Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 185-191
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24029 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On the Strong Law of Large Numbers for Generalized Pairwise *NQD* Random Sequences*

Zonggang Deng, Jinyu Zhou, Qianjun Xiao, Yun Ma

Hunan Vocational Institute of Technology, Xiangtan
Email: 744690180@qq.com

Received: Jun. 18th, 2012; revised: Jul. 8th, 2012; accepted: Jul. 16th, 2012

Abstract: This paper mainly studies the generalized pairwise *NQD* random sequences of nonnegative random variables sequences of Kolmogorov strong law of large numbers, and zero mean of the generalized pairwise *NQD* random sequences under the condition of $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)<\infty$, $0<p\le 1$ or $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}\right)<\infty$, $1<p\le 2$ of the strong law of large numbers, the identically distributed of pairwise *NQD* random sequences of the Kolmogorov strong law of large numbers for a class of generalized to in a wide range of conditions of identically distributed of generalized pairwise *NQD* random sequences of the strong law of large numbers.

Keywords: Generalized Pairwise *NQD* Sequences; Strong Law of Large Numbers; Kronecker Lemma; Generalized Three Series Theorem

两两广义 *NQD* 列的强大数定律*

邓总纲，周金玉，肖前军，马　云

湖南理工职业技术学院，湘潭
Email: 744690180@qq.com

收稿日期：2012 年 6 月 18 日；修回日期：2012 年 7 月 8 日；录用日期：2012 年 7 月 16 日

摘　要：本文主要研究了两两广义 *NQD* 列关于非负随机变量序列的 Kolmogorov 强大数定律和零均值的两两广义 *NQD* 列在条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)<\infty$，$0<p\le 1$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}\right)<\infty$，$1<p\le 2$ 下的强大数定律，把同分布的两两 *NQD* 列的 Kolmogorov 强大数定律推广到了在一类广泛的条件下的同分布的两两广义 *NQD* 列的强大数定律。

关键词：两两广义 *NQD* 列；强大数定律；Kronecker 引理；广义三级数定理

1. 引言

两两 *NQD* 列是一类相当广泛的随机变量序列，自从 1966 年由著名统计学家 *Lehmann*[1]提出以来，关于两

*基金项目：湖南省教育厅资助科研项目(两两广义 NQD 列的性质 11C0637；基于图形表示方法和分形理论的生物序列分析及其应用 10C0185)。

两 *NQD* 列极限理论的研究已取得很多成果[2-8]。在自定义的两两广义 *NQD* 列的定义下，已经获得了两两广义 *NQD* 列的基本性质、Kolmogorov 不等式、弱大数定律、*r* 阶平均收敛性和几乎必然收敛性[2,9]。

本文研究了两两广义 *NQD* 列关于非负随机变量序列的 Kolmogorov 强大数定律和零均值的两两广义 *NQD* 列在条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)<\infty$，$0<p\le 1$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}\right)<\infty$，$1<p\le 2$ 下的强大数定律。

本文约定：文中出现的 *c* 总表示正常数，它在不同的地方可以表示不同的值；*i, j, k, n* 表示整数，*R* 是实数集，*E* 是期望，*P* 表示概率。

2. 定义与引理

定义[9] 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是定义在同一概率空间上的随机变量序列，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ($n\ge 1$)。集合 *A* 的示性函数记为 I_A，称随机变量 *X* 和 *Y* 是广义的 *NQD* 的，若对任意的 $x,y\in R$，存在常数 $c\ge 1$，都有

$$P(X<x,Y<y)\le cP(X<x)P(Y<y),$$

$$P(X\succ x,Y\succ y)\le cP(X\succ x)P(Y\succ y)\quad (c\ge 1).$$

称随机变量序列 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是两两广义 *NQD* 列，若对任意 $i\ne j$，X_i 与 X_j 是广义 *NQD* 的。

称随机变量序列 $\{X_k,k\ge 1\}$ 是 *p* 阶 *Cesaro* 一致可积的 $(p\succ 0)$，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\ge 1}n^{-1}\sum_{k\le n}E|X_k|^p I(|X_k|\ge x)=0$$

下面给出三个引理：

引理 1[2] (Kronecker 引理)设 $\{a_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 是两实数序列，$0<a_n\uparrow\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{a_n}$ 收敛，那么 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\to 0$，*a.s*.

引理 2[3] (广义三级数定理)设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是两两广义 *NQD* 列，$EX_n=0$。对某 $c\succ 0$，记 $X_n^c=-c\cdot I\{X_n<-c\}+X_n\cdot I\{|X_n|\le c\}+c\cdot I\{X_n>c\}$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c)<\infty \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^c<\infty \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nVarX_n^c<\infty \tag{3}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n<\infty \quad a.s \text{收敛} \tag{4}$$

且条件(1)也是条件(4)的必要条件。

引理 3[9] 设随机变量 *X* 和 *Y* 是广义 *NQD* 的，则

1) $EXY\le cEXEY$；

2) 如果 *f, g* 同为非降(或非增)函数，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为广义 *NQD* 的。

3. 主要结果

定理 1 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是两两广义 *NQD* 列，$\{g_n(x)\}$ 是偶函数序列，它们在区间 $x>0$ 中取正值、不减，而且对每一 *n* 满足下列条件之一：

1) 在区间 $x>0$ 中，$\frac{x}{g_n(x)}$ 不减；

2) 在区间 $x>0$ 中，$\frac{x}{g_n(x)}$ 和 $\frac{g_n(x)}{x^2}$ 都是不增的，且 $EX_n=0$，此外 $\{a_n\}$ 是常数列，满足 $0<a_n\uparrow\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty$，则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{a_k}\to 0, a.s$。

证明：由引理 1，要证 $\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{a_k}\to 0, a.s$，只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{a_n}$，$a.s$ 收敛因为 $\left\{\frac{X_n}{a_n}\right\}$ 仍是两两广义 NQD 列，由引理 2 知只需验证(1)~(3)式成立即可。

其中 $c=1$，由 $g_n(x)$ 当 $x>0$ 时不减的，有

$$P\{|X_n|\ge a_n\}=\int_{|X_n|\ge a_n}\mathrm{d}p\le\int_{|X_n|\ge a_n}\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}\mathrm{d}p=\frac{1}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|\ge a_n}g_n(X_n)\mathrm{d}p=\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}$$

由条件知

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\ge a_n\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\frac{Eg_n(x_n)}{g_n(a_n)}<\infty$$

假设对某个 n，函数 $g_n(x)$ 满足条件(1)，则在区间 $|x|\le a_n$ 中

$$\frac{|x|}{g_n(x)}\le\frac{a_n}{g_n(a_n)}$$

$$\frac{x^2}{a_n^2}\le\frac{g_n^2(x)}{g_n^2(a_n)}\le\frac{g_n(x_n)}{g_n(a_n)}$$

对于满足条件(2)的 $g_n(x)$，在同一区间中，由于 $\frac{g_n(x)}{x^2}$ 不增，所以

$$\frac{x^2}{g_n(x)}\le\frac{{a_n}^2}{g_n(a_n)}$$

因此，无论 $g_n(x)$ 满足(1)或(2)，都有

$$\frac{x^2}{a_n^2}\le\frac{g_n(x_n)}{g_n(a_n)}$$

对任意 n，由 C_r 不等式有

$$E\left(X_n^{a_n}\right)^2\le E\left(a_n^2I(X_n<-a_n)+X_n^2I(|X_n|\le a_n)+a_n^2I(X_n>a_n)\right)$$

$$\prec\prec E\left(a_n^2I(|X_n|>a_n)+{X_n}^2I(|X_n|\le a_n)\right)$$

（“$\prec\prec$”表示通常的大“O”），由于 $g_n(x)$ 是偶函数，在 $(0,\infty)$ 不减，所以

$$Ea_n^2I(|X_n|>a_n)\le Ea_n^2I(|X_n|>a_n)\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}\le\frac{a_n^2}{g_n(a_n)}g_n(X_n)$$

由 $\frac{x^2}{a_n^2}\le\frac{g_n(x_n)}{g_n(a_n)}$ 知 $x^2\le\frac{g_n(x_n)}{g_n(a_n)}a_n^2$

$$EX_n^2 I\left(\left|X_n\right| \le a_n\right) \le \int_{\left|X_n\right| \le a_n} X_n^2 \mathrm{d}p \le \frac{a_n^2}{g_n\left(a_n\right)} \int_{\left|X_n\right| \le a_n} g_n\left(X_n\right) \mathrm{d}p \le \frac{a_n^2}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right)$$

所以 $E\left(X_n^{a_n}\right)^2 \prec\prec \frac{a_n^2}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right)$ 结合条件得 $\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{E\left(X_n^{a_n}\right)^2}{a_n^2} \prec\prec \sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{Eg_n\left(X_n\right)}{g_n\left(a_n\right)} < \infty$ 。

另外，若条件(1)满足，则

$$\begin{aligned}
\left|EX_n^{a_n}\right| &= \left|E\left(-a_n I\left(X_n < -a_n\right) + X_n I\left(\left|X_n\right| \le a_n\right) + a_n I\left(X_n > a_n\right)\right)\right| \le Ea_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right) + \left|EX_n I\left(\left|X_n\right| \le a_n\right)\right| \\
&\le Ea_n \frac{g_n\left(X_n\right)}{g_n\left(a_n\right)} I\left(\left|X_n\right| > a_n\right) + \left|\int_{\left|X_n\right| \le a_n} X_n \mathrm{d}p\right| \le \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right) + \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} \int_{\left|X_n\right| \le a_n} g_n\left(X_n\right) \mathrm{d}p \\
&\le 2 \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right)
\end{aligned}$$

若条件(2)满足，由 $EX_n = 0, \frac{x}{g_n\left(x\right)}$ 不增，得

$$\begin{aligned}
\left|EX_n^{a_n}\right| &\le Ea_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right) + EX_n I\left(\left|X_n\right| \le a_n\right) = Ea_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right) + \left|EX_n - EX_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right)\right| \\
&= Ea_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right) + \left|EX_n I\left(\left|X_n\right| > a_n\right)\right| \le \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right) + \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} \int_{\left|X_n\right| > a_n} g_n\left(X_n\right) \mathrm{d}p \\
&\le 2 \frac{a_n}{g_n\left(a_n\right)} Eg_n\left(X_n\right)
\end{aligned}$$

所以都满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \frac{X_n^{a_n}}{a_n} \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eg_n\left(X_n\right)}{g_n\left(a_n\right)} < \infty$$

由引理 2 得 $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{a_k} \to 0, a.s$ 。

证毕。

在定理 1 中，令 $g_n\left(x\right) = \left|x\right|^p$ ， $p > 0$ ，可得到一个重要的推论：

推论 1 设 $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ 是两两广义 *NQD* 列， $0 < a_n \uparrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{E\left|X_n\right|^p}{a_n{}^p} < \infty ，\quad 0 < p \le 2$$

且当 $1 < p \le 2$ 时， $EX_n = 0$ ，则 $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{a_k} \to 0, a.s$ 。

定理 2 设 $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ 为零均值的两两广义 *NQD* 列，若下列条件之一成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 nE\left(\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p + \left|X_n\right|^p}\right) < \infty ，\quad 0 < p \le 1 \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 nE\left(\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p + Ma_n\left|X_n\right|^{p-1}}\right) < \infty ，\quad 1 < p \le 2 \tag{2}$$

其中 $M > 0$ ， $\left\{a_n\right\}$ 是常数列且满足 $0 < a_n \uparrow \infty$ 则 $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{a_k} \to 0, a.s$ 。

证明：当$0<p\le 1$，$|X_n|\ge Ma_n>0$时，有$\dfrac{2|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\ge 1$

所以$P(|X_n|\ge Ma_n)=E(I(|X_n|\ge Ma_n))\le E\left(\dfrac{2|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)$；

所以$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\ge Ma_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\dfrac{2|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\dfrac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\right)<\infty$。

当$1<p\le 2$，$|X_n|\ge Ma_n>0$时，

$$1=\frac{2|X_n|^p}{|X_n|^p+|X_n|^p}\le\frac{2|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}$$

$$P(|X_n|\ge Ma_n)=E(I(|X_n|\ge Ma_n))\le E\frac{2|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}<\infty$$

从而当(1)或(2)成立时，有$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\dfrac{X_n}{a_n}\right|\ge M\right)<\infty$成立。

记$X_n^c=-Ma_nI(X_n<-Ma_n)+X_nI(|X_n|\le Ma_n)+Ma_nI(X_n>Ma_n)$由引理 3 知$\{X_n^c\}$仍为两两广义 *NQD* 列，从而$\left\{\dfrac{X_n^c}{a_n}\right\}$也是两两广义 *NQD* 列，当$0<p\le 1$，$|X_n|\le Ma_n$时，有$|X_n|^{1-p}\le|Ma_n|^{1-p}$所以$|X_n|^{p-1}\ge|Ma_n|^{p-1}$。

因为

$$\left|EX_nI(|X_n|\le Ma_n)\right|\le|EX_n|I(|X_n|\le Ma_n)\le c\cdot E\frac{|X_n|}{1+1}\le c\cdot E\frac{|X_n|}{1+\left|\dfrac{X_n}{Ma_n}\right|^p}=c\cdot E\frac{|X_n|(Ma_n)^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}$$

$$\le c\cdot E\frac{|X_n|(Ma_n)^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\cdot\frac{|X_n|^{p-1}}{|Ma_n|^{p-1}}=c\cdot E\frac{|X_n|^pMa_n}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}\le c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}$$

所以

$$\left|EX_n^c\right|\le E|Ma_n|I(|X_n|>Ma_n)+\left|EX_nI(|X_n|\le Ma_n)\right|\le ca_nEI(|X_n|>Ma_n)+c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}$$

$$\le c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+|X_n|^p}$$

当$1<p\le 2$，由$EX_n=0$有

$$\left|EX_n^c\right|=E|Ma_n|I(|X_n|>Ma_n)+\left|EX_nI(|X_n|\le Ma_n)\right|\le c\cdot a_nEI(|X_n|>Ma_n)+E|X_n|I(|X_n|>Ma_n)$$

$$\le c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}+c\cdot E\frac{|X_n|^p}{(X_n)^{p-1}+|X_n|^{p-1}}$$

$$\le c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}+c\cdot E\frac{Ma_n|X_n|^p}{Ma_n(X_n)^{p-1}+(Ma_n)^p}\le c\cdot a_nE\frac{|X_n|^p}{(Ma_n)^p+Ma_n|X_n|^{p-1}}$$

从而当(1)或(2)成立时，有$\sum_{n=1}^{\infty}E\dfrac{X_n^c}{a_n}<\infty$成立。

最后，若 $0<p\le 2$，由 C_r 不等式有

$$\begin{aligned}E\left(X_n^c\right)^2&=E\left(-Ma_nI\left(X_n<-Ma_n\right)+X_nI\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)+Ma_nI\left(X_n>Ma_n\right)\right)^2\\&\le c\cdot\left(E\left(Ma_n\right)^2I\left(\left|X_n\right|>Ma_n\right)+EX_n{}^2I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\right)\\&=c\cdot a_n^2EI\left(\left|X_n\right|>Ma_n\right)+c\cdot EX_n^2I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\end{aligned}$$

当 $0<p\le 1$，$\left|X_n\right|\le Ma_n$ 时

$$EX_n^2I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\le Ma_n\cdot E\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\le c\cdot a_n^2E\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+\left|X_n\right|^p}$$

又因为

$$a_n^2EI\left(\left|X_n\right|>Ma_n\right)\le c\cdot a_n^2E\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+\left|X_n\right|^p}$$

所以当(1)成立时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\cdot E\left(\frac{X_n^c}{a_n}\right)^2\le c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\cdot E\left(\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+\left|X_n\right|^p}\right)\text{成立}$$

当 $1<p\le 2$，$\left|X_n\right|\le Ma_n$ 时，有

$$a_n^2EI\left(\left|X_n\right|>Ma_n\right)\le c\cdot a_n^2E\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+Ma_n\left|X_n\right|^{p-1}}$$

$$\begin{aligned}EX_n^2I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)&=\left|E\left(\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\cdot\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\right)\right|\le Ma_n\cdot\left|E\left(\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|\le Ma_n\right)\right)\right|\\&=Ma_n\cdot E\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|>Ma_n\right)\le c\cdot a_n^2E\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+Ma_n\left|X_n\right|^{p-1}}\end{aligned}\quad\text{成立。}$$

若(2)式成立时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n\cdot E\left(X_n^c\right)^2}{a_n^2}\le c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\cdot E\left(\frac{\left|X_n\right|^p}{\left(Ma_n\right)^p+Ma_n\left|X_n\right|^{p-1}}\right)<\infty\text{ 成立。}$$

总之有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n\cdot E\left(X_n^c\right)^2}{a_n^2}<\infty\text{ 成立。}$$

由引理 2 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{a_n}$ $a.s$ 收敛，再由引理 1 知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{a_k}\to 0\quad a.s$$

证毕。

4. 结语

本文主要研究了两两广义 *NQD* 列的强大数定律，把同分布的两两 *NQD* 列的 Kolmogorov 强大数定律推广

到了在一类广泛的条件下的不同分布的两两广义 *NQD* 列的强大数定律，从而丰富了 *NQD* 列方面的结果，对进一步研究极限理论有一定的理论价值。

参考文献 (References)

[1] E. L. Lehmann. Some concepts of dependence. The Annals of Mathematical Statistics, 1966, 37(5): 1137-1153.
[2] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 随机序列之和极限理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 223-227.
[3] 邓总纲, 范伟平. 两两广义 *NQD* 列的 r 阶平均收敛性和几乎必然收敛性[J]. Pure Mathematics, 2011, 1(2): 132-135.
[4] 甘师信. B 值随机元阵列加权和的收敛性和大数定律[J]. 武汉大学学报, 1997, 43(5): 569-574.
[5] 陆朝阳, 赵选民. 两两 *NQD* 的强收敛性质[J]. 工程数学学报, 2007, 24(6): 1015-1022.
[6] 吴群英. 两两 *NQD* 的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.
[7] 万成高. 两两 *NQD* 的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 253-261.
[8] 陈平炎. 两两 *NQD* 的强大数定律[J]. 数学物理学报, 2005, 25(A): 386-392.
[9] 邓总纲. 两两广义 *NQD* 列的一些性质[J]. 汕头大学学报, 2009, 2: 20-26.

