Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 9-13
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31003 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Further Improvement of Van der Corput's Inequality

Jing Hong[1], Yong Hong[2]

[1]College of Biology, Hunan University, Changsha
[2]College of Mathematics and Computing Science, Guangdong Business College, Guangzhou
Email: hongyonggdcc@yeah.net

Received: Oct. 10th, 2012; revised: Dec. 2nd, 2012; accepted: Dec. 19th, 2012

Abstract: On the basis of Hu Ke's result, by reforming the estimate inequality of Euler constant, the improved Van der Corput's inequality is obtained. Our result is:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}\le e^{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{3}{32(n+1)}\right]a_n$$

where γ is Euler constant, $a_n\ge 0\ (n=1,2,\cdots)$, $S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$.

Keywords: Van der Corput's Inequality; Euler Constant; Convex Function; Weighted Mean Inequality

Van der Corput 不等式的进一步改进

洪 静[1]，洪 勇[2]

[1]湖南大学生物学院，长沙
[2]广东商学院数学与计算科学学院，广州
Email: hongyonggdcc@yeah.net

收稿日期：2012 年 10 月 10 日；修回日期：2012 年 12 月 2 日；录用日期：2012 年 12 月 19 日

摘 要：本文首先改进对 Euler 常数的估计式，在胡克已改进的 Van der Corput 不等式的基础上进一步改进 Van der Corput 不等式，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}\le e^{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{3}{32(n+1)}\right]a_n$，其中 γ 是 Euler 常数，$a_n\ge 0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$。

关键词：Van der Corput 不等式；Euler 常数；凸函数；加权平均值不等式

1. 引言

设 $a_n\ge 0$，$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$，$\gamma=\lim_{k\to\infty}(S_k-\log k)$ 是 Euler 常数，则有 Van der Corput 不等式[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}\le e^{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n\text{，}\tag{1}$$

其中 $e^{1+\gamma}$ 是最佳的。胡克在文[2]中将它改进为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}\le e^{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{4}\log n\right)a_n\text{，}\tag{2}$$

(该文中误将 $n-\frac{1}{4}\log n$ 写为 $n-\frac{1}{4n}\log n$)其证明主要依赖于对 Euler 常数的估计式[3]

$$\frac{1}{2(n-1)} < D_n - \gamma \le \frac{1}{2n},\ n=1,2,\cdots \tag{3}$$

其中 $D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$。

本文将在改进这个估计式的基础上，进一步改进 Van der Corput 不等式，得到更加精确的结果。

2. 预备引理

引理 1 设 $D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$，$\gamma$ 是 Euler 常数，则

$$\frac{2n+1}{2(n+1)}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k} < D_n-\gamma < 1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)(2n)^{2k+1}}。 \tag{4}$$

证明：令 $f(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\quad (x\ge 1)$，则

$$f(k)=\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}-\log k\right)-\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}-\log(k+1)\right)=D_k-D_{k+1},$$

于是可得

$$D_n-\gamma=\sum_{k=n}^{\infty}(D_k-D_{k+1})=\sum_{k=n}^{\infty}f(k)。$$

由于 $f(x)\ge 0$，$f''(x)=\frac{3x+1}{x^2(x+1)^3}\ge 0\quad(x\ge 1)$。故 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的正值下凸函数，由 Hardmard 不等式，有

$$\frac{1}{2}\left[f(k)+f(k+1)\right]>\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x,\ k=n,n+1,\cdots$$

对 k 求和得到

$$\frac{1}{2}f(n)+\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)>\int_n^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty}f(k)&>\frac{1}{2}f(n)+\int_n^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\log\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\int_n^{+\infty}\left[\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\lim_{A\to+\infty}\left[\int_n^{A}\left(\log(x+1)-\log x\right)\mathrm{d}x-\int_n^{A}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\lim_{A\to+\infty}\left[x\left(\log(x+1)-\log x\right)\Big|_n^A-\int_n^{A}x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x-\int_n^{A}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\lim_{A\to+\infty}\left[x\left(\log(x+1)-\log x\right)\Big|_n^A+\int_n^{A}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\int_n^{A}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\lim_{A\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{A}\right)^A-n\log\frac{n+1}{n}\\
&=1-\frac{1}{2(n+1)}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n+1}{2(n+1)}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k}
\end{aligned}。$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} f(k) &< \sum_{k=n}^{\infty}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = x\left[\log(x+1)-\log x\right]_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} \\ &= 1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= 1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k(2n)^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2n)^k}\right] \\ &= 1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)(2n)^{2k+1}}\end{aligned}。$$

结合以上两方面，知(4)成立。

注：利用(4)式，可以得到

$$D_n-\gamma<1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{3(2n)^3}\right]=1-\frac{2n-1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{24n^3}\right)=\frac{1}{2n}-\frac{2n-1}{24n^3}<\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2},$$

由此得到：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\gamma+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}。\tag{5}$$

引理 2[4] 若 $x>0$，则有

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2(x+1)}\right]。\tag{6}$$

引理 3 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，则

$$B_n=\left[\frac{(n+1)S_{n+1}}{nS_n}\right]^{nS_n}<\mathrm{e}^{1+\gamma}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{3}{32(n+1)}\right]。\tag{7}$$

证明：显然 $n=1$ 时结论成立，故只需考虑 $n\ge 2$。因为

$$B_n=\left[\frac{(n+1)S_{n+1}}{nS_n}\right]^{nS_n}=\left[\frac{(n+1)\left(S_n+\frac{1}{n+1}\right)}{nS_n}\right]^{nS_n}=\left(1+\frac{S_n+1}{nS_n}\right)^{nS_n},$$

由引理 2，又有

$$\left(1+\frac{S_n+1}{nS_n}\right)^{nS_n/(S_n+1)}<\mathrm{e}\left[1-\frac{S_n+1}{2(n+1)S_n+1}\right]<\mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]。$$

于是，得到

$$B_n\le \mathrm{e}^{S_n+1}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{S_n+1}$$

利用(5)，有

$$B_n<\mathrm{e}^{1+\gamma+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{1+\gamma+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}}<\mathrm{e}^{1+\gamma}n\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{1+\gamma+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}},\tag{8}$$

因为$n\ge 2$时，有

$$\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{1+\gamma}<\mathrm{e}^{-\frac{1+\gamma}{2(n+1)}}<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}, \tag{9}$$

$$\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{\log n}\le \mathrm{e}^{-\frac{\log n}{2(n+1)}}<1-\frac{\log n}{2(n+1)}+\frac{1}{2}\left[\frac{\log n}{2(n+1)}\right]^2<1-\frac{1}{4n}\log n, \tag{10}$$

而且

$$\begin{aligned}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}}&\le \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{24n^2}\right)\Big/2(n+1)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{48n^2(n+1)}-\frac{1}{4n(n+1)}-\frac{1}{24n^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\mathrm{e}^{-\frac{14n+1}{48n^2(n+1)}}\\&<\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{14n+1}{48n^2(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{14n+1}{48n^2(n+1)}\right)^2\right]\\&<\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{14n+1}{96n^2(n+1)}\right]<\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{14n}{96n^2(n+1)}\right]\\&<\mathrm{e}^{\frac{1}{24n^2}}\left[1-\frac{1}{8n(n+1)}\right]\end{aligned}, \tag{11}$$

由(8)、(9)、(10)、(11)便得到

$$\begin{aligned}B_n&<\mathrm{e}^{1+\gamma}\left(n-\frac{1}{4}\log n\right)\left[1-\frac{1}{8n(n+1)}\right]=\mathrm{e}^{1+\gamma}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{1}{8n(n+1)}\left(n-\frac{1}{4}\log n\right)\right]\\&=\mathrm{e}^{1+\gamma}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{1}{8(n+1)}+\frac{\log n}{32n(n+1)}\right]<\mathrm{e}^{1+\gamma}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{1}{8(n+1)}+\frac{1}{32(n+1)}\right]。\\&=\mathrm{e}^{1+\gamma}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{3}{32(n+1)}\right]\end{aligned}$$

3. 主要结果与证明

定理 设$a_n\ge 0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$，$\gamma$是 Euler 常数。则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}\le \mathrm{e}^{1+\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{1}{4}\log n-\frac{3}{32(n+1)}\right]a_n, \tag{12}$$

其中的常数$\mathrm{e}^{1+\gamma}$是最佳的。

证明：记$S_0=0$，$c_n=\left[(n+1)S_{n+1}\right]^{nS_n}\left(\frac{1}{nS_n}\right)^{nS_{n-1}}$，利用加权的平均值不等式，有

$$\prod_{k=1}^{n}(c_ka_k)^{\frac{1}{kS_n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kS_n}(c_ka_k)\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kS_n}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{mS_n}(c_ma_m),$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}(c_ka_k)^{\frac{1}{kS_n}}\left(\prod_{k=1}^{n}c_k^{\frac{1}{k}}\right)^{-\frac{1}{S_n}}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\prod_{k=1}^{n}c_k^{\frac{1}{k}}\right)^{-\frac{1}{S_n}}\sum_{m\le n}\frac{1}{mS_m}(c_ma_m)\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{m}c_ma_m\sum_{n\ge m}S_n^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n}c_k^{\frac{1}{k}}\right)^{-\frac{1}{S_n}}\right\},$$

又因为

$$\sum_{n\ge m} S_n^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n} c_k^{\frac{1}{k}}\right)^{-\frac{1}{S_n}} = \sum_{n\ge m}\frac{1}{S_n S_{n+1}(n+1)} = \sum_{n\ge m}\left(S_n^{-1}-S_{n+1}^{-1}\right)=\frac{1}{S_m}\ ,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{S_n}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}c_m a_m\frac{1}{S_m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{nS_n}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)S_{n+1}\right]^{nS_n}\left(\frac{1}{nS_n}\right)^{nS_{n-1}+1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1)S_{n+1}}{nS_n}\right]^{nS_n}a_n\ 。$$

由引理 3 便知(12)成立。

显然，(12)式是(2)式的进一步改进。

参考文献 (References)

[1] J. G. Ven der Corput. Generations of Carleman’s inequality. Koninklijke, Akademie Van Wetenschappen to Amsterdam, 1936, 39(8).
[2] 胡克. 关于 Van der Corput 不等式[J]. 数学杂志, 2003, 23(1): 126-128.
[3] 包那. Euler 常数与 Euler 公式[J]. 数学的实践与认识, 1988, 18(4): 55-64.
[4] B. C. Yang. Note on Hardy’s inequality. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 234: 717-722.

