Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 256-262
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24039 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Primitively Decomposable rpp Semigroups*

Xiaowei Qiu, Xiaojiang Guo, Junqi Wang, Xia Wu

Department of Mathematics, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: fengliangyushui@163.com

Received: Aug. 13th, 2012; revised: Aug. 27th, 2012; accepted: Sep. 6th, 2012

Abstract: Completely 0-simple semigroup is a very important class of regular semigroups, and it's also the basis for the structure of regular semigroups. Primitively decomposable rpp semigroups are generalizations of completely 0-simple semigroups in the range of rpp semigroups. In this paper, the author studied primitively decomposable rpp semigroups, gave some characterizations for these semigroups and proved that a semigroup S was primitively decomposable rpp semigroup if and only if it was a homomorphic image of Rees matrix semigroup over a left cancellative monoid satisfying some conditions. In addition, some special primitively decomposable rpp semigroups were considered and discussed.

Keywords: Primitively Decomposable; rpp Semigroups; Rees Matrix Semigroups

本原可分 rpp 半群*

邱小伟，郭小江，王军旗，吴 瑕

江西师范大学，数学与信息科学学院，南昌
Email: fengliangyushui@163.com

收稿日期：2012 年 8 月 13 日；修回日期：2012 年 8 月 27 日；录用日期：2012 年 9 月 6 日

摘 要：完全 0-单半群是一类非常重要的正则半群，也是正则半群结构基础。本原可分 rpp 半群是完全 0-单半群在 rpp 半群理论中推广。本文主要研究本原可分 rpp 半群，给出了这类半群的若干特征，并证明了：半群为本原可分 rpp 半群当且仅当它是满足一些条件的左消幺半群上的 Rees 矩阵半群的同态像。此外，还研究了若干特类。

关键词：本原可分；rpp 半群；Rees 矩阵半群

1. 引言

环上的全矩阵环是代数学中最为优美的代数结构之一。采用类似的构造方式，著名半群论学者 Rees 构造了 Rees 矩阵半群。众所周知，半群是完全 0-单半群当且仅当它同构于某个 0-群上的 Rees 矩阵半群。完全 0-单半群是半群理论研究中的一类非常重要的半群。它的重要性在于：完全 0-单半群是本原正则半群的构件，而正则半群均可以本原正则半群出发构作(见[1,2])。值得注意，完全 0-单半群有另一特征，即完全 0-单半群恰为可以分解为具有 $S-$系同构性质的本原幂等元生成的左(右)理想并的正则半群。O. Steinfeld[3]从这一观点出发，对完全 0-单半群做了推广研究。

令 S 为半群。称 S 为 rpp 半群，如果对于任意的 $a\in S$，作为 S^1-系 aS^1 是投射的。对偶地，定义 lpp 半群。Fountain[4]指出，半群为 rpp 半群当且仅当它的每个 L^*-类都含幂等元。如[4]，称半群 S 为富足半群(abundant semigroup)，如果它的每个 L^*-类和每个 $\mathfrak{R}^*-$类都含幂等元。等价地，半群为富足半群当且仅当它既为 rpp 半群，又为 lpp 半群。

*基金项目：国家自然科学基金(10961014)；江西省自然科学基金(2014BAB201009)；江西省教育厅科研项目助资(GJJ11388)。

Fountain[4]发展了 steinfeld 的观点，定义了半群的本原可分的概念，并研究了本原可分富足半群，证明了：半群为本原可分富足半群当且仅当它同构于消去幺半群附加零元上的 Rees 矩阵半群。基于此，完全 0-单半群恰为正则的本原可分富足半群。富足半群包含 rpp 半群和其对偶(lpp 半群)的双重特性。因此，研究本原可分 rpp 半群是很自然的问题，这是本文的主要目的。我们将会发现，本原可分 rpp 半群是完全 0-单半群和本原可分富足半群在 rpp 半群理论中的公共推广。

2. 若干准备

文中的一些定义及符号参见文献[4,5]。首先，回忆一些关于关系 L^* 的已知结果，对偶结论关系 $\mathfrak{R}^*$ 成立。

引理 2.1[4,6] 令 S 为半群，且 $a,b\in S$ ，则下列各款等价：

1) aL^*b；

2) 对于任意的 $x,y\in S^1, ax=\Leftrightarrow bx=by$；

3) 存在 S^1- 系同构 $\varphi: aS^1\to bS^1$ 满足 $a\varphi=b$ 。

引理 2.2[6] 令 S 为半群，且 $a,e=e^2\in S$ ，则下列各款等价：

1) aL^*e；

2) $a=ae$ 且对于任意的

$$x,y\in S^1, ax=ay\Rightarrow ex=ey .$$

众所周知，L^* 是 S 上的右同余，$\mathfrak{R}^*$ 是 S 上的左同余。一般地，$L\subseteq L^*$ 且 $\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{R}^*$ 。但当 a,b 是 S 的正则元时，$aL^*(\mathfrak{R})b$ 当且仅当 $aL(\mathfrak{R})b$ 。为方便起见，用 $L_a^*\left(R_a^*\right)$ 分别表示包含 a 的 L^*- 类($\mathfrak{R}^*-$类)。记 S 的幂等元构成的集合为 $E(S)$， a^* 为与 a 具有 L^*- 关系的幂等元， a^+ 为与 a 具有 $\mathfrak{R}^*-$ 关系的幂等元。

如[4]，S 的左理想 I 称为左 $*-$ 理想，如果对于任意的 $a\in I$ 都有 $L_a^*\subseteq I$ 。对偶地，定义右 $*-$ 理想。S 的理想既为左 $*-$ 理想，又为右 $*-$ 理想，则称之为 S 的 $*-$ 理想。对于 S 的任意元 a，我们称含 a 的最小的(左；右) $*-$ 理想为由 a 确定的主(左；右) $*-$ 理想，记为($L(a)$； $R(a)$) $J(a)$ 。在[4]中，Fountain 指出：$aL^*\left(\mathfrak{R}^*\right)b$ 当且仅当 $L(a)=L(b)$ ($R(a)=R(b)$)。注意到，若 $e\in E(S)$，则 Se 是 S 的左 $*-$ 理想。事实上，若 $a\in Se$ ，则 $a=ae$ ，于是对任意的 $b\in L_a$ ，由引理 2.1，知 $b=be\in Se$ ，即有 $L_a^*\subseteq Se$ ，故 Se 是 S 的左 $*-$ 理想。即 $L^*(e)=Se$ 。

半群 S 的左 $*-$ 理想 I 称为 $0-$ 极小左 $*-$ 理想，如果 I 是 S 中所有非零左 $*-$ 理想关于集合包含关系的极小者。对偶地，定义 $0-$ 极小右 $*-$ 理想。半群 S 的非零幂等元 e 称为本原的(primitive)，如果对于任意的非零幂等元 f , $f\le e$ 可推出 $e=f$ 。如果 S 的所有非零幂等元都是本原的，则称 S 为本原半群(primitive semigroup)。

引理 2.3 令 S 为含零元 0 的 rpp 半群。若 $e\in E(S)/\{0\}$，则下列各款等价：

1) Se 是 $0-$ 极小左 $*-$ 理想；

2) e 是本原幂等元。

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 设 Se 是 $0-$ 极小左 $*-$ 理想。令 $f\in E(S)/\{0\}$ ，且 $f\le e$，则 $f=ef=fe\in Se$ ，于是 $Sf\subseteq Se$ 。引理 2.3 之前的讨论告知，Sf 为左 $*-$ 理想，而 Se 是 $0-$ 极小左 $*-$ 理想，于是 $Sf=Se$，从而 eLf ，故 $f=ef=e$ 。因此 e 是本原幂等元。

2) $\Rightarrow$ 1) 设 e 是本原幂等元。令 I 为包含在 Se 中的任一非零左 $*-$ 理想，显然存在非零元 $a\in I$ ，使得 $L^*(a)\subseteq I$ 。但 S 为 rpp 半群，所以存在非零幂等元 f ,使得 $f\ L^*\ a$ 。不难知道，

$$Sf=L^*(f)=L^*(a)\subseteq I\subseteq Se ,$$

则 $f\in Se$，于是 $fe=f$ ，从而 $ef\in E(S)$ 且 $ef\le e$ 。由 e 是本原幂等元，知 $ef=0$ 或 $ef=e$;若 $ef=0$ ，则 $f=ff=fef=0$ 与 $f\ne 0$ 矛盾，故 $ef=e$ ，即有 eLf 。因此 $Sf=Se$，故 $I=Se$ 。这样，Se 是 $0-$ 极小左 $*-$ 理想。 □

对偶地，我们有

引理 2.4 令 S 为含零元 0 的 lpp 半群。若 $e\in E(S)/\{0\}$，则下列各款等价：

1) eS 是 $0-$ 极小右 $*-$ 理想；

2) e 是本原幂等元。

基于引理 2.3 和引理 2.4，下面推论显然。

推论 2.5 令 S 为含零元 0 的富足半群。若 $e\in E(S)/\{0\}$，则下列各款等价：

1) Se 是 $0-$ 极小左 $*-$ 理想；

2) e 是本原幂等元；

3) eS 是 $0-$ 极小右 $*-$ 理想。

引理 2.6 令 S 为半群，且 $f\in E(S)$，则下列各款等价：

1) $e\ D\ f$ ；

2) $eS,\ fs$ 是 S^1- 系同构的；

3) Se, Sf 是 S^1- 系同构的。

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 设 $e\ D\ f$，则存在 $a\in S$，满足 $e\Re aLf$，显然，a 为正则元，再据引理 2.1，有 $aS\cong fs$ (作为 S^1- 系)。另一方面，$e\Re a$ 可推出 $eS=aS$。故作为 S^1- 系，$eS\cong fS$。

2) $\Rightarrow$ 1) 设 φ 为 eS 到 fS 的 S^1- 系同构，易知，$e\varphi\in fS$。而 f 是 fS 的左单位元，进而 $f(e\varphi)=e\varphi$。另一方面，存在 $x\in eS$，使得

$$f=x\varphi=(ex)\varphi=(e\varphi)(x\varphi).$$

故 $(e\varphi)\Re f$。显然，$e\varphi$ 为正则元。当然，$(e\varphi)S=fS$。这样，φ 是 eS 到 $(e\varphi)S$ 的 S^1- 系同构，再据引理 2.1，有 $(e\varphi)L^*e$ 从而 $(e\varphi)Le$。因此 $e\ D\ f$。

$$1)\Leftrightarrow 3) \text{ 类似于 } 1)\Leftrightarrow 2).$$ □

3. 本原可分 rpp 半群

如[4]，半群 S 称为左(右)本原可分的(primitively decomposable)，如果 S 可以表示为：

$$\bigcup\{Se_\lambda;\lambda\in\Lambda\}\quad(\bigcup\{e_iS;i\in I\})$$

其中所有 e_λ 和 e_i 都是本原幂等元，所有 $Se_\lambda\ (e_iS)$ 都 S^1- 系同构。而且，半群 S 称为本原可分的，如果它既是左本原可分的，又是右本原可分的。

本节将给出本原可分的 rpp 半群的结构定理。首先，给出本原可分 rpp 半群的一些性质。

引理 3.1 令 S 为 rpp 半群。若 S 为(左；右)本原可分的，则 S 为本原半群，且其幂等元都具有 D 关系。

证明 令 $e\in E(S)$，由 S 是(左)本原可分的，知存在 $e_\lambda\in E(S)$，$\lambda\in\Lambda$ 满足 $e\in Se_\lambda$，从而 $Se\subseteq Se_\lambda$。而 e_λ 是本原的，由引理 2.3，知 $Se\subseteq Se_\lambda$ 是极小左 $*-$ 理想，再运用引理 2.3，可得 e 是本原幂等元。故 S 为本原半群。(若 S 是右本原可分的，则存在 $e_i\in E(S)$，$i\in I$ 满足 $e\in e_iS$，于是 $eS\subseteq e_iS$，$e_ie=e$。从而 $ee_i\in E(S)$，即得 $ee_i\le e_i$，由 e_i 是本原幂等元，知 $ee_i=e_i$，故 $e\Re e_i$。而若 $f\le e$，则 $f=fe=ef\in eS=e_iS$，类似地也可得 $f\Re e_i$。因此 $e\Re f$，$e=fe=f$，即证 e 是本原的)。

事实上，我们已经证明了：任意的 $e\in E(S)$，存在 $e_\lambda\in E(S),\lambda\in\Lambda$，使得 $Se=Se_\lambda$。这意味着，eLe_λ。注意到，所有的 $Se_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ 是 S^1- 系同构，由引理 2.6 知，$e_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ 具有 D 关系，从而 S 中幂等元都具有 D 关系(S 是右本原可分的情形可类似证明)。 □

命题 3.2 令 S 为 rpp 半群，则以下各款等价：

1) S 为本原可分的；

2) S 为右本原可分的。

证明 仅需证明，$2)\Rightarrow 1)$。现设 S 为右本原可分的。考虑到，S 是 rpp 半群，显然

$$S=\bigcup\left\{L_e^*;e\in E(S)\right\}.$$

由引理 3.1，知 S 是本原半群，进而 S 的所有幂等元都是本原的，再据引理 2.3，Se 是极小左 $*-$ 理想。由引理 2.2，不难知道，$L_e\subseteq Se$，于是

$$S=\bigcup\left\{Se;e\in E(S)\right\}.$$

另一方面，据引理 3.1，S 中幂等元都具有 D 关系，利用引理 2.6，我们知道，所有 $Se\left(e\in E(S)\right)$ 都 S^1- 系同构的，这样，$S=\bigcup\left\{Se;e\in E(S)\right\}$ 为左本原可分的。故 S 为本原可分的。 □

命题 3.3 令 S 为本原可分 rpp 半群，且 $e\in E(S)/\{0\}$，则 $Le=Se/\{0\}$。

证明 若 $0\in L_e^*$，则 $e=e0=0$，与 $e\in E(S)/\{0\}$ 矛盾，故 $0\notin L_e^*$，于是显然有 $L_e^*\subseteq Se/\{0\}$。反之，令 $a\in Se/\{0\}$，注意到，Se 为 S 的左 $*-$ 理想，而 $L^*(a)$ 是 S 的含 a 的最小左 $*-$ 理想，于是 $L^*(a)\subseteq Se$。但 Se 是 0-极小左 $*-$ 理想，从而 $L^*(a)=Se=L^*(e)$，故 $a\,L^*e$。因此 $L_e^*=Se/\{0\}$ 。 □

令 I,Λ 为非空数集合，M 为幺半群，$\boldsymbol{P}=(p_{\lambda i})$ 是 M^0 上的 $\Lambda\times I$ 阶矩阵。记 $T=(M\times I\times\Lambda)\cup\{0\}$，规定

$$(a,i,\lambda)(b,j,\mu)=\begin{cases}(ap_{\lambda j}b,i,\mu) & \text{如果 } p_{\lambda j}\neq 0;\\ 0 & \text{否则,}\end{cases}$$

且 $(a,i,\lambda)\circ 0=0\circ 0=0$。容易验证，$(T,\circ)$ 构成半群。我们将称半群 T 为幺半群 M 上的以 $\boldsymbol{P}$ 为夹心阵的 Rees 矩阵半群，记为 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$。如果矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一行和每一列都有元为 M 的群元，则称 $\boldsymbol{P}$ 为正规的。

引理 3.4 对于 Rees 矩阵半群 $S=M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，若 M 为左消幺半群，且 $\boldsymbol{P}$ 为 M^0 上的正规矩阵，则

1) $E(S)=\left\{\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right):p_{\lambda i}\text{为}M\text{的群元}\right\}\cup\{0\}$；

2) S 的所有非零幂等元都是本原的；

3) $(a,i,\lambda)L^*(b,j,\mu)$ 当且仅当 $\lambda=\mu$；

4) S 的所有非零幂等元具有 D 关系；

5) S 为本原可分 rpp 半群。

证明 1) 令 $(a,i,\lambda)\in E(S)$，则

$$(a,i,\lambda)=(a,i,\lambda)(a,i,\lambda)=\left(aP_{\lambda i}a,i,\lambda\right),$$

于是 $a=aP_{\lambda i}a$，而 M 为左消幺半群，$1=P_{\lambda i}a$，其中 1 为 M 的幺元，从而 $P_{\lambda i}aP_{\lambda i}=P_{\lambda i}$，显然 $aP_{\lambda i}=aP_{\lambda i}aP_{\lambda i}$，据 M 为左消幺半群，故 $1=aP_{\lambda i}$，这说明，$P_{\lambda i}$ 为 M 的单位，且 a 为 $P_{\lambda i}$ 的逆元。易验证，$\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)\in E(S)$。因此

$$E(S)=\left\{\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right):p_{\lambda i}\text{为}M\text{的群元}\right\}\cup\{0\}.$$

2) 现令 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)\leq\left(p_{\mu j}^{-1},\mathrm{j},\mu\right)$，则 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)=\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right)=\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right)\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)$, 比较分量，得 $i=j,\lambda=\mu$，从而

$$\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)=\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right),$$

故 S 的所有非零幂等元都是本原的。

3) 由于 $\boldsymbol{P}$ 为 M 上的正规矩阵，存在 $i'\in I$ 使得 $p_{\lambda i'}$ 为 M 的单位。显然，

$$(a,i,\lambda)=(a,i,\lambda)\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right).$$

令 $(x,j,\mu),(y,k,\nu)\in S$，我们考虑如下两种情况：

$(a,i,\lambda)(x,j,\mu)=(a,i,\lambda)$，则比较分量，有 $aP_{\lambda j}x=a$，且 $\lambda=\mu$，而 M 为左消幺半群，则前一等式蕴含着：$p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda j}x=p_{\lambda i'}^{-1}$，于是

$$\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)(x,j,\mu)=\left(p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda j}x,i',\mu\right)=\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right).$$

$(a,i,\lambda)(x,j,\mu)=(a,i,\lambda)(y,k,\nu)\neq 0$，则 $\left(aP_{\lambda j}x,i,\mu\right)=\left(aP_{\lambda k}y,i,\nu\right)$，比较分量，我们有 $aP_{\lambda j}x=aP_{\lambda k}y$ 且 $\mu=\nu$。注意到，M 为左消幺半群，前一等式可推出 $p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda j}x=p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda k}y$，从而

$$\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)(x,j,\mu)=\left(p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda j}x,i',\mu\right)=\left(p_{\lambda i'}^{-1}P_{\lambda k}y,i',\nu\right)=\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)(y,k,\nu)$$

这证明了，对于 $(x,j,\mu),(y,k,\nu)\in S^1$，若 $(a,i,\lambda)(x,j,\mu)=(a,i,\lambda)(y,k,\nu)$，则

$$\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)(x,j,\mu)=\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)(y,k,\nu).$$

据引理 2.2，现在有 $(a,i,\lambda)L^*\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)$。

设 $(a,i,\lambda)L^*(b,j,\mu)$，那么由上面的证明，知 $\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)L^*(b,j,\mu)$，再由引理 2.2，我们有 $(b,j,\mu)=(b,j,\mu)\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)$，比较分量，有 $\lambda=\mu$。反之，若 $\lambda=\mu$，则由上面的证明，有 $(a,i,\lambda)L^*\left(p_{\lambda i'}^{-1},i',\lambda\right)L^*(b,j,\mu)$，于是 $(a,i,\lambda)L^*(b,j,\mu)$

4) 由

$$\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)=\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right)\left(p_{\mu j}^{-1},\mathrm{j},\lambda\right),$$

$$\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right)=\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right),$$

知 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)\Re\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right)$。另一方面，由(3)，知 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right)L^*\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right)$，从而 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\mu\right)L\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right)$。故 $\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)D\left(p_{\mu j}^{-1},j,\mu\right)$，这证明了，$S$ 的所有非零幂等元具有 D 关系。

5) 注意到，

$$\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)S=\left\{(a,i,\tau):\tau\in\Lambda,a\in M\right\}\bigcup\{0\}.$$

所以 $S=\bigcup\left\{\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)S:i\in I\right\}$，再据引理 2.6 及(2)(4)，有 $S=\bigcup\left\{\left(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda\right)S:i\in I\right\}$ 是右本原可分的。事实上，(3)的证明过程中，证明了：S 是 rpp 的。现利用命题 3.2，S 是本原可分 rpp 半群。 □

我们将称具有正规夹心矩阵的 Rees 矩阵半群为正规 Rees 矩阵半群；称保持 L^* – 类的同态为 L^* – 同态。现在我们可以给出本文的主要结果。

定理 3.5 令 S 为半群，则 S 是本原可分 rpp 半群当且仅当存在左消幺半群上正规 Rees 矩阵半群 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 和从 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 到 S 上的 L^* – 满同态 ϕ，使得

- ϕ 在 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 的正则元集合上的限制是单射；
- 对于 S 的任意正则元 a，都存在正则元 $x\in M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，使得 $x\phi=a$。

证明 $(\Rightarrow)$ 设 S 是本原可分 rpp 半群，E 为 S 的非零幂等元集。记 I 为 $E/\Re$ 的代表元集，Λ 为 E/L 的代表元集，且满足 $I\bigcap\Lambda=\{e\}$。由引理 3.1，知 S 为本原半群且其非零幂等元都具有 D 关系，于是对任意的 $a\in S$，存在 $e_i,e_\lambda\in E$ 满足 $a\in e_iS\bigcap Se_\lambda$，从而存在 $f\in\Lambda,\ g\in I$ 满足 $a\in gS\bigcap Sf$。故

$$S=\bigcup\{Sf;f\in\Lambda\}=\bigcup\{gS;g\in I\}.$$

令 $M=eSe/\{0\}$。由命题 3.3，知任意 $x\in M$，都有 eL^*x。对于 $u,v\in M$，若 $xu=xv$，则由引理 2.1，知 $u=eu=ev=v$，于是 M 是以 e 为幺元的左消幺半群。

考虑分解 $S=\bigcup\{gSf;g\in I,f\in\Lambda\}$。可证不同 gSf 的交等于 $\{0\}$ (事实上，若 $e\in gSf\bigcap hSk$ 且 $e\neq 0$，则由命题 3.3，知 $f\ L\ e\ L\ k$，又 f,k 均为 E/L 的代表元，从而 $f=k$。另一方面，由 $e\in gS\bigcap hS$，采用类似引理 3.1 中右本原情形的证明方法，证得 $g\Re e\Re h$，而 g,h 均为 $E/\Re$ 的代表元，从而 $g=h$。因此 $gSf=hSk$，故不同 gSf 的交等于 $\{0\}$。)现记 $M_{i\lambda}=iS\lambda/\{0\}$，对于 $i\in I,\lambda\in\Lambda$。对于 $h\in I\bigcup\Lambda$，由于 eDh，存在 $a_h\in hSe$，$b_h\in eSh$ 使得 $h=a_hbh$，$e=b_ha_h$ (事实上，若 eDh，则存在 $a\in V(S)$ 满足 $aa'=e,\ a'a=h$，又 $a\Re aa'=e$，$aLa'a=h$，从而 $a\in eSh$，同理，$a'\in hSe$)。为方便计，对于给定的 h，我们取定 a_h,b_h，且 $a_e=e=b_e$。规定

$$\phi_{i\lambda}:M\to M_{i\lambda};x\mapsto a_ixb_\lambda.$$

显然，$\phi_{i\lambda}$ 有定义。注意到 $b_i(a_ixb_\lambda)a_\lambda=exe=x$，基于此，我们容易证明：$\phi_{i\lambda}$ 是单射。另一方面，对于任意 $y\in M_{i\lambda}$，显然 $b_iya_\lambda\in M$，并且 $(b_iya_\lambda)\phi_{i\lambda}=a_ib_iya_\lambda b_\lambda=iy\lambda=y$，于是 $\phi_{i\lambda}$ 是满射。故 $\phi_{i\lambda}$ 是双射。

易知，$P_{\lambda i}=b_\lambda a_i\in M^0$。记 $\boldsymbol{P}=(P_{\lambda i}),(\lambda\in\Lambda,i\in I)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是 M^0 上的 $\Lambda\times I$ 矩阵。对于任意 $i\in I$，不难知道，$i\in iS=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}iS\lambda$，即存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $iS\lambda$ 含有非零幂等元 w，由上面的证明，知 $w\in M_{i\lambda}=a_iMb_\lambda$。设 $w=a_idb_\lambda$，那么 $w=a_idb_\lambda\ a_idb_\lambda=w=ww=a_i\circ db_\lambda a_id\circ b_\lambda$，从而

$$d=b_ia_idb_\lambda a_\lambda=b_ia_i\circ db_\lambda a_id\circ b_\lambda a_\lambda=db_\lambda a_id,$$

而 M 为左消幺半群，于是 $e=b_\lambda a_id$，进而 $P_{\lambda i}=b_\lambda a_i$ 为 M 的正则元，从而 $P_{\lambda i}$ 为 M 的单位。类似地，对于任意 $\lambda\in\Lambda$，存在 $i\in I$ 使得 $P_{\lambda i}$ 为 M 的单位。因此 $\boldsymbol{P}$ 为正规 Rees 矩阵。构作 Rees 半群 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$。定义

$$M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})\to S;\ (x,i,\lambda)\mapsto aixb\lambda;\ 0\mapsto 0.$$

则 ϕ 是 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 到 S 的映射。因为 $S=\left(\cup_{i\in I,\lambda\in\Lambda}M_{i\lambda}\right)\bigcup\{0\}$，所以 ϕ 是满射。

下证明：ϕ 是半群同态。事实上，

$$((x,i,\lambda)(y,j,\mu))\phi=(xb_\lambda a_jy,i,\mu)\phi=a_ixb_\lambda\circ a_jyb_\mu=(x,i,\lambda)\phi\circ(y,j,\mu)\phi,$$

于是 ϕ 为半群同态。

现令 $(x,i,\lambda),(y,j,\mu)\in M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，若 $(x,i,\lambda)\phi=(y,j,\mu)\phi$，则 $a_ixb_\lambda=a_jyb_\mu$，再据命题 3.3，有 $\lambda L^*a_ixb_\lambda=a_jyb_\mu L^*\mu$，进而 $\lambda L\mu$，而 λ,μ 均为 E/L 的代表元，故 $\lambda=\mu$。如果 $(x,i,\lambda),(y,j,\mu)$ 都是半群 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 的正则元，那么 a_ixb_λ 是 S 的正则元。假设 $g\in E(S)$，且 $g\Re a_ixb_\lambda$，$i\circ a_ixb_\lambda=a_ixb_\lambda$，是 $ig=g$，进而 $gi\in E(S),gi\leq i$，现在由引理 3.1，知 $gi=i$，$i\Re g\Re a_ixb_\lambda$；同理，$j\Re a_jyb_\mu=a_ixb_\lambda$。注意到，$i,j$ 都是 $E/\Re$ 的代表元，所以 $i=j$。这样，

$$x=exe=b_i\circ a_ixb_\lambda\circ a_\lambda=b_j\circ a_jyb_\mu\circ a_\mu=eye=y.$$

因此 ϕ 在 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 的正则元集合上的限制是单射。

另一方面，若 a_ixb_λ 为 S 的非零正则元，则存在 $y\in S$ 使得 $a_ixb_\lambda=a_ixb_\lambda ya_ixb_\lambda$ 于是

$$x=b_i(a_ixb_\lambda)a_\lambda=b_i(a_ixb_\lambda ya_ixb_\lambda)a_\lambda=ex\circ b_\lambda ya_i\circ xe=x\circ b_\lambda ya_i\circ x.$$

由于 $S=\left(\bigcup_{i\in I,\lambda\in\Lambda}M_{i\lambda}\right)\bigcup\{0\}$，在 $k\in I,\tau\in\Lambda$ 使得 $y\in M_{k\tau}$，而 $y=a_kzb_\tau$，中 $z\in M$。现在

$$(x,i,\lambda)(z,k,\tau)(x,i,\lambda)=(x\circ b_\lambda a_kzb_\tau a_i\circ x,i,\lambda)=(x\circ b_\lambda ya_i\circ x,i,\lambda)=(x,i,\lambda)$$

且 $(x,i,\lambda)\phi=a_ixb_\lambda$。这样，证明了：对于 S 任意正则元 a，存在正则元 $x\in M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，得 $x\phi=a$。

最后，证明：ϕ 为 L^*－同态。为此，设 $(x,i,\lambda),(y,j,\mu)\in M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，且

$$((x,i,\lambda),(y,j,\mu))\in L^*,$$

由引理 3.4，知 $\lambda=\mu$，这样 $a_ixb_\lambda,a_jyb_\mu\in S\lambda$，据命题 3.3，有 $(a_ixb_\lambda)L^*(a_jyb_\mu)$，故 ϕ 保持 L^*－类，即 ϕ 为 L^*－同态。

$(\Leftarrow)$ 设存在左消幺半群上正规 Rees 矩阵半群 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 和从 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 到 S 上的 L^* – 满同态 ϕ，使得

- ϕ 在 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 的正则元集合上的限制是单射；
- 对于 S 的任意正则元 a，都存在正则元 $x \in M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$，使得 $x\phi = a$。

由于 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 是 rpp 的，我们知道，S 是 rpp 的。另一方面，由于上面两性质，我们知道，$T = M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 的正则元集在 ϕ 下的像恰为 S 的正则元集。这一性质表明，S 的所有非零幂等元都是本原的。另一方面，由引理 3.4(5)的证明，知 $T = \cup_{i\in I}\left(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda\right)T$ 是右本原可分的。易知，

$$S = T\phi = \bigcup_{i\in I}\left(\left(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda\right)\phi\right)T\phi$$

是 S 的右本原分解，再据命题 3.2，S 是本原可分 rpp 半群。 □

注意到，正则左消幺半群是群。所以下面是定理 3.5 的直接推论。

推论 3.6 半群是本原可分正则半群当且仅当它同构于 0 – 群(0-group)上的 Rees 矩阵半群，即它是完全 0 – 单半群(completely 0-simple semigroup)。

现在让我们回到定理 3.5 必要性的证明，叙述“若 $(x,i,\lambda)\phi = (y,j,\mu)\phi$，则 $a_i x b_\lambda = a_j y b_\mu$，再据命题 3.3，有 $\lambda L^* a_i x b_\lambda = a_j y b_\mu L^* \mu$，进而 $\lambda L \mu$，而 λ,μ 均为 E/L 的代表元，故 $\lambda = \mu$”中，我们仅用到了条件：$a_i x b_\lambda = a_j y b_\mu$ 与某幂等元具有 L^* – 关系。因此若 $a_i x b_\lambda = a_j y b_\mu$ 与某幂等元具有 $\mathfrak{R}^*$ – 关系，则 $i = j$。这时，我们有

$$x = b_i \circ a_i x b_\lambda \circ a_\lambda = b_i \circ a_i y b_\lambda \circ a_\lambda = eye = y\,.$$

这证明了，若 S 是富足半群，则 ϕ 是半群同构。由命题 3.3 及其对偶，知 M 为包含幂等元 e 的 H^*-类，故 M 为消去幺半群。因此，我们有

定理 3.7 令 I,Λ 为非空集合，M 为消去幺半群。若 $\boldsymbol{P}$ 为 M^0 上正规 $\Lambda \times I$ 矩阵，则 $M^0(M;I,\Lambda;\boldsymbol{P})$ 是本原可分富足半群。反之，任一本原可分富足半群均可以这样构作。

参考文献 (References)

[1] K. S. S. Nambooripad. Structure of regular semigroups II. Semigroup Forum, 1975, 9: 364-371.
[2] K. S. S. Nambooripad. Structure of regular semigroups I. American Mathematical Society, 1979, 22(224): vii+119.
[3] O. Steinfeld. On a generalization of completely 0-simple semigroups. Acta Scientia Mathematica (Szeged), 1967, 28: 135-145.
[4] J. B. Fountain. Abundant semigroups. Proceedings London Mathematical Society, 1982, 44(3): 103-129.
[5] J. M. Howie. An introduction to semigroup theory. London: Academic Press, 1976.
[6] J. B. Fountain. Adequate semigroups. Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, 1979, 22(2): 113-125.

