而 $f_0=g_0+z\equiv 0$ 为方程(1.2)的零解。所以方程(1.2)的所有非零解有无穷多个不动点。又根据方程(6.1)中

$$\max\left\{\sigma\left(-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)\right),\sigma\left(p_j\right)\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)\right\}=1,$$

由引理 3 可得 $\overline{\lambda}\left(g\right)=\sigma\left(g\right)$。即有 $\tau\left(f\right)=\overline{\lambda}\left(g\right)=\sigma\left(g\right)=\sigma\left(f\right)=\infty$。

由 $\sigma_2\left(f\right)=\sigma_2\left(g\right)=1$，下面只需证明 $\tau_2\left(f\right)=\sigma_2\left(f\right)$。又因为 $\tau_2\left(f\right)=\overline{\lambda}_2\left(g\right)$，即证 $\overline{\lambda}_2\left(g\right)=\sigma_2\left(g\right)$。设 z_0 为 g 的 n 级零点，$n>k$，则由方程(6.1)知 z_0 为 $p_0\left(e^z\right)z+p_1\left(e^z\right)$ 的 $n-k$ 级零点。于是

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{p_0\left(e^z\right)z+p_1\left(e^z\right)}\right) \tag{6.2}$$

∴ 方程(6.1)可以写成

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{p_0\left(e^z\right)z+p_1\left(e^z\right)}\left(\frac{g^{(k)}}{g}+p_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+p_1\frac{g'}{g}+p_0\right)$$

∴ 最多除去一个线性测度为有穷的子集 $E\subset\left[0,+\infty\right)$ 对所有 $r\notin E$ 都有

$$m\left(r,\frac{1}{g}\le m\left(r,\frac{1}{p_0\left(e^z\right)z+p_1\left(e^z\right)}\right)\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,p_j\right)+\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\frac{g^{(j)}}{g}\right)+0\left(1\right) \tag{6.3}$$

由(6.2)和(6.3)得到对所有 $r\notin E$ 都有

$$\begin{aligned}T\left(r,g\right)=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+0\left(1\right)&\le T\left(r,\frac{1}{p_0\left(e^z\right)z+p_1\left(e^z\right)}\right)+k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,p_j\right)+\sum_{j=1}^{K}m\left(r,\frac{g^{(i)}}{g}\right)+0\left(1\right)\\&\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+C\log\left(rT\left(r,g\right)\right)+2\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,p_j\right)+0\left(\log r\right)\end{aligned}$$

当 r 充分大时有 $C\log\left(rT\left(r,g\right)\right)\le\frac{1}{2}T\left(r,g\right)$ 且对多项式 p_j 及 $\forall\varepsilon>0$ 当 r 充分大时有 $T\left(r,p_j\right)\le r^{\sigma+\varepsilon}\left(j=0,1,\cdots,k-1\right)$ 由上面可得当 $r\notin E$ 时有

$$T\left(r,g\right)\le 2k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+4kr^{\sigma+\varepsilon}$$

由引理 4 和(6.4)有 $\sigma_2\left(g\right)\le\overline{\lambda}_2\left(g\right)$，又由 $\sigma_2\left(g\right)$ 和 $\overline{\lambda}_2\left(g\right)$ 的定义可得 $\overline{\lambda}_2\left(g\right)\le\sigma_2\left(g\right)$，∴ $\sigma_2\left(g\right)=\overline{\lambda}_2\left(g\right)$。综上所述有 $\tau_2\left(f\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$。

7. 推论 2 的证明

设 $f(z)$ 为方程(1.3)的解，由复域微分方程的基本理论可知 f 为整函数。令 $g(z)=f(z)-z$，则 z 为解 $f(z)$ 的不动点的充分必要条件是 $g(z)=0$。由 $g(z)=f(z)-z$ 知 $\sigma(g)=\sigma(f),\sigma_2(g)=\sigma_2(f)$。由定义知 $\tau(f)=\bar{\lambda}(f-z)=\bar{\lambda}(g)$。

将 $f=g+z$ 代入方程(1.2)有

$$g^{(k)}+p_{k-1}\left(e^z\right)g^{(k-1)}+\cdots+p_1\left(e^z\right)g'+p_0\left(e^z\right)g=Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right) \tag{7.1}$$

由已知条件可得方程右边不为 0，则方程(7.1)至多除去一个例外解 g_0。其他所有解 g 满足 $\lambda(g)=\bar{\lambda}(g)=\sigma(g)=\infty,\therefore \tau(f)=\sigma(f)=\infty$。所以方程(1.3)至多除去一个例外解，其他所有解有无穷多个不动点，且 $\tau(f)=\sigma(f)=\infty$。

和推论 1 的证明类似，下面只须证 $\bar{\lambda}_2(g)=\sigma_2(g)$。设 z_0 为 g 的 n 级零点，$n>k$，则由方程(7.1)知 z_0 为 $Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)$ 的 $n-k$ 级零点。于是

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)}\right) \tag{7.2}$$

$\therefore$ 方程(7.1)可以写成

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)}\left(\frac{g^{(k)}}{g}+p_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+p_1\frac{g'}{g}+p_0\right)$$

$\therefore$ 最多除去一个线性测度为有穷的子集 $E\subset[0,+\infty)$，对所有 $r\notin E$ 都有

$$m\left(r,\frac{1}{g}\le m\left(r,\frac{1}{Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,p_j\right)+\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\frac{g^{(j)}}{g}\right)\right)+0(1)$$

由上式和(7.2)得到对所有 $r\notin E$ 都有

$$\begin{aligned}T(r,g)&=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+0(1)\le T\left(r,\frac{1}{Q_1\left(e^z\right)+Q_2\left(e^z\right)-p_0\left(e^z\right)z-p_1\left(e^z\right)}\right)+k\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,p_j\right)\\&\quad+\sum_{j=1}^{K}m\left(r,\frac{g^{(i)}}{g}\right)+0(1)\le k\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+C\log\left(rT(r,g)\right)+2\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,p_j\right)+T\left(r,Q_1\left(e^z\right)\right)\\&\quad+T\left(r,Q_2\left(e^z\right)\right)+T\left(r,p_0\left(e^z\right)\right)+T\left(r,p_1\left(e^z\right)\right)+0(\log r)\end{aligned}$$

当 r 充分大时有 $C\log\left(rT(r,g)\right)\le\frac{1}{2}T(r,g)$ 且对多项式 p_j 及 $\forall\varepsilon>0$ 当 r 充分大时有 $T\left(r,p_j\right)\le r^{\sigma+\varepsilon}\ (j=0,1,\cdots,k-1)$ 由推论 1 的证明可以得到 $\tau_2(f)=\sigma_2(f)=1$。由此推论 2 得证。

参考文献 (References)

[1] W. Hayman. Meromorphic function. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[2] I. Laine. Nevanlinna theory and complex differential equations. Berlin: W.de Gruyter, 1993.
[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
[4] Z. X. Chen. The growth of solutions of differential equation $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$. Science in China, Series, 2001, 31(9): 775-784.
[5] Z. X. Chen. The relation between solution of a class of second order differential equation with functions of small growth. Chinese Annals of Mathematics, 2006, A27: 431-442.
[6] 徐俊峰. 微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学学报, 2010, 53(2): 291-296.

[7] 庄圻泰, 杨重骏. 亚纯函数的不动点与分解论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1988.
[8] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点和超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.
[9] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性定理[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[10] Z.-X. Chen, K. H. Shon. Research article on subnormal solutions of periodic differential equations. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, 2010, Article ID: 170762.
[11] 涂金, 陈宗煊, 曹廷彬. 某类高阶微分方程解的复振荡[J]. 江西师范大学报, 2005, 29(1): 8-11.
[12] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[13] Z.-X. Chen. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations. Analysis, 1994, 14(4): 425-438.

