Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 14-17
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31004 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Hans汉斯

On Homotopy Regular Morphism in the Category of Topological Pairs*

Youhua Qian#, Lin Ping, Shengmin Chen

College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua
Email: #zjjhqyh@yahoo.com

Received: Oct. 19th, 2012; revised: Oct. 29th, 2012; accepted: Nov. 13th, 2012

Abstract: In this paper, the concepts of homotopy monomorphism (epimorphism) and homotopy regular morphism in the category of topological space with base point (TOP^*) are generalized to the category of topological pairs (TOP^A). The paper studies the conditions and properties of homotopy regular morphism and the relationships between homotopy monomorphism (epimorphism) and homotopy equivalent morphism in TOP^A.

Keywords: The Category of Topological Pairs; Homotopy Monomorphism (Epimorphism); Homotopy Regular Morphism; Standard Decomposition

拓扑空间偶范畴中的同伦正则态射*

钱有华#，平　麟，陈胜敏

浙江师范大学数理与信息工程学院，金华
Email: #zjjhqyh@yahoo.com

收稿日期：2012 年 10 月 19 日；修回日期：2012 年 10 月 29 日；录用日期：2012 年 11 月 13 日

摘　要：本文将点标拓扑空间范畴(TOP^*)中的同伦单、同伦满和同伦正则态射等概念推广到拓扑空间偶范畴(TOP^A)的情形。研究了在TOP^A中，同伦正则态射存在的条件、性质以及它与同伦单(满)态和同伦等价之间的关系。

关键词：拓扑空间偶范畴；同伦单(满)态射；同伦正则态射；标准分解

1. 引言

同伦单态[1-4]、同伦满态[5-7]和同伦正则态射[8-12]是同伦论中的重要概念。拓扑空间偶范畴TOP^A中的对象是拓扑空间偶(X,A)，这里A是拓扑空间X的子空间。在范畴TOP^A中，从(X,A)到(Y,B)的态射集，记作$\mathrm{Map}[X,A;Y,B]$，从(X,A)到(Y,B)的态射$f:(X,A)\to(Y,B)$是指$f:X\to Y$连续且$f(A)\subset B$。

2. 拓扑空间偶范畴中的同伦单(满)、同伦正则态射

以下总假设X是道路连通的CW复形。

定义 1(TOP^A中的同伦单态射) TOP^A中的态射$f:(X,A)\to(Y,B)$称为同伦单态射，如果左消去律成立，即

*基金项目：国家自然科学基金资助项目(11202189)和浙江省自然科学基金资助项目(LY12A02002)。
#通讯作者。

$\forall g,h\in \mathrm{Map}[Z,C;X,A]$，只要 $fg\simeq fh$ 成立，就有 $g\simeq h$ 。

对偶地，我们给出 TOP^A 中同伦满态射的定义。

定义 2(TOP^A 中的同伦满态射) TOP^A 中的态射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 称为同伦满态射，如果右消去律成立，即 $\forall g,h\in \mathrm{Map}[Y,B;Z,C]$，只要 $gf\simeq hf$ 成立，就有 $g\simeq h$ 。

定义 3(TOP^A 中的同伦正则态射) TOP^A 中的态射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 称为同伦正则态射，如果存在 $g:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $f\circ g\circ f\simeq f$ ，这时 g 称为 f 的一个同伦 $\{1\}$ -逆，把 f 的所有同伦 $\{1\}$ -逆记作 $f\{1\}$ 。

注： 1) 显然 $f\{1\}\neq\phi$ 当且仅当 f 为同伦正则态射；2) 若 $A=\{x_0\}$ ， $B=\{y_0\}$ ，则 TOP^A 中的同伦正则态射即为 TOP^* 中的同伦正则态射。

定义 4(TOP^A 中态射的标准分解) 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为 TOP^A 中的态射，如果存在 (Z,C) 和同伦满态射 $f_1:(X,A)\to(Z,C)$ 和同伦单态射 $f_2:(Z,C)\to(Y,B)$ 使得 $f\simeq f_2f_1$，则称 f 有标准分解，记作 $[f_1,(Z,C),f_2]$。

称 f 的标准分解 $[f_1,(Z,C),f_2]$ 为基本唯一是指，假如还存在 f 的另一组标准分解 $[f_1',(Z',C'),f_2']$，则有同伦等价 $\psi:Z\to Z'$ 使得 $\psi f_1\simeq f_1'$， $f_2'\psi\simeq f_2$ 。

根据上述定义，我们很容易得到下一定理。

定理 1 若 f 为同伦等价，则 f 也是同伦正则态射。

证明： 若 f 为同伦等价，即存在态射 $g:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $f\circ g\simeq 1_{(Y,B)}$， $g\circ f\simeq 1_{(X,A)}$， 则 $f\circ(g\circ f)\simeq f\circ 1_{(X,A)}\simeq f$ ，即 f 为同伦正则态射。

因为同胚映射一定是同伦等价，故有下面的推论。

推论 1 若 f 为同胚映射，则 f 为同伦正则态射。

注： 定理 1 说明在拓扑空间偶范畴中，同伦正则态射弱于同伦等价，也弱于同胚映射。

定理 2[13] 对于 $f:(X,A)\to(Y,B)$，若 $f|_X:X\to Y$ 和 $f|_A:A\to B$ 都是同伦等价，则对任何整数 n ，相对同调函子的诱导同态 $f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ 均为同构。

例 1 考虑包含映射 $f:(V^n,S^{n-1})\to(R^n,R^n\setminus\{0\})$，其中 V^n 是 n 维闭球体， S^{n-1} 是 $n-1$ 维球面。显然 $f|_{V^n}$ 和 $f|_{S^{n-1}}$ 都是同伦等价，但 f 不是同伦等价(证明详见文[13])。

由例 1，我们得到下面的推论。

推论 2 存在映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$，使得 $f|_X:X\to Y$ 和 $f|_A:A\to B$ 均同伦等价，但 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 不是同伦正则态射。

证明： 考虑 $(X,A)=(V^n,S^{n-1})$，$(Y,B)=(R^n,R^n\setminus\{0\})$ 。 $f:(V^n,S^{n-1})\to(R^n,R^n\setminus\{0\})$ 为包含映射，则 $f|_{V^n}$ 和 $f|_{S^{n-1}}$ 都是同伦等价，并且对任意 $g:(R^n,R^n\setminus\{0\})\to(V^n,S^{n-1})$，有 $(g\circ f)(V^n)\subset S^{n-1}$，于是 $g_*\circ f_*=0$ 。但是 $H_n(V^n,S^{n-1})$ 与整数加群 Z 同构，可知 $f_*\neq 0$，于是 $f_*g_*f_*\neq f_*$。故 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 不是同伦正则态射。

注： 推论 2 说明同伦等价在限制的意义下无法保证同伦正则性。

3. 主要定理及其证明

定理 3 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为 TOP^A 中的态射，则下列条件彼此等价：

1) f 是同伦正则态射；

2) f 有同伦右单位， f 有左逆元，即存在 $g:(X,A)\to(X,A)$ 和 $h:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $fg\simeq f,hf\simeq g$；

3) f 有同伦左单位， f 有右逆元，即存在 $\varphi:(Y,B)\to(Y,B)$ 和 $\psi:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $\varphi f\simeq f,f\psi\simeq\varphi$ 。

证明： 我们仅证 1)⇔2)，类似地，我们可以证明 1)⇔3)。

1)⇒2) 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 是同伦正则态射，则存在 $\sigma:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $f\circ\sigma\circ f\simeq f$ 。我们令 $g=\sigma\circ f:(X,A)\to(X,A)$， $h=\sigma:(Y,B)\to(X,A)$，这表明， f 有同伦右单位 g， f 有左逆元 h；

2)⇒1) 若 f 有同伦右单位，及其左逆元，即存在态射 $g:(X,A)\to(X,A)$ 和 $h:(Y,B)\to(X,A)$，使得

$f\circ g\simeq f$，$h\circ f\simeq g$，则 $f\simeq f\circ g\simeq f\circ h\circ f$，因此 f 是一个同伦正则态射。

定理4 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 在 TOP^A 中具有标准分解 $\left[f_1,(Z,C),f_2\right]$，那么下列条件两两等价：

1) f 为同伦正则态射；

2) 存在态射 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $f_1\circ g\circ f_2\simeq 1_{(Z,C)}$；

3) 存在 (A,A')，(B,B') 和 $i:(A,A')\to(X,A)$，$\pi:(Y,B)\to(B,B')$，使得 $f_1 i$ 和 πf_2 均为同伦等价；

4) f_1 同伦右可逆，f_2 同伦左可逆。

证明： 1)⇒2) 若 f 为同伦正则态射，则有 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $f\circ g\circ f\simeq f$。因为 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为 TOP^A 中具有标准分解 $\left[f_1,(Z,C),f_2\right]$ 的态射，所以 $f_2\circ f_1\circ g\circ f_2\circ f_1\simeq f_2\circ f_1$，由于 f_2 同伦单，f_1 同伦满，左消去 f_2，右消去 f_1，得到 $f_1\circ g\circ f_2\simeq 1_{(Z,C)}$；

2)⇒3) 若存在态射 $g:(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $f_1\circ g\circ f_2\simeq 1_{(Z,C)}$。取 $(A,A')=(Z,C)$，$(B,B')=(Z,C)$，$i=gf_2$，$\pi=f_1 g$，则有 $f_1\circ i=f_1\circ(g\circ f_2)\simeq 1_{(Z,C)}$，$\pi\circ f_2=(f_1\circ g)\circ f_2\simeq 1_{(Z,C)}$。从而 $f_1\circ i$ 和 $\pi\circ f_2$ 均为同伦等价；

3)⇒4) 设有 (A,A')，(B,B') 及 $i:(A,A')\to(X,A)$，$\pi:(Y,B)\to(B,B')$ 使得 $f_1 i$ 和 πf_2 均为同伦等价，并设其同伦逆分别为 h_1 和 h_2。则由 $1_{(Z,C)}\simeq(f_1\circ i)\circ h_1=f_1\circ(i\circ h_1)$ 可知 f_1 同伦右可逆，而由 $1_{(Z,C)}\simeq h_2\circ(\pi\circ f_2)=(h_2\circ\pi)\circ f_2$ 可知 f_2 同伦左可逆；

4)⇒1) f_1 同伦右可逆，f_2 同伦左可逆，则存在 $g_1:(Z,C)\to(X,A)$ 使得 $f_1\circ g_1\simeq 1_{(Z,C)}$，存在 $g_2:(Y,B)\to(Z,C)$，使得 $g_2\circ f_2\simeq 1_{(Z,C)}$。取 $g=g_1\circ g_2$，则有 $f\circ g\circ f=f\circ g_1\circ g_2\circ f\simeq f_2\circ f_1\circ g_1\circ g_2\circ f_2\circ f_1\simeq f_2\circ f_1\simeq f$，即 $f\circ g\circ f\simeq f$，故 f 为同伦正则态射。

定理5 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 为 TOP^A 中的态射，则

1) f 同伦正则态射且为同伦单态射当且仅当 f 为同伦左可逆；

2) f 同伦正则态射且为同伦满态射当且仅当 f 为同伦右可逆；

3) f 同伦正则态射且 f 既为同伦单态射又为同伦满态射当且仅当 f 为同伦等价。

证明： 1) 若 f 为同伦正则态射，则有 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $f\circ g\circ f\simeq f$，又因为 f 为同伦单态射，所以满足左消去律。因此由 $f\circ g\circ f\simeq f$ 可得 $g\circ f\simeq 1_{(X,A)}$，即 f 为同伦左可逆；反之，当 f 为同伦左可逆时，即存在态射 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $g\circ f\simeq 1_{(X,A)}$，所以 $f\circ g\circ f\simeq f$，即 f 是是同伦正则态射。同时，$\forall(Z,C)\in TOP^A$ 及 $g,h:(Z,C)\to(X,A)$，若 $f\circ g\simeq f\circ h$，则 $(g\circ f)\circ g\simeq 1_{(X,A)}\circ g=g\simeq h=1_{(X,A)}\circ h\simeq(g\circ f)\circ h$，因此 f 也是同伦单态射；

2) 若 f 为同伦正则态射，则有 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $f\circ g\circ f\simeq f$，又因为 f 为同伦满态射，所以满足右消去律。因此由 $f\circ g\circ f\simeq f$ 可得 $f\circ g\simeq 1_{(Y,B)}$，即 f 为同伦右可逆；反之，当 f 为同伦右可逆时，即存在态射 $g:(Y,B)\to(X,A)$，使得 $f\circ g\simeq 1_{(Y,B)}$，所以 $f\circ g\circ f\simeq f$，即 f 同伦正则态射。同时，$\forall(Z,C)\in TOP^A$ 及 $g,h:(Z,C)\to(X,A)$，若 $g\circ f\simeq h\circ f$，则 $g\circ(f\circ g)\simeq g\circ 1_{(Y,B)}=g\simeq h=h\circ 1_{(Y,B)}\simeq h\circ(f\circ g)$，因此 f 也是同伦满态射；

3) 若 f 同伦正则态射且 f 既为同伦单态射又为同伦满态射，则由1)和2)可知，f 为同伦左可逆并且也是同伦右可逆，所以 f 是同伦等价。反之，若 f 为同伦等价，则由定义可得 f 既是同伦单、同伦满态射也是同伦正则态射。

注： 定理5给出了同伦正则态射、同伦单(满)态射与同伦左(右)可逆的关系，也告诉我们这样一个事实：虽然由 f 为同伦单态射和同伦满态射不能保证 f 是同伦等价，但再加上同伦正则性条件，就可以构成 f 为同伦等价的一个充要条件。

同胚一定是同伦等价。一个态射既是单态射又是满态射，但是它不一定是同伦等价。为了保证同伦等价，我们找到了一个充分条件，即该态射还是同伦正则的。

下面给出 TOP^A 中的一个等价关系。

定义5 设 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ 都是同伦正则态射，则 $f\sim g$ 当且仅当存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $f\circ u\simeq g$ 或 $g\circ u\simeq f$ 。

定理6 定义5中给出的关系“~”是 $[X,A;Y,B]$ 上的一个等价关系。

证明： 1) 自反性：取 $u=1_{(X,A)}$，即得 $f\sim f$ 。

2) 对称性：若 $f\sim g$ ，则存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$，有 $f\circ u\simeq g$ 或者 $g\circ u\simeq f$ ，于是 $g\sim f$ ；

3) 传递性：若 $f\sim g$ ， $g\sim h$ ，则存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $f\circ u\simeq g$ 或者 $g\circ u\simeq f$ ，且存在同伦等价 $v:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $g\circ v\simeq h$ 或者 $h\circ v\simeq g$ 。

下面分分四种情形考虑：

情形1 若存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $f\circ u\simeq g$ ，且存在同伦等价 $v:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $g\circ v\simeq h$，则 $f\circ(u\circ v)\simeq(f\circ u)\circ v\simeq g\circ v\simeq h$，其中 $u\circ v:(X,A)\to(X,A)$ 是同伦等价，这表明 $f\sim h$；

情形2 若存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $f\circ u\simeq g$ ，且存在同伦等价 $v:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $h\circ v\simeq g$ ，则 $f\circ\left(u\circ v^{-1}\right)\simeq\left(f\circ u\right)\circ v^{-1}\simeq g\circ v^{-1}\simeq h$，其中 $u\circ v^{-1}:(X,A)\to(X,A)$ 是同伦等价，这表明 $f\sim h$；

情形3 若存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $g\circ u\simeq f$ ，且存在同伦等价 $v:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $g\circ v\simeq h$，则 $f\circ\left(u^{-1}\circ v\right)\simeq\left(f\circ u^{-1}\right)\circ v\simeq g\circ v\simeq h$，其中 $u^{-1}\circ v:(X,A)\to(X,A)$ 是同伦等价，这表明 $f\sim h$；

情形4 若存在同伦等价 $u:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $g\circ u\simeq f$ ，且存在同伦等价 $v:(X,A)\to(X,A)$ 使得 $h\circ v\simeq g$ ，则 $f\circ(v\circ u)^{-1}=f\circ\left(u^{-1}\circ v^{-1}\right)\simeq\left(f\circ u^{-1}\right)\circ v^{-1}\simeq g\circ v^{-1}\simeq h$，其中 $(v\circ u)^{-1}:(X,A)\to(X,A)$ 是同伦等价，这表明 $f\sim h$ 。证完。

参考文献 (References)

[1] S. T. Hu. Homotopy theory. New York: Academic Press, 1959.
[2] P. Hilton. Homotopy theory and duality. New York: Gorelen and Breach, 1965.
[3] T. Ganea. On monomorphisms in homotopy theory. Topology, 1976, 6 (2): 149-152.
[4] M. Mather. Homotopy monomorphisms and homotopy pushouts. Topology and its Applications, 1997, 81(2): 159-162.
[5] G. Mnklerjee. Equivalent homotopy epimorphisms homotopy monomorphisms and homotopy equivalence. Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 1995, 2(4): 447-461.
[6] W. H. Shen, Z. S. Zou. Semilocalization of epimorphisms and monomorphisms in homotopy theory. Topology and Its Applications, 1998, 88(3): 207-217.
[7] 冯良贵. 因式分解范畴[J]. 数学研究与评论, 1996, 16(2): 281-284.
[8] 曹永知, 郭驼英, 朱萍. 关于同伦正则态射[J]. 数学物理学报, 2000, 20(2): 274-277.
[9] 钱丽华, 钱有华. 同伦正则态射的注记[J]. 宁波大学学报(理工版), 2005, 18(4): 428-431.
[10] 王凯华, 陈胜敏, 钱有华. 同伦正则态射的若干性质[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(3): 258-261.
[11] 钱有华, 陈胜敏. 同纬映象函子与同伦正则态射[J]. 吉林大学学报(理学版), 2009, 47(3): 476-480.
[12] 王向辉, 王玉玉. 有限 CW 复形间的稳定同伦正则态射[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2011, 44(5): 34-40.
[13] 沈信耀. 同调论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

