Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 1-3
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31001 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Generalized Nakayama Conjecture for C-Orthogonal-Finite Algebras*

Xiaojin Zhang

Department of Mathematics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing
Email: xjzhang@nuist.edu.cn

Received: Oct. 12th, 2012; revised: Nov. 2nd, 2012; accepted: Nov. 14th, 2012

Abstract: In this paper, the C-orthogonal-finite algebras are defined. Moreover, the generalized Nakayama conjecture is proved to be true for C-orthogonal-finite algebras. As a result, Gorenstein CM-finite algebras satisfy the generalized Nakayama conjecture.

Keywords: C-Orthogonal-Finite Algbras; Generalized Nakayama Conjecture; Gorenstein Projective Modules

C-正交有限代数的广义 Nakayama 猜想*

张孝金

南京信息工程大学数学系，南京
Email: xjzhang@nuist.edu.cn

收稿日期：2012 年 10 月 12 日；修回日期：2012 年 11 月 2 日；录用日期：2012 年 11 月 14 日

摘　要：给出了 C-正交有限代数的定义并证明了任意的 C-正交有限代数满足广义 Nakayama 猜想。由此可得到 Gorenstein CM-有限代数满足广义 Nakayama 猜测。

关键词：C-正交有限代数；广义 Nakayama 猜想；Gorenstein 投射模

1. 引言

广义 Nakayama 猜想(也称 Auslander-Reiten 猜想)是由 Auslander-Reiten[1,2]上世纪 70 年代提出来的，它的内容是一个有限生成的 A-模 M 是投射的如果 M 满足 $Ext_A^i(M, A\oplus M)=0, \forall i\geq 1$。Auslander 与 Reiten 合作证明了有限表示型代数上的正确性。许多学者，如 Yamagata，Fuller 等在一些特殊的代数上做出了贡献[3-6]。现在它仍然是代数学家们关心的重要公开问题。

2008 年罗和黄[7]结合相对同调代数提出了广义 Nakayama 猜想的特殊形式也就是所谓的 Gorenstein 投射猜想如下：一个自正交的 Gorenstein 投射模 M[8]是投射的。2010 年，本文作者证明了 Gorenstein 投射猜想对任意一个 CM-有限代数[9-12]是成立的。一个代数 A 是 C-正交有限的如果在同构意义下只存在有限个不可分解模 M 使得 $Ext_A^i(M, A\oplus M)=0, \forall i\geq 1$。我们将联系这两个猜想并证明如下的定理：

定理：设 A 为一个 C-正交有限代数，则 A 满足广义 Nakayama 猜想。

本文组织如下：

第 2 部分，我们将回顾本文所要用到的概念、引理以及已知的结果，给出本文的主要结果。第 3 部分我们给出主要定理的证明并给出一定的应用。若无特殊声明，所有的代数都是 Artinian 代数，所有的模都是有限生成的左模。

*资助项目：国家自然科学基金青年基金 11101217；江苏省高校自然科学基金 11KJB110007；南京信息工程大学科研启动基金。

2. 概念与主要结果

本节将回顾后文所用到的概念及引理。下面的定义由 Auslander, Reiten, Enochs 和 Jenda[8]给出。设 A 为一个代数，M 为左 A-模。

定义 2.1. 模 M 称为 Gorenstein 投射如果对任意 $i \geq 1$ 有

1) $Ext_A^i(M,A)=0$，(2) $Ext_A^i(TrM,A)=0$，其中 TrM 表示模 M 的 Auslander-Reiten 转置，也就是说，对 M 的一个极小投射分解 $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ 作用函子 $(-)^* = Hom(-,A)$，我们有正合列：

$0 \to M^* \to P_0^* \to P_1^* \to TrM \to 0$。

我们声明 Enochs 和 Jenda 关于 Gorenstein 投射的定义如下：模 M 是一个 Gorenstein 模如果存在一个由投射 A-模组成的正合复形(1)：$\to P_{-n} \to P_{-n+1} \to \cdots \to P_{-1} \to P_0 \xrightarrow{f_0} P_1 \to \cdots \to P_n \to \cdots$ 使得 M 同构于态射 f_0 的核且用函子 $(-)^* = Hom(-,A)$ 作用该复形(1)后仍然正合。这两个定义是一致的。

记 $\Omega^i M$ 是模 M 的第 i 个合冲模，记 $\boldsymbol{G}$ 是代数 A 的所有有限生成的 Gorenstein 投射模组成的子范畴。记 $\underline{G}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 模去投射模形成的稳定范畴。则我们有以下关于 Gorenstein 投射模的性质。

命题 2.2. 1) $\Omega: \underline{G} \to \underline{G}$ 是一个等价函子。也就是说，如果 N 是 $\underline{G}$ 中的不可分解模，则对任意正整数 i，$\Omega^i N$ 也是 $\underline{G}$ 中的不可分解模。

2) 如果 N 是 $\boldsymbol{G}$ 中的模且 $Ext_A^i(N,N)=0, \forall i \geq 1$ 成立，则对任意 $j \geq 1, \Omega^j N$ 满足：

$Ext_A^i(\Omega^j N, \Omega^j N)=0, \forall i \geq 1$。

3) 若 M 使得 $Ext_A^i(M, A \oplus M)=0, \forall i \geq 1$，则对任意 $j \geq 1, \Omega^j N$ 满足：$Ext_A^i(\Omega^j M, A \oplus \Omega^j M)=0, \forall i \geq 1$。

证明：1) 由 Gorenstein 投射模的定义易知。

2) 根据 Auslander 和 Bridger 的结果，我们有：

$$\begin{aligned} Ext_A^i(\Omega^j N, \Omega^j N) &\cong Ext_A^1(\Omega^{j+i-1} N, \Omega^j N) \cong \underline{Hom}(\Omega^{j+i} N, \Omega^j N) \cong \underline{Hom}(\Omega^i N, N) \\ &\cong Ext_A^1(\Omega^{i-1} N, N) \cong Ext_A^i(N,N)=0. \end{aligned}$$

3)与 2)的证明类似，只需把 2)的证明中的 N 用 M 代替即可。

为了证明本文的主要结果，我们先给出 C-正交有限代数的定义。

定义 2.3. 一个代数 A 称为 C-正交有限的，如果只存在有限个模 M 使得 $Ext_A^i(M, A \oplus M)=0, \forall i \geq 1$。

下面给出 C-正交有限代数的例子来说明我们定义的合理性。

例 2.4. 1) 有限表示型代数是 C-正交有限代数[1]。

2) Gorenstein CM-finite 代数(只有有限个互不同构的有限生成的不可分解 Gorenstein 投射模)也是 C-正交代数[9-11]。

3) 满足条件只有有限个不可分解模 M 使得 $Ext_A^i(M,A)=0, \forall i \geq 1$ 的代数 A 是 C-正交有限代数[12]。

现在我们写出本文的主要结果如下：

定理 2.5. 若 A 为一个 C-正交有限代数，则 A 满足广义 Nakayama 猜想。

3. 主要定理的证明

本节主要给出定理 2.5 的证明并给出它的两个应用。为此我们先给出 Gorenstein 投射猜想和定义 Nakayama 猜想之间的联系如下：

引理 3.1. 设 A 是一个 Artinian 代数，A 满足广义 Nakayama 猜想当且仅当

1) A 满足 Gorenstein 投射猜想，并且

2) 任意的有限生成的 A-模 M 满足 $Ext_A^i(M, A \oplus M)=0, \forall i \geq 1$，则 M 是 Gorenstein 投射的。

证明：由两猜想的定义可得。

下面我们先证明 C-正交有限代数满足引理 3.1(1)，也就是该类代数满足 Gorenstein 投射猜想。

命题 3.2. 若 A 是 C-正交有限代数，则 A 满足 Gorenstein 投射猜想。

证明：因为 A 是 C-正交有限代数，所以范畴 G 中只有有限个不可分解模 N 的满足 $Ext_A^i(N,N)=0,\forall i\geq 1$，记 $\{N_1,N_2,\cdots,N_t\}$ 为所有的 G 中的满足上述条件的 N 的互不同构的同构类的代表元。则必有 $N\cong N_s$ 其中 $1\leq s\leq t$ 。

下证 N 是投射的。反设 N 不是投射的。取模 N 的一个极小投射分解，记 $S=\{\Omega^i N \mid i\geq 0\}$ 。由命题 2.2 可知，S 是不可分解的满足 $Ext_A^i(N,N)=0,\forall i\geq 1$ 的模 N 的集合。由上面的分析，我们声明必有 $l<m$ 使得 $\Omega^l N\cong\Omega^m N$ ，再由命题 2.2 可知，$N\cong\Omega^{m-l}N$ 。注意到 N 满足 $Ext_A^i(N,N)=0,\forall i\geq 1$ ，取以下正合序列 $0\to\Omega^{m-i}N(\cong N)\to Q^{m-i-1}\to\cdots\to Q^0\to N\to 0$ ，其中 Q^j 是投射 A-模。应用维数转移，结论已然。

命题 3.3. 若 A 是一个 C-正交有限代数且 A-模 M 满足 $Ext_A^i(M,A\oplus M)=0,\forall i\geq 1$，则 M 是 Gorenstein 投射的。

证明：只需证明 $Ext_A^i(TrM,A)=0,\forall i\geq 1$ 。不妨设 M 是不可分解的。由命题 2.2(3)，我们得到 $\Omega^j M$ 满足 $Ext_A^i(\Omega^j M,A\oplus\Omega^j M)=0,\forall i\geq 1$ 对任意的 $j\geq 1$ 成立。

下证 $\Omega^j M$ 是不可分解的。由 M 的性质利用 Auslander-Bridger 公式注意到，对任意的 $j\geq 1$ 有 $\underline{Hom}_A(M,M)\cong\underline{Hom}_A(\Omega^j M,\Omega^j M)$ 。因 M 不可分解，则有 $\underline{Hom}_A(M,M)\cong\underline{Hom}_A(\Omega^j M,\Omega^j M)$ 是局部代数。故有 $\Omega^j M$ 是不可分解的对任意 $j\geq 1$ 成立。用类似于 3.2 的证明可得 $M\cong\Omega^t M$ ，其中 $t\geq 1$。取 M 的极小投射分解，我们得到如下具有周期性的正合列：

$\cdots\to P^0\to P^{t-1}\to\cdots\to P^0\to P^{t-1}\to\cdots$ ，其中 P^i 是投射的并且 P^0 是 M 的投射盖。注意到 M 的性质 $Ext_A^i(M,A\oplus M)=0,\forall i\geq 1$，易知，该正合列应用函子 $(-)^*=Hom(-,A)$ 后依然正合，由此 M 是一个 Gorenstein 投射模。

由引理 3.1，命题 3.2 和 3.3，定理 2.5 得证。结合例 2.4，可以给出定理的应用如下：

推论 3.4. 若 A 是有限表示型代数，则广义 Nakayama 猜想成立。

推论 3.5. 若 A 是 Gorenstein CM-有限代数，则广义 Nakayama 猜想成立。

参考文献 (References)

[1] M. Auslander, I. Reiten. On a generalized version of the Nakayama conjecture. Proceedings of the American Mathematical Society, 1975, 52(1): 69-74.
[2] M. Auslander, I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. Advances in Mathematics, 1991, 86(1): 111-152.
[3] K. Yamagata. Frobineus algebras. Handbook of Algebra, 1980, 1: 841-887.
[4] K. R. Fuller, B. Zimmermann-Huisgen. On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 294(2): 679-691.
[5] A. Maróti. A proof of a generalized Nakayama conjecture. Bulletin London Mathematical Society, 2006, 38(5): 777-785.
[6] G. Wilson. The Cartan map on categories of graded modules. Journal of Algebra, 1983, 85: 390-398.
[7] R. Luo, Z. Y. Huang. When are torsionless modules projective? Journal of Algebra, 2008, 320(5): 2156-2164.
[8] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.
[9] X. W. Chen. An Auslander-type result for Gorenstein-projective modules. Advances in Mathematics, 2008, 208(6): 2043-2050.
[10] Z.-W. Li, P. Zhang. Gorenstein algebras of finite Cohen-Macaulay type. Advances in Mathematics, 2010, 223(2): 728-734.
[11] Z.-W. Li, P. Zhang. A construction of Gorenstein-projective modules. Journal of Algebra, 2010, 323(6): 1802-1812.
[12] A. Beligiannis. On algebras of finite Cohen-Macaulay type. Advances in Mathematics, 2011, 226(2): 1973-2019.

