Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 18-30
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.31005 Published Online January 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Series of Reciprocals of Binomial Coefficients Constructing by Splitting Terms

Wanhui Ji, Baoli Hei

Department of Basic, Yinchuan Energy Institute, Yinchuan
Email: jiwanhui2008@163.com

Received: Nov. 17th, 2012; revised: Nov. 29th, 2012; accepted: Dec. 11th, 2012

Abstract: Using one known series, we can structure several new series of reciprocals of binominal coefficients by splitting items. These denominators of series contains different the multiplication of one to five odd factors and binominal coefficients. And some identities of series of numbers values of reciprocals of binominal coefficients are given. The method of split items offered in this paper is a new combinatorial analysis way and a elementary method to construct new series.

Keywords: Binomial Coefficients; Reciprocals; Split Terms; Series; Form Closed

裂项法导出二项式系数倒数级数

及万会，黑宝骊

银川能源学院基础部，银川
Email: jiwanhui2008@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 17 日；修回日期：2012 年 11 月 29 日；录用日期：2012 年 12 月 11 日

摘　要：根据一个已知级数，使用裂项方法得到分母含有 1 到 5 个奇因子的二项式系数倒数级数，所给出二项式系数倒数级数的和式是封闭形的。并给出二项式系数数倒数值级数恒等式。裂项方法研究二项式系数变换是组合分析的新手段，也是产生新级数的一个初等方法。

关键词：二项式系数；倒数；裂项；级数；封闭型

1. 引言

二项式系数在数论，图论，统计和概率等数学分支扮演重要角色。二项式系数变换问题在组合数学，解析数学等学科研究领域极为重要，引起了很多组合专家更多的注意，有大量文献[1-6]。一些作者用各种数学工具得到一系列二项式系数倒数级数重要结果。简述所列文献主要结果：

文[1]利用白塔伽马函数 $\binom{n}{k}^{-1}=(n+1)\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$ 给出了有限和：

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{\binom{n}{r}}=\left(1+(-1)^n\right)\frac{n+1}{n+2},\quad \sum_{k=0}^{pn}(-1)^k\binom{pn}{k}\binom{2pn}{2k}^{-1}=\frac{(2pn+1)\left(1+(-1)^m\right)}{2(pn+1)}\text{等，}$$

利用级数 $\sum_{m\ge1}\frac{(2x)^{2m}}{m\binom{2m}{m}}=\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，给出了数值级数：

$$\sum_{m\ge1}\frac{1}{m\binom{2m}{m}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9};\quad \sum_{m\ge1}\frac{1}{\binom{2m}{m}}=\frac{1}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}};\quad \sum_{m\ge1}\frac{1}{m^2\binom{2m}{m}}=\frac{\pi^2}{18}\text{ 等。}$$

文[2]设整数 $k\ge 2$，二项式系数倒数数值级数用积分表示并给出递推公式：

$$S_1(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)\binom{2n}{n}}=\frac{1-2k}{k}\int_0^1\frac{\ln\left[1-t(1-t)\right]+\sum_{i=1}^{k}t^i(1-t)^i/i}{t^k(1-t)^k}\mathrm{d}t+\frac{1}{k}\left(2-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$S_2(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+k)\binom{2n}{n}}=\frac{(-1)^k(1-2k)}{k}\int_0^1\frac{\ln\left[1+t(1-t)\right]+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i t^i(1-t)^i/i}{t^k(1-t)^k}\mathrm{d}t-\frac{2}{k}\left(\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1\right);$$

$S_1(k)$ 与 $S_2(k)$ 的递推公式：

$$S_1(k+1)=-\frac{2(2k+1)}{k+1}S_1(k)+\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3(k+1)};$$

$$S_2(k+1)=-\frac{2(2k+1)}{k+1}S_2(k)+\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{2\sqrt{5}}{(k+1)}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

初始值

$$S_1(2)=\frac{13}{4}-\frac{7\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi^2}{3};\quad S_2(2)=-\frac{11}{4}+5\sqrt{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}-12\ln^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)。$$

文[3]给出非封闭型二项式系数倒数数值级数用反三角函数表示的计算公式

(A) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2t)^{2m+2k}}{m(2m+2k)\binom{2m}{m}}=\arctan(t)^2\binom{2k}{k}+\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{k-j}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k-j}\left(\frac{1\arcsin t\sin(2j\arcsin t)}{j}+\frac{\cos(2j\arcsin t)}{j^2}\right);$$

(B) $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}(2t)^{2m+2k}}{m(2m+2k)\binom{2m}{m}}=-\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^2\binom{2k}{k}+\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{k-j}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k-j}\left(\frac{\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)^{2j}-\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^{2j}}{j}\right)\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k-j}\left(\frac{\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)^{2j}-\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^{2j}}{2j^2}\right);$$

文[4]用白塔伽马函数给出二项式系数倒数数值级数和式：$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{4n}{2k}^{-1}=\frac{4n+1}{2n+1}$；

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m+n}{n+k}^{-1}=\frac{m+n+1}{m+n+2}\left(\binom{m+n+1}{m}^{-1}+(-1)^n\right)$；$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k}\binom{2n}{k}^{-1}=-\frac{1}{2n-1}$ 等。

文[5]给出二项式系数倒数数值级数用积分表示

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2mn}{mn}}=-\frac{m}{2}\int_0^1\frac{\ln\left[1-t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t(1-t)}；\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\binom{2mn}{mn}}=-\frac{m}{2}\int_0^1\frac{\ln\left[1+t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t(1-t)}；$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\binom{2mn}{mn}}=-\frac{m}{2}\int_0^1\frac{\ln\left[1-t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t(1-t)}+\frac{m}{2}\int_0^1\frac{t^m(1-t)^m+\ln\left[1-t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t^{m+1}(1-t)^{m+1}}；$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+1)\binom{2mn}{mn}}=-\frac{m}{2}\int_0^1\frac{\ln\left[1+t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t(1-t)}+\frac{m}{2}\int_0^1\frac{t^m(1-t)^m-\ln\left[1-t^m(1-t)^m\right]\mathrm{d}t}{t^{m+1}(1-t)^{m+1}}\text{ 等。}$$

文[6]给出 7 个中心型二项式系数倒数序列，设 $Z_n=4^n\binom{2n}{n}^{-1}$；$W_n=\frac{4^n}{n}\binom{2n}{n}^{-1}$；$T_n=\frac{4^n}{n^2}\binom{2n}{n}^{-1}$；$A_n=\frac{4^n}{2n+1}\binom{2n}{n}^{-1}$；$P_n=\frac{4^n}{n+1}\binom{2n}{n}^{-1}$；$M_n=\frac{4^n}{n-1}\binom{2n}{n}^{-1}$；$N_n=\frac{4^n}{(n-1)^2}\binom{2n}{n}^{-1}$。

序列$\{Z_n\}$发生函数，$Z(t)=G\left(4^n\binom{2n}{n}^{-1}\right)=\frac{1}{1-t}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}+\frac{1}{1-t}$；

序列$\{W_n\}$发生函数$W(t)=G\left(\frac{4^n}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}$；

序列$\{T_n\}$发生函数$T(t)=G\left(\frac{4^n}{n^2}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=2\left(\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)^2$；

序列$\{A_n\}$发生函数$A(t)=G\left(\frac{4^n}{2n+1}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}$；

序列$\{P_n\}$发生函数$P(t)=G\left(\frac{4^n}{n+1}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=\frac{2}{t}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}-\frac{1}{t}\left(\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)^2$；

序列$\{M_n\}$发生函数$M(t)=G\left(\frac{4^n}{n-1}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=2(2t-1)\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}+2t$；

序列$\{N_n\}$发生函数$N(t)=G\left(\frac{4^n}{(n-1)^2}\binom{2n}{n}^{-1}\right)=4(1-t)\sqrt{\frac{t}{1-t}}\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}+4t\left(\arctan\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)^2-4t$。

由上述发生函数易得数值级数恒等式：如在$T(t)$，$M(t)$令$t=1$，在$Z(t)$令$t=\frac{1}{2}$，依次得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n^2}\binom{2n}{n}^{-1}=\frac{\pi^2}{2}$；$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{(n-1)^2}\binom{2n}{n}^{-1}=\pi^2-4$；$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\binom{2n}{n}^{-1}=\frac{\pi}{2}+2$ 等等。

上述文献作者们用各种方法给出不同类型的二项式系数倒数数值级数的计算公式。

文[7]根据一个已知级数用裂项法得到正负相间二项式系数倒数级数封闭型表达式。我们利用文献[8]级数 $(\arcsin x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2x^{2n+2}}{(2n+1)!(n+1)},\ (x^2<1)$。通过对这个级数裂项构造出一批新的二项式系数的倒数级数。它们的分母含有 1 到 5 个奇因子与二项式系数的乘积表达式。所给出的级数和式是封闭型的。若对这个级数继续使用裂项方法，可以得到分母含有 1 到 6 个，1 到 7 个，……，1 到 p 个奇因子的二项式系数的倒数级数。因此，裂项法解决了构造分母含有 p 个因子的二项式系数倒数级数问题，并且所给出的级数公式是封闭型的。由此得出裂项方法研究二项式系数倒数变换是组合分析的新手段，也是产生新级数的一个初等方法。并给出了一些二项式系数倒数值级数恒等式。

2. 主要结论和证明

定理 二项式系数倒数级数如下：

1) 分母含有 1 个奇因子二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m!)^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)}=\frac{\arcsin(x)}{x\sqrt{1-x^2}}=D_1 \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)}=\left(\frac{2}{x^2}-1\right)D_1-\frac{2}{x^2} \tag{2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+5)}=\left(\frac{8}{3x^4}-\frac{4}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)D_1-\frac{8}{3x^4}-\frac{4}{9x^2} \tag{3}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+7)}=\left(\frac{16}{5x^6}-\frac{8}{5x^4}-\frac{2}{5x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1-\frac{16}{5x^6}-\frac{8}{15x^4}-\frac{6}{25x^2} \tag{4}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+9)}=\left(\frac{128}{35x^8}-\frac{64}{35x^6}-\frac{16}{35x^4}-\frac{8}{35x^2}-\frac{1}{7}\right)D_1-\frac{128}{35x^8}-\frac{64}{105x^6}-\frac{48}{175x^4}-\frac{8}{49x^2} \tag{5}$$

2) 分母含有 2 个奇因子的二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)}=\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)D_1+\frac{1}{x^2} \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)}=\left(-\frac{2}{3x^4}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3}\right)D_1+\frac{2}{3x^4}+\frac{1}{9x^2} \tag{7}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)}=\left(-\frac{4}{3x^4}+\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)D_1+\frac{4}{3x^4}-\frac{7}{9x^2} \tag{8}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)}=\left(-\frac{8}{15x^6}+\frac{4}{15x^4}+\frac{1}{15x^2}+\frac{1}{5}\right)D_1+\frac{8}{15x^6}+\frac{4}{45x^4}+\frac{1}{25x^2} \tag{9}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)}=\left(-\frac{4}{5x^6}+\frac{2}{5x^4}+\frac{3}{5x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1+\frac{4}{5x^6}+\frac{2}{15x^4}-\frac{11}{25x^2} \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)}=\left(-\frac{8}{5x^6}+\frac{32}{15x^4}-\frac{7}{15x^2}-\frac{1}{15}\right)D_1+\frac{8}{5x^6}-\frac{16}{15x^4}-\frac{23}{225x^2} \tag{11}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+9)}=\left(-\frac{16}{35x^8}+\frac{8}{35x^6}+\frac{2}{35x^4}+\frac{1}{35x^2}+\frac{1}{7}\right)D_1+\frac{16}{35x^8}+\frac{8}{105x^6}+\frac{6}{175x^4}+\frac{1}{49x^2} \tag{12}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+9)}=\left(-\frac{64}{105x^8}+\frac{32}{105x^6}+\frac{8}{105x^4}+\frac{13}{35x^2}-\frac{1}{7}\right)D_1+\frac{64}{105x^8}+\frac{32}{315x^6}+\frac{8}{175x^4}-\frac{15}{49x^2} \tag{13}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+9)}=\left(-\frac{32}{35x^8}+\frac{16}{35x^6}+\frac{82}{105x^4}-\frac{29}{105x^2}-\frac{1}{21}\right)D_1+\frac{32}{35x^8}+\frac{16}{105x^6}-\frac{314}{525x^4}-\frac{31}{441x^2} \tag{14}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+7)(2m+9)}=\left(-\frac{64}{35x^8}+\frac{88}{35x^6}-\frac{4}{7x^4}-\frac{3}{35x^2}-\frac{1}{35}\right)D_1+\frac{64}{35x^8}-\frac{136}{105x^6}-\frac{68}{525x^4}-\frac{47}{1225x^2}. \tag{15}$$

3) 分母含有 3 个奇因子的二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+5)}=\left(\frac{1}{3x^4}-\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{3}\right)D_1-\frac{1}{3x^4}+\frac{2}{9x^2} \tag{16}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+7)}=\left(\frac{2}{15x^6}-\frac{1}{15x^4}-\frac{4}{15x^2}-\frac{1}{5}\right)D_1-\frac{2}{15x^6}-\frac{1}{45x^4}+\frac{6}{25x^2} \tag{17}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)(2m+7)}=\left(\frac{4}{15x^6}-\frac{7}{15x^4}+\frac{2}{15x^2}+\frac{1}{15}\right)D_1-\frac{4}{15x^6}+\frac{8}{15x^4}-\frac{113}{150x^2} \tag{18}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)(2m+7)}=\left(\frac{2}{5x^6}-\frac{13}{15x^4}+\frac{8}{15x^2}-\frac{1}{15}\right)D_1-\frac{2}{5x^6}+\frac{3}{5x^4}-\frac{38}{225x^2} \tag{19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+9)}=\left(\frac{8}{105x^8}-\frac{4}{105x^6}-\frac{1}{105x^4}-\frac{6}{35x^2}+\frac{1}{7}\right)D_1-\frac{8}{105x^8}-\frac{4}{105x^6}-\frac{11}{175x^4}+\frac{8}{49x^2} \tag{20}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)(2m+9)}=\left(\frac{4}{35x^8}-\frac{2}{35x^6}-\frac{19}{105x^4}+\frac{8}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1-\frac{4}{35x^8}-\frac{2}{105x^6}+\frac{83}{525x^4}+\frac{10}{441x^2} \tag{21}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{8}{35x^8}-\frac{8}{21x^6}+\frac{11}{105x^4}+\frac{2}{105x^2}+\frac{1}{35}\right)D_1-\frac{8}{35x^8}+\frac{1}{5x^6}+\frac{43}{1575x^4}+\frac{12}{1225x^2}\tag{22}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)(2m+9)}=\left(\frac{16}{105x^8}-\frac{8}{105x^6}-\frac{37}{105x^4}+\frac{34}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1-\frac{16}{105x^8}-\frac{9}{35x^6}+\frac{169}{525x^4}-\frac{18}{145x^2}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)(2m+9)}&=\left(\frac{32}{105x^8}-\frac{58}{105x^6}+\frac{17}{105x^4}+\frac{4}{35x^2}-\frac{1}{35}\right)D_1\\&\quad-\frac{32}{105x^8}+\frac{22}{63x^6}-\frac{23}{525x^4}-\frac{82}{1225x^2}\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)(2m+9)}&=\left(\frac{16}{35x^8}-\frac{36}{35x^6}+\frac{71}{105x^4}-\frac{2}{21x^2}-\frac{1}{105}\right)D_1\\&\quad-\frac{16}{35x^8}+\frac{76}{105x^6}-\frac{29}{140x^4}-\frac{176}{11025x^2}\end{aligned}\tag{25}$$

4) 分母含有 4 个奇因子的二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}=\left(-\frac{1}{15x^6}+\frac{1}{5x^4}-\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{15}\right)D_1+\frac{1}{15x^6}-\frac{7}{45x^4}+\frac{23}{225x^2}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+9)}&=\left(-\frac{2}{105x^8}+\frac{1}{105x^6}+\frac{3}{35x^4}-\frac{13}{105x^2}+\frac{1}{21}\right)D_1\\&\quad+\frac{2}{105x^8}+\frac{1}{315x^6}-\frac{43}{525x^4}+\frac{31}{441x^2}\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+7)(2m+9)}&=\left(-\frac{4}{105x^8}+\frac{3}{35x^6}-\frac{1}{35x^4}-\frac{1}{21x^2}+\frac{1}{35}\right)D_1\\&\quad+\frac{4}{105x^8}+\frac{2}{7x^6}-\frac{13}{1575x^4}+\frac{47}{1225x^2}\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}&=\left(-\frac{2}{35x^8}+\frac{17}{105x^6}-\frac{1}{7x^4}+\frac{1}{35x^2}+\frac{1}{105}\right)D_1\\&\quad+\frac{2}{35x^8}-\frac{13}{105x^6}+\frac{103}{1575x^4}+\frac{71}{11025x^2}\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}&=\left(-\frac{8}{105x^8}+\frac{5}{21x^6}-\frac{9}{35x^4}+\frac{11}{105x^2}-\frac{1}{105}\right)D_1\\&\quad+\frac{8}{105x^8}-\frac{59}{315x^6}+\frac{73}{525x^4}-\frac{281}{11025x^2}\end{aligned}\tag{30}$$

5) 分母含有 5 个奇因子的二项式系数倒数级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=\left(\frac{1}{105x^8}-\frac{4}{105x^6}+\frac{2}{35x^4}-\frac{4}{105x^2}+\frac{1}{105}\right)D_1 -\frac{1}{105x^8}+\frac{2}{63x^6}+\frac{58}{1575x^4}+\frac{176}{11025x^2} \tag{31}$$

2.1. 定理证明

文献[8]级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2x^{2n+2}}{(2n+1)!(n+1)}=(\arcsin x)^2$，$(x^2\le 1)$。两端对 x 求导数，再乘以 $\frac{1}{x}$，得到：

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(2x)^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(2x)^{2n}}{(2n)!(2n+1)}=\frac{\arcsin(x)}{x\sqrt{1-x^2}}$，整理得(1)式，右端为 D_1。

1) 对(1)式左端裂项，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(2x)^{2n}}{(2n)!(2n+1)}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-2)!(2n-1)(2n)(2n+1)}=D_1$，令 $n-1=m$，化成，

$1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(m+1)2x^2(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)}=D_1$ 两端同乘以 $\frac{1}{x^2}$，

$$\frac{1}{x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+3}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right]=\frac{1}{x^2}D_1, \tag{0.1}$$

对(0.1)式实行下列运算，得到分母含 1 个因子，2 个因子的二项式系数恒等式。

① (0.1)式所有分式化成部分分式 $\frac{1}{x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1/2}{2m+1}+\frac{1/2}{2m+3}\right]=\frac{1}{x^2}D_1$，化简得(2)式，令(2)式右端设为 D_3。

② 在(0.1)式中，由于 D_3 已求出，化简得(6)式。

2) 对(1)式左端裂项 $1+\frac{2x^2}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((n-2)!)^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-4)!(2n-3)(2n-2)(2n-1)(2n)(2n+1)}=D_1$，令 $n-2=m$，化成，

$1+\frac{2x^2}{3}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2m+2)(2m+4)x^4(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)(2m+5)}=D_1$，两端同乘以 $\frac{1}{x^4}$，

$$\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+5}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\right]=\frac{1}{x^4}D_1. \tag{0.2}$$

对(0.2)式实行下列运算，得到分母含 1 个，2 个，3 个因子的二项式系数恒等式。

① (0.2)式所有分式化成部分分式

$$\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{3/8}{2m+1}+\frac{1/4}{2m+3}+\frac{3/8}{2m+5}\right]=\frac{1}{x^4}D_1.$$

由于 D_1、D_3 已知，化简得到(3)式，并令(3)式右端为 D_5。

② 在(0.2)式首先将 3 个因子的分式化成部分分式，然后对这些 2 个因子的分式每次保留 1 个，另 1 个化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+D_{15}+\frac{1}{8}D_1+\frac{1}{4}D_3+\frac{5}{8}D_5=\frac{1}{x^4}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{2}{x^4}+\frac{4}{3x^2}+D_{35}+\frac{3}{8}D_1-\frac{1}{4}D_3+\frac{7}{8}D_5=\frac{1}{x^4}D_1. \tag{B}$$

由于 D_1、D_3、D_5 已知，由(A)、(B)计算得到(7)、(8)式。

③ 在(0.2)式保留 3 个因子的分式，其他分式化成部分分式，$\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3x^2}+D_{135}+\frac{1}{4}D_1+\frac{1}{2}D_3+\frac{1}{4}D_5=\frac{1}{x^4}D_1$，由于 D_1、D_3、D_5 已知，化简得到(16)式。

3) 对(1)式左端裂项 $1+\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left((n-3)!\right)^2(n-2)^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-6)!(2n-5)(2n-4)\cdots(2n)(2n+1)}=D_1$，令 $n-3=m$，

$1+\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2m+2)(2m+4)(2m+6)x^6(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}=D_1$，两端同乘以 $\frac{1}{x^6}$，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+7}+\frac{1}{(2m+1)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+7)}\right.\\&+\frac{1}{(2m+5)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+7)}\\&\left.+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+7)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)}\right]=\frac{1}{x^6}D_1\end{aligned}. \tag{0.3}$$

对(0.3)式实行下列运算，得到分母含 1 个，2 个，3 个，4 个因子的二项式系数恒等式。

① (0.3)式所有分式化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{5/16}{2m+1}+\frac{3/16}{2m+3}+\frac{3/16}{2m+5}+\frac{5/16}{2m+7}\right]=\frac{1}{x^6}D_1$$

由于 D_1、D_3、D_5 化简得到(4)式，并令(4)式右端为 D_7。

② 在(0.3)式保留 2 个因子的分式，其他分式成部分分式，然后对 2 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式得到：

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{17}+\frac{7}{48}D_1+\frac{3}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{23}{48}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{37}+\frac{5}{16}D_1-\frac{1}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{9}{48}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{57}+\frac{5}{16}D_1+\frac{3}{16}D_3-\frac{5}{16}D_5+\frac{13}{16}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{C}$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7 已知，由(A)、(B)、(C)计算得出(9)、(10)、(11)式。

③ 在(0.3)式保留 3 个因子的分式，其他分式项化成部分分式，然后对 3 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式得到：

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{137}+\frac{11}{48}D_1+\frac{5}{16}D_3+\frac{3}{16}D_5+\frac{13}{48}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{157}+\frac{13}{48}D_1+\frac{3}{16}D_3+\frac{5}{16}D_5+\frac{11}{48}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{357}+\frac{5}{16}D_1+\frac{1}{16}D_3+\frac{7}{16}D_5+\frac{3}{16}D_7=\frac{1}{x^6}D_1 \tag{C}$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7 已知，由(A)、(B)、(C)计算得出(17)、(18)、(19)式。

④ 在(0.3)式保留 4 个因子的分式，其他分式项化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^6}+\frac{2}{3x^4}+\frac{8}{15x^2}+D_{1357}+\frac{7}{24}D_1+\frac{1}{4}D_3+\frac{1}{8}D_5+\frac{1}{3}D_7=\frac{1}{x^6}D_1$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7 已知，计算得出(26)式。

4) 对(1)式左端裂项 $1+\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}+\frac{16x^6}{35}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left((n-4)!\right)^2(n-3)^2(n-2)^2(n-1)^2n^2(2x)^{2n}}{(2n-8)!(2n-7)(2n-6)(2n-5)\cdots(2n)(2n+1)}=D_1$，令

$n-4=m$，$1+\frac{2x^2}{3}+\frac{8x^4}{15}+\frac{16x^6}{35}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2m+2)(2m+4)(2m+6)(2m+8)x^8(2x)^{2m}}{(2m)!(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=D_1$ 两端同乘以 $\frac{1}{x^8}$，得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\Bigg[\frac{1}{2m+9}+\frac{1}{(2m+1)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+3)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+5)(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}\\&+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}=\frac{1}{x^8}D_1\end{aligned}\quad(0.4)$$

对(0.4)式实行下列运算，得到分母含 1 个、2 个、3 个、4 个、5 个因子的二项式系数恒等式。

① 对(0.4)式所有分式化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m!]^2(2x)^{2m}}{(2m)!}\left[\frac{35/128}{2m+1}+\frac{5/32}{2m+3}+\frac{9/64}{2m+5}+\frac{5/32}{2m+7}+\frac{35/128}{2m+9}\right]=\frac{1}{x^8}D_1,$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7 已知，计算得到(5)式。并令(5)式右端为 D_9。

② 在(0.4)式保留 2 个因子的分式，其他分式化成部分分式。然后对这些 2 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{19}+\frac{19}{32}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{51}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1\quad(A)$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{39}+\frac{35}{128}D_1-\frac{1}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{169}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1\quad(B)$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{59}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3-\frac{7}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{67}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1\quad(C)$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{79}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5-\frac{11}{32}D_7+\frac{99}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1\quad(D)$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7、D_9 已知由(A)、(B)、(C)、(D)计算得出(12)~(15)式。

③ 在(0.4)式保留 3 个因子的分式，其他分式化成部分分式.然后对这些 3 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{139}+\frac{27}{128}D_1+\frac{23}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{97}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{159}+\frac{31}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{13}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{31}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{179}+\frac{97}{384}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{23}{96}D_7+\frac{27}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{C}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{359}+\frac{35}{128}D_1+\frac{7}{96}D_3+\frac{17}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{89}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{D}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{379}+\frac{35}{128}D_1+\frac{11}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{9}{32}D_7+\frac{73}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{E}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{579}+\frac{35}{128}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{1}{64}D_5+\frac{13}{32}D_7+\frac{19}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{F}$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7、D_9 已知，由(A)、(B)、(C)、(D)、(E)、(F)计算得出(20)~(25)式。

④ 在(0.4)式保留 4 个因子的分式，其他分式化成部分分式。然后对这些 4 个因子的分式每次保留 1 个，其余化成部分分式，得到：

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{1359}+\frac{33}{128}D_1+\frac{19}{96}D_3+\frac{7}{64}D_5+\frac{5}{32}D_7+\frac{107}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{A}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{1379}+\frac{101}{384}D_1+\frac{17}{96}D_3+\frac{9}{64}D_5+\frac{13}{96}D_7+\frac{109}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{B}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{1579}+\frac{103}{384}D_1+\frac{5}{32}D_3+\frac{11}{64}D_5+\frac{11}{96}D_7+\frac{37}{128}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{C}$$

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{3579}+\frac{35}{128}D_1+\frac{13}{96}D_3+\frac{13}{64}D_5+\frac{3}{32}D_7+\frac{113}{384}D_9=\frac{1}{x^8}D_1 \tag{D}$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7、D_9 已知，由(A)、(B)、(C)、(D)计算得到(27)~(30)式。

⑤ 在(0.4)式，保留 5 个因子的分式，其他分式化成部分分式。

$$\frac{1}{x^8}+\frac{2}{3x^6}+\frac{8}{15x^4}+\frac{16}{35x^2}+D_{13579}+\frac{13}{48}D_1+\frac{1}{6}D_3+\frac{1}{8}D_5+\frac{1}{6}D_7+\frac{13}{48}D_9=\frac{1}{x^8}D_1$$

由于 D_1、D_3、D_5、D_7、D_9 已知，计算得到(31)式。定理证毕。

2.2. 结语

1) 定理证明过程是：通过逐次裂项，产生含有 1 个，2 个，3 个，4 个，5 个因子的分式，将它们化成部分分式，通过一定程序将这些分式转化成分母含有 1 个，2 个，3 个，4 个，5 个因子的二项式系数倒数级数封闭型公式。如果继续裂项可以到分母含有 1 到 6 个因子，1 到 7 个因子，⋯，1 到 p 的二项式系数倒数级数。所得级数封闭型公式的个数为 $2^6-1,2^7-1,\cdots,2^p-1$ 个。因此，裂项法解决了构造分母含有 p 个因子的二项式系数倒数级数问题，并且所给出的级数公式是封闭型的。

2) 裂项法得出的是(函数)级数。所给公式，若令 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$。可给出一系列二项式系数倒数数值级数恒等式。而参考文献中用积分形式表示的级数，用反三角函数表示的级数显然不是封闭型的。用积分递推公式得出的级数，发生函数得出的级数也仅是数值级数。

3) 裂项法产生新的级数不仅适用于中心型(central binomial coefficients)二项式系数倒数级数，也适用非中心

型二项式系数级数。不仅可选用已知级数进行裂项，也可根据需要构造一个级数对其进行裂项，因此裂项法在级数变换方面有着较广泛应用。

3. 一些数值级数

在定理公式(1)~(15)中令 $x=1/2$ 和 $x=1/\sqrt{2}$，分别有

推论 1 分子为 1 分母含有奇因子二项式系数倒数级数封闭型恒等式

1) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+1)}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$；

2) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+3)}=\frac{14\pi\sqrt{3}}{9}-8$；

3) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+5)}=\frac{74\pi\sqrt{3}}{9}-\frac{400}{9}$；

4) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+7)}=\frac{1774\pi\sqrt{3}}{45}-\frac{16072}{75}$；

5) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+9)}=\frac{56758\pi\sqrt{3}}{315}-\frac{3602528}{3675}$；

6) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)}=-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+4$；

7) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)}=-2\pi\sqrt{3}+\frac{100}{9}$；

8) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)}=-\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}+\frac{164}{9}$；

9) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)}=-\frac{98\pi\sqrt{3}}{15}+\frac{8036}{225}$；

10) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)}=-\frac{142\pi\sqrt{3}}{15}+\frac{3868}{75}$；

11) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)}=-\frac{78\pi\sqrt{3}}{5}+\frac{19108}{225}$；

12) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+9)}=-\frac{2362\pi\sqrt{3}}{105}+\frac{450316}{3675}$；

13) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+9)}=-\frac{1042\pi\sqrt{3}}{35}+\frac{1786564}{11025}$；

14) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+9)}=-\frac{4514\pi\sqrt{3}}{105}+\frac{2579396}{11025}$；

15) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2m}{m}(2m+7)(2m+9)}=-\frac{1478\pi\sqrt{3}}{21}+\frac{56300}{147}$；

推论 2 分子为 2^m，分母含有奇因子二项式系数倒数级数封闭型恒等式

1) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)}=\frac{\pi}{2}$；

2) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)}=\frac{3\pi}{2}-4$；

3) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)}=\frac{23\pi}{6}-\frac{104}{9}$；

4) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+7)}=\frac{91\pi}{6}-\frac{2116}{75}$；

5) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+9)}=\frac{1451\pi}{70}-\frac{238192}{3675}$；

6) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+3)}=-\frac{\pi}{2}+2$；

7) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+5)}=-\frac{5\pi}{6}+\frac{8}{3}$；

8) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+5)}=-\frac{7\pi}{6}+\frac{34}{9}$；

9) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+7)}=-\frac{43\pi}{30}+\frac{1056}{225}$；

10) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+7)}=-\frac{19\pi}{10}+\frac{34}{5};$$

11) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+7)}=-\frac{79\pi}{30}+\frac{1874}{225};$$

12) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+1)(2m+9)}=-\frac{177\pi}{70}+\frac{29774}{3675};$$

13) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+3)(2m+9)}=-\frac{673\pi}{210}+\frac{36782}{3675};$$

14) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+5)(2m+9)}=-\frac{809\pi}{210}+\frac{163174}{11025};$$

15) $$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{\binom{2m}{m}(2m+7)(2m+9)}=-\frac{407\pi}{70}+\frac{67254}{3675}。$$

参考文献 (References)

[1] B. Sury, T. N. Wang and F.-Z. Zhao. Some identities involving of binomial coefficients. Journal of Integer Sequences, 2004, 7: Article ID: 04.2.8.
[2] J.-H. Yang, F.-Z. Zhao. Sums involving the inverses of binomial coefficients. Journal of Integer Sequences, 2006, 9: Article ID: 06.4.2.
[3] S. Amghibech. On sum involving Binomial coefficient. Journal of Integer Sequences, 2007, 10: Article ID: 07.2.1.
[4] T. Trif. Combinatorial sums and series involving inverses of binomial coefficients. Fibonacci Quarterly, 2000, 38(1): 79-84.
[5] F.-Z. Zhao, T. Wang. Some results for sums of the inverses of binomial coefficients, integers. The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2005, 5(1): A22.
[6] R. Sprugnoli. Sums of reciprocals of the central binomial coefficients, integers. The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2006, 6: A27.
[7] 及万会, 张来萍. 关于正负相间二项式系数倒数级数[J]. 理论数学, 2012, 2(4): 192-201.
[8] I. S. Gradshteyn, I. M. Zyzhik. A table of integral, series, and products (7th Edition). Burlington: Academic Press, 2007: 56, 61.

