Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 263-267
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24040 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

A Note on Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing One Value*

Jindong Li

Department of Mathematics, College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu
Email: jd-li86cdut@163.com

Received: Aug. 11th, 2012; revised: Aug. 26th, 2012; accepted: Sep. 11th, 2012

Abstract: In this paper, we study the uniqueness of meromorphic functions sharing one value, prove two main theorems which generalize and improve some results earlier given by T. D. Zhang and W. R. Lv in [6].

Keywords: Meromorphic Function; Uniqueness

关于分担一个值的亚纯函数的唯一性的一个注记*

李进东

成都理工大学，管理科学学院数学系，成都
Email: jd-li86cdut@163.com

收稿日期：2012 年 8 月 11 日；修回日期：2012 年 8 月 26 日；录用日期：2012 年 9 月 11 日

摘　要：本文研究了分担一个值的亚纯函数的唯一性，得到两个结果，这改进了张同对、吕魏然的一个结果。

关键词：亚纯函数；唯一性

1. 引言

本文采用 Nevanlinna 中的标准记号[1-3]，我们用 $N_{11}\left(r,\dfrac{1}{f-1}\right)$表示 f 与 g 的单级 1 值点的计数函数，$\overline{N}_L\left(r,\dfrac{1}{f-1}\right)$表示 f 与 g 的 1 值点重数不等的，但 f 的 1 值点重数大于 g 的计数函数。记

$$N_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\cdots+\overline{N}_{(k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$

定义 设 k 是一个正整数或无穷大，$E_f(a,k)$ 表示 f 的所有 m 重 a 值点的集合，其中当 $m\le k$ 时，计 m 次，当 $m>k$ 时，计 $m+1$ 次。如果 $E_f(a,k)=E_g(a,k)$，我们 f 与 g 以权 k 分担 a，表示为 f 与 g 分担(a, k)。f 与 g IM 或 CM 分担 a 当且仅当 f 与 g 分担$(a, 0)$或(a,∞)。显然对任何整数 p, $0<p<k$，若 f 与 g 分担(a, k)，则 f 与 g 分担(a, p)。

2001 年，方明亮[4]证明了以下定理。

定理 A 设 f 与 g 为两个非常数的整函数，n,k 为满足 $n>2k+4$。若 $\left(f^n(z)\right)^{(k)}$ 与 $\left[g^n(z)\right]^{(k)}$ CM 分担 1，则 $f(z)=c_1e^{cz}, g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$；或者 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^n=1$。

*资助信息：数学地质四川省重点实验室开放基金资助项目(SCSXDZ2011008)。

2007 年，S. S. B. hoosnurmanth 和 R. S. Dyavanl[5]推广定理 A，得到

定理 B 设 f 与 g 为两个非常数的亚纯函数，n,k 为满足 $n>3k+8$。若 $\left[f^n(z)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(z)\right]^{(k)}$ CM 分担 1，则 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$；或者 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^n=1$。

2008 年，张同对和吕魏然[6]运用权分担的思想改定理 B，获得

定理 C 设 f 与 g 为两个非常数的亚纯函数，n,k 为满足 $n>5k+11$。若 $\left[f^n(z)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(z)\right]^{(k)}$ 分担 1(1,1)，则 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$；或者 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^n=1$。

本文对定理 C 做一个进一步的改进，证明了以下结论

定理 1.1 设 f 与 g 为两个非常数的亚纯函数，n,k 为满足 $n>5k+10$。若 $\left[f^n(z)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(z)\right]^{(k)}$ 分担 1(1,1)，则 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$；或者 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^n=1$。

定理 1.2 设 f 与 g 为两个非常数的整函数，n,k 为满足 $n>3k+5$。若 $\left[f^n(z)\right]^{(k)}$ 与 $\left[g^n(z)\right]^{(k)}$ 分担 1(1,1)，则 $f(z)=c_1e^{cz},g(z)=c_2e^{-cz}$，其中 c,c_1,c_2 满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$；或者 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^n=1$。

2. 主要引理

引理 2.1[3] 设 f 为非常数的亚纯函数，$a_0,a_1,\cdots,a_n\,(a_n\neq 0)$ 为有穷复数，则

$$T\left(r,a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_0\right)=nT(r,f)+S(r,f)$$

引理 2.2[3] 设 f 为非常数的亚纯函数，k 为正整数，c 为非零有穷复数，则

$$\begin{aligned}T(r,f)&\le\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-c}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f)\\&\le\overline{N}(r,f)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-c}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f)\end{aligned}$$

这里 $N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$ 表示为 $f^{(k+1)}=0$ 但 $f\left(f^{(k)}-c\right)\neq 0$ 的计数函数。

引理 2.3[6] 设 f 为非常数的亚纯函数，k,p 为两个正整数，则

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f)$$

显然 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)=N_1\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)$。

3. 定理的证明

我们仅证定理 1.1，定理 1.2 能类似证明。

令 $F(z)=f^n,G(z)=g^n$，则由定理条件若 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$ 分担 1(1,1)。

$$\Theta(0,F)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^n}\right)}{nT(r,f)}\ge 1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{nT(r,f)}\ge\frac{n-1}{n}\tag{3.1}$$

类似的，

$$\Theta(0,G)\ge\frac{n-1}{n}\tag{3.2}$$

$$\Theta(\infty, F) \ge \frac{n-1}{n} \tag{3.3}$$

$$\Theta(\infty, G) \ge \frac{n-1}{n} \tag{3.4}$$

同时，

$$\begin{aligned}\delta_{k+1}(0,F) &= 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)}{T(r,F)} \ge 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{(k+1)N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)}{T(r,F)} \\ &= 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{(k+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{nT(r,F)} \ge 1-\frac{k+1}{n} \ge \frac{n-(k+1)}{n}\end{aligned} \tag{3.5}$$

同理

$$\delta_{k+1}(0,G) \ge \frac{n-(k+1)}{n} \tag{3.6}$$

设

$$h(z) = \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}} - 2\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1} - \frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}} + 2\frac{G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1} \tag{3.7}$$

假设 $h(z)$ 不恒等于零，如果 z_0 是 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$ 的简单 1 值点，代入(3.7)，我们看到 z_0 是 $h(z)$ 的零点，故

$$\begin{aligned}N_{11}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right) &= N_{11}\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right) \le \overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right) \le T(r,h)+O(1) \\ &\le N(r,h)+S(r,F)+S(r,G)\end{aligned} \tag{3.8}$$

根据(3.7)，我们有

$$\begin{aligned}N(r,h) \le{}& \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{F^{(k+1)}}\right) \\ &+N_0\left(r,\frac{1}{G^{(k+1)}}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)\end{aligned} \tag{3.9}$$

这里 $N_0\left(r,\frac{1}{F^{(k+1)}}\right)$ 表示为 $F^{(k+1)}=0$ 但 $F\left(F^{(k)}-c\right)\ne 0$ 的计数函数。

根据引理 2.2，

$$T(r,F) \le \overline{N}(r,F)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-c}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{F^{(k+1)}}\right)+S(r,F) \tag{3.10}$$

$$T(r,G) \le \overline{N}(r,G)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-c}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{G^{(k+1)}}\right)+S(r,G) \tag{3.11}$$

因为 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$ 分担 1(1,0)，所以

$$\begin{aligned}&\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right) \\ &= 2N_{11}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

这里 $\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)$ 表示 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$ 的公共的重数大于等于 2 的 1 值点的计数函数。

由(3.8)、(3.9)、(3.12)有

$$\begin{aligned}
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)\\
&\le N_{11}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+3\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+3\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)\\
&+N_0\left(r,\frac{1}{F^{(k+1)}}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G^{(k+1)}}\right)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)
\end{aligned}\tag{3.13}$$

因为 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$ 分担 1(1,1)，所以容易看到

$$\begin{aligned}
&N_{11}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+3\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)\\
&\le N\left(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}\right)+S(r,F)+S(r,G)\le T\left(r,G^{(k)}\right)+S(r,F)+S(r,G)\\
&\le T(r,G)+k\overline{N}(r,G)+S(r,F)+S(r,G)
\end{aligned}\tag{3.14}$$

由(3.10)、(3.11)、(3.13)、(3.14)，我们得到

$$\begin{aligned}
&T(r,F)+T(r,G)\le 2\overline{N}(r,F)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)+2\overline{N}(r,G)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{G}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+T(r,G)+k\overline{N}(r,G)\\
&+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)+S(r,F)+S(r,G)
\end{aligned}\tag{3.15}$$

此外，根据引理 2.3，我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}\right)\le N\left(r,\frac{F^{(k)}}{F^{(k+1)}}\right)\\
&\le N\left(r,\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}}\right)+S(r,F)\le \overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}}\right)+S(r,F)\\
&=N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}}\right)+(k+1)\overline{N}(r,F)+S(r,F)
\end{aligned}\tag{3.16}$$

由(3.15)和(3.16)，得到

$$\begin{aligned}
T(r,F)\le(k+3)\overline{N}(r,F)+(k+2)\overline{N}(r,G)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)\\
+2N_{k+1}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,F)+S(r,G)
\end{aligned}$$

不失一般性，我们假设 $T(r,G)\le T(r,F), r\in I$, I 为一个具有无穷测度的集合，则

$$\begin{aligned}
&T(r,F)\\
&\le\left\{\left[(2k+10)-(k+3)\Theta(\infty,F)-(k+2)\Theta(\infty,G)-\Theta(0,F)-\Theta(0,G)-2\delta_{k+1}(0,F)-\delta_{k+1}(0,G)\right]+\varepsilon\right\}T(r,F)\\
&+S(r,F)
\end{aligned}\tag{3.17}$$

这里$0<\varepsilon<\Delta-(2k+9)$

即$\left[\Delta-(2k+9)-\varepsilon\right]T(r,F)\le S(r,F)$

故

$$\Delta\le(2k+9) \tag{3.18}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta &= (k+3)\Theta(\infty,F)+(k+2)\Theta(\infty,G)+\Theta(0,F)+\Theta(0,G)+2\delta_{k+1}(0,F)+\delta_{k+1}(0,G)\\ &\ge(k+3)\frac{n-1}{n}+(k+2)\frac{n-1}{n}+2\frac{n-1}{n}+3\frac{n-(k+1)}{n}=2k+10-\frac{5k+10}{n}\end{aligned}$$

注意到(3.18)，我们得到$n\le5k+10$这与条件$n>5k+10$矛盾。

故$h(z)\equiv0$，即

$$\frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}-2\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}\equiv\frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}}-2\frac{G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1}$$

通过积分有，$\dfrac{1}{F^{(k)}-1}=\dfrac{bG^{(k)}+a-b}{G^{(k)}-1}$, 这里$a\ne0,b$为常数。接下来，采用文[6]中类似的讨论可以得到定理1.1的结论，在此我们省去细节。

4. 致谢

本文得到四川省科技厅数学地质四川省重点实验室开放基金的资助(编号：SCSXDZ2011008)。

参考文献 (References)

[1] W. K. Hayman. Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press, 1964: 1-20.
[2] L. Yang. Distrbution theory. Berlin: Spinger-Verlag, 1993: 1-30.
[3] H. X. Yi, C. C.Yang. Uniqueness theory of meromorphic functions. Beijing: Science Press, 1995: 1-32.
[4] M. L. Fang, W. Hong. A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomial. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2001, 32(9): 1343-1348.
[5] S. S. Bhoosnurmath, R. S. Dyavanal. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 53(8): 1191-1205.
[6] T. D. Zhang, W. R. Lv. Uniqueness of theorems on meromorphic functions sharing one value. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 55(12): 2981-2992.

