

# Chinese Traditional Culture and College Mathematics

Huaming Wang<sup>1</sup>, Yuanyuan Ji<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics & Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu

<sup>2</sup>School of Laws, Anhui Normal University, Wuhu

Email: hmking@mail.ahnu.edu.cn, jyy0831@mail.ahnu.edu.cn

Received: Feb. 25<sup>th</sup>, 2013; revised: Mar. 12<sup>th</sup>, 2013; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2013

Copyright © 2013 Huaming Wang, Yuanyuan Ji. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** This study unveils the connections between Chinese traditional culture and college mathematics. By interpreting the probability thought within I Ching and revealing the idea of Yin-Yang theory in calculus, we attempt to inject some new conceptions to college mathematics education, making college mathematics more interesting and comprehensible to Chinese students.

**Keywords:** I Ching; Probability; Yin-Yang Theory

## 国学思想与大学数学

王华明<sup>1</sup>, 纪媛媛<sup>2</sup>

<sup>1</sup>安徽师范大学数学与计算科学学院, 芜湖

<sup>2</sup>安徽师范大学法学院, 芜湖

Email: hmking@mail.ahnu.edu.cn, jyy0831@mail.ahnu.edu.cn

收稿日期: 2013年2月25日; 修回日期: 2013年3月12日; 录用日期: 2013年3月21日

**摘要:** 本文旨在探究国学思想与大学数学之间的联系。通过解读《易经》中的概率思想, 探索微积分中的阴阳学说等手段, 力图在大学数学教育注入新的元素, 让中国学生对数学感兴趣, 更容易理解数学思想。

**关键词:** 易经; 概率论; 阴阳

### 1. 引言

大学数学包括众多的分支, 它以微积分为基础, 包括线性代数、概率论、数理统计、离散数学、解析几何等众多门类。在很多学生眼中, 大学数学就像是一场噩梦。有些同学因为数学不好而直接放弃考研, 有些同学因为畏惧数学而报考那些无需考数学的专业, 更有甚者, 不少同学因为不能通过数学课程考试而无法毕业。究其原因, 一方面是大学数学本身由于高度抽象而具有一定的难度, 另一方面是现行的数学体系主要形成于西方, 采用的大多是西方的思维方式, 其教科书的行文方式也基本采用西方的语言习惯和模式, 不太符合中国学生的思维方式和阅读习惯。因此, 数学成为很多大学生面前一道不可逾越的鸿沟。

作者之一在大学期间数学并不优秀, 只能勉强通过考核, 但最终还是战胜了自己, 顺利考上数学系的研究生并获得硕士和博士学位。作者之二在大学期间一直感觉数学枯燥无味, 所有的数学课基本都是靠蒙混过关。因为惧怕数学, 最终放弃了理科, 考研时选择了无需考数学的教育学专业。而今两位作者都已经完成从学生到老师角色的转变, 走上高校的讲台。联系自己在求学和教学实践中的感悟, 作者试图抛砖引玉地道出数学与国学之间的联系, 一方面揭示隐藏于国学中的数学思想, 另一方面也用国学思想对部分数学理论进行新的解读。

希望助力教师们教学中添加一些新的元素, 在激发学生国学兴趣的同时, 让学生更容易理解看似生涩难懂的数学知识, 领会数学的思想。

本文主要分为三个部分。第 2 节主要讨论《易经》与“概率论”的相互关系, 揭示易经六十四卦之中所蕴藏的古典概率模型, 以条件概率的理论赋予“占卜学”全新的理论基础。第 3 节用阴阳学说的观点解读“微积分”, 所谓“孤阴不生, 独阳不长”, “微分”对应“积分”, “无穷大”对应“无穷小”, “连续”对应“间断”, 微积分的很多理论都可用阴阳学说进行全新解读。第 4 节用一个例子阐述了微积分中“无穷”的概念和《道德经》中所阐述的“道”的联系, 让读者在掌握数学中“无穷”的概念的同时, 更深刻地理解老子所描述的“道”。

中华国学博大精深、包罗万象, 是古代先贤智慧的结晶。虽然从表面上看来, 国学和大学数学好像没有什么关系, 但实际上, 这两者有很多相通之处。国学经典中蕴含着丰富的数学思想, 而数学作为一门自然科学, 其中的很多思想和理论也可以用国学进行全新的解释。但由于作者对国学的理解程度有限, 本文只是试图通过寻找国学和数学的一些联系, 一方面为数学课堂引入新的教学思想, 让学生对枯燥乏味的数学课更感兴趣, 另一方面用数学的观点去解读国学经典, 以期提高其严谨性和科学性。

## 2. “易经八卦”与“概率论”

20 世纪 30 年代, Kolmogorov 引入了概率论的公理化定义, 从此概率论获得了蓬勃发展。虽然此事距今并不遥远, 但概率论实际上有着更为悠久的发展史。早在遥远的商周时代, 国学经典《易经》之中就已经蕴藏着丰富的概率论思想。

《易经》在国学专著中有着重要的地位, 它描述宇宙万物的运行规律, 揭示人与社会、人与自然的相互依存关系, 被尊为群经之首。然而, 《易经》之中也蕴含着丰富的数学特别是概率论思想, 这些思想却很少引起人们的重视。首先, 由于学科之间的巨大差异, 要同时精通《易经》和数学两门学问有较大的难度。其次, 数学是一门严谨的学科, 一切数学定理都建立在严格的定义和推理之上, 而《易经》研究的是事物发展变化的义理, 有着很强的相对性和灵活性, 所以从表面上看, 很难将之与数学紧密联系起来。

本节旨在揭示隐藏于《易经》之中的概率论思想, 以期用概率论思想来解读《易经》六十四卦的形成过程, 尝试将《易经》建立在严格的数学基础之上。另一方面, 也期望抛砖引玉, 使更多的数学工作者尤其是高校数学教师能够了解《易经》、研究《易经》, 以激发学生兴趣, 拓展学生视野, 为大学数学课堂添加一些新的元素。

### 2.1. 易经六十四卦与古典概率模型

古典概率模型, 简称“古典概型”, 是概率论中一个经典和基础的模型。如果从数学的观点来解读易经, 整部易经可以说正是建立在古典概型之上。中国人崇尚圆, 因为圆利于变化, 有变化才会有发展, 才会有生机。生活中最常见的圆莫过于硬币, 将硬币抛向天空, 掉下来, 就会有“正”“反”两个结果, 而这一正一反, 在中国传统文化之中, 正好对应于“阴”“阳”两面。这枚被抛起的硬币, 可视为中国传统哲学中的“太极”。“太极”生“两仪”, “两仪”生“四象”, “四象”生“八卦”(关于八卦的推演过程, 参阅图 1), “八卦”再相互重叠, 产生了易经六十四卦。然后, 由隐藏于六十四卦之中的易理推演出宇宙万物的运行规律, 描述人与自然、人与社会之间的相互关系。

上述《易经》六十四卦的形成过程, 从数学的观点来看, 生动地描述了古典概率模型。易经六十四卦由太极而生, 而古典概型可以用抛硬币的方式产生。抛一次硬币, 结果出现“反面”和“正面”的概率相等, 各为  $1/2$ 。这对应于易经中的“阴”“阳”。抛两次硬币, 共有 4 种可能结果——“正正”、“正反”、“反正”、“反反”, 这四种可能的结果出现的概率相等, 各为  $1/4$ 。这在易经的理论中对应于“四象”, 即“太阳”、“少阳”、“少阴”、“太阴”。抛三次硬币, 共有 8 种可能结果, 即“正正正”、“反反反”、“反反正”、“正

正反”、“正反反”、“反正正”、“反正反”、“正反正”，每种可能的结果发生的概率各为 1/8。这对应于易经八卦中的“乾”、“坤”、“震”、“巽”、“艮”、“兑”、“坎”、“离”，即“天”、“地”、“雷”、“风”、“山”、“泽”、“水”、“火”，这八种元素相互作用构成了宇宙万物的运行图。从如上描述中可见，易经六十四卦的演化过程与古典概型的理论惊人地相似。《易经》被尊为群经之首，刻画了宇宙万物的运行规律。而古典概型可谓是概率论的基础，整个概率论产生和发展几乎都与古典概型有关，下文将进一步阐述《易经》与概率论之间的关系。

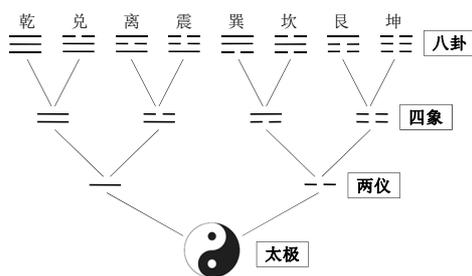


Figure 1. The deduction of Bagua  
图 1. 八卦形成图

## 2.2. 易经中的 $\sigma$ -代数

概率论的公理化定义建立在测度论的基础之上，而  $\sigma$ -代数是测度论中最为基础的内容。《易经》六十四卦相当于一个古典概率模型，六十四卦的全体对应一个样本空间  $\Omega$ ，共有 64 个样本点，即  $\Omega = \{64 \text{ 卦的全体}\}$ 。记  $\mathcal{G} = \{\Omega \text{ 所有子集构成的全体}\}$ 。容易验证  $\mathcal{G}$  满足  $\sigma$ -代数的条件，所以  $\mathcal{G}$  是一个  $\sigma$ -代数。由易经六十四卦的形成过程来看， $\Omega$  中每个样本点出现的概率相等，皆为 1/64，即任意  $\{\omega\} \in \mathcal{G}$ ， $P(\{\omega\}) = 1/64$ 。于是三元组  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  就构成了一个概率空间。通过这种方法，可以建立起整部《易经》的概率论基础，从而用概率论的理论去研究易经。同样可以根据各卦象的不同属性将卦象分为不同的集合，以定义  $\mathcal{G}$  的子  $\sigma$ -代数，进而研究卦象之间的关系与属性。例如，将《易经》六十四卦中下三爻为“乾”的卦象放在一起记为集合  $A$ ，将其余卦象放在一起记为集合  $A^c$ ，即  $A = \{\text{下三爻构成“乾”的卦象}\}$ ， $A^c = \{\text{下三爻不构成“乾”的卦象}\}$ 。若用  $\Phi$  表示不包括任何卦象的空集，则  $\mathcal{F} = \{A, A^c, \Phi, \Omega\}$  满足  $\sigma$ -代数的条件，它构成  $\mathcal{G}$  的一个子  $\sigma$ -代数。由于每个卦象出现的概率各为 1/64，而下三爻构成“乾”的卦象共有八个，所以  $A$  的概率  $P(A) = 1/8$ ，其他卦象出现的概率  $P(A^c) = 1 - P(A) = 7/8$ 。有了  $\sigma$ -代数的概念，下文中将引入条件概率的定义。

## 2.3. “占卜”与“条件概率”

“占卜”自古以来就带着神秘的色彩。有的人完全否定“占卜”，认为这纯粹是江湖术士骗人的把戏。但也有很多人相信“占卜”，作重大决策或者是选定某些重要日子时都要请人卜上一卦。如果从“概率论”的观点来看，占卜术的背后其实有着坚实的数学基础。所以“占卜”并不神秘，并有其科学的一面，如果用科学的眼光去看待它，对我们决策和行事是有指导意义的。

这首先得从“条件概率”说起。前文说道，《易经》六十四卦构成了一个古典概率模型的概率空间  $\Omega$ 。从而根据卦象的不同特点，可以在  $\Omega$  上定义  $\sigma$ -代数，例如上文中定义的  $\mathcal{F} = \{A, A^c, \Phi, \Omega\}$ 。于是由高等概率论的知识可知，可以定义在给定  $\sigma$ -代数  $\mathcal{F}$  的条件下某个特定卦象出现的概率。例如，若用  $A_4$  表示“‘大有卦’出现”这一事件，则  $P(A_4 | \mathcal{F})$  就表示在给定  $\mathcal{F}$  的条件下，“大有卦”出现的概率。当然，因为这里作为条件的  $\mathcal{F}$  是一个非平凡的  $\sigma$ -代数，所以  $P(A_4 | \mathcal{F})$  本身并不是一个确定的值，而是一个随机变量。

这里的随机性，很容易给出合理的解释。一个求卦者走到占卜师面前，占卜师对他的情况一无所知，一切

都是随机的。正如看病讲究望闻问切，医生必须了解病人的病情才能开方下药，占卜师也必须了解求卦者的信息，才能够给他所问之事作出合理的预测。易经是博大精深的，从大处说，它揭示了宇宙万物的运行规律，从小处说，它描述了一个人成长的历程，描述了一件事的发展过程。作为占卜师，首先需获知求卦者所处的人生阶段，了解求卦者的过去和现在，还需弄清求卦者所问之事所处的发展阶段，然后给出预测。

例如，如果根据对求卦者过去和现在的信息的把握，占卜师确定所问卦象的下三爻为“乾”。为了确定剩下的上三爻，占卜师应取出三枚铜钱，抛撒在地上，根据铜钱出现的“正”或“反”来确定上三爻从而得出整个卦象。纵观易经六十四卦，下三爻为“乾”的卦象共有“乾”、“需”、“小畜”、“泰”、“大有”、“大畜”、“大壮”、“夬”八个卦象。用初等概率知识可知，在下三爻构成“乾”的条件下，“大有卦”出现的概率为 $P(A_4|A)=1/8$ 。如果占卜师的三枚铜钱抛出的结果正好是“正反正”，那么他就可以用“大有卦”来为求卦者提供应对之策。

多数人脑海之中也许对电视电影中的一个场景非常熟悉，那就是占卜师将一把铜钱放进罐子里摇几下，倾倒在地板上，看着这些铜钱若有所思，然后就算出了将来会发生什么事。有了如上的概率解释，占卜师的这个行为就不难理解了，这里边其实并没有神秘之处。占卜师所做的只不过是未知事件的一个模拟。

有了概率论的知识，其实占卜就变成了一件简单的事情，每个人都可以做。无论做什么事情之前，都可以卜上一卦，从而趋吉避凶。当然这种方法并不是最好的，因为每个卦象出现的概率都是 $1/64$ 。如果对易经有一定的研究，可以根据对过去和现在的信息的掌握，在一定的条件下去卜卦，这样得到的结果会更加具有指导意义。

### 3. 微积分与阴阳学说

《微积分》，或者称为《高等数学》，成为了很多非数学专业本科生的噩梦。究其原因有很多方面，但最主要的原因，或许是因为微积分形成于西方，其思维方式和教科书的行文方式都采用了西方的模式，所以中国的学生不太适应。其实换一种角度看，可以用中国传统哲学中的阴阳学说对微积分的很多内容进行解读。

中国传统哲学一个基本观点就是“阴阳”学说。《易经》<sup>[1]</sup>云：“一阴一阳之谓道。”《道德经》<sup>[2]</sup>云：“道生一，一生二，二生三，三生万物”，这个“二”亦指阴阳。阴阳描述了事物的正反两个方面，然而“阴”与“阳”并不是孤立的，它们是对立统一的关系，在相互作用的过程之中，可向其对立面转化。

微积分研究的主体是函数，旨在研究函数的性质，这些性质包括连续性、可微性、可积性等等。函数描绘的是不同变量之间的依赖关系，它包含自变量、因变量和对应法则三个要素。 $y=f(x)$ ，这就是一个函数的表达，其中 $x$ 是自变量， $y$ 为因变量，而 $f$ 为对应法则，这个对应法则是函数的核心。微积分研究的就是函数对应法则 $f$ 的性态。“微分”与“积分”其实形成了一对“阴阳”转换的关系。古语云：“孤阴不生，独阳不长。”从某种意义上说，阴阳学说可以看做是微积分学的一个基础组成部分。它隐藏于微积分学的每个角落。“连续”对应“间断”(不连续)，“可微性”对应“可积性”，“无限”对应“有限”，“无穷大”有“无穷小”与之对应。所以微积分并不是什么神秘的东西，将“阴阳”变换的义理引入微积分的教学之中，一些非常晦涩的概念和性质就会忽然显出生机，变得更加生动有趣、易于理解了。

所以，学习微积分的过程中，不应该孤立地将知识分为很多支离破碎的片段，而是要用对立统一的眼光看问题。理解了“无穷小量”的性质，自然也就能够把握“无穷大量”的特点。学习函数连续性的过程中，如果把握了“连续”的定义，自然也就能够理解“间断点”及其分类。熟练掌握了微分中值定理，也就能够理解积分中值定理的证明及其应用。

微分与积分虽然在形式上有很大的差异，然而它们却有着紧密的联系。微分与积分都是建立在极限理论的基础之上，都是由“极限”定义的。《道德经》云：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”如果说“微分”与“积分”对应于“二”，即“阴”与“阳”，那么“极限”就可看为“一”。有了极限作为基础，微积分才

得以产生, 然后由微分与积分的相互作用衍生出整个微积分学。

既然极限理论的完善导致了微积分的产生, 进一步的问题是: “极限理论”是怎么产生的? 极限理论的产生, 源自于人们对“无穷”这个概念的把握。《道德经》云: “天下万物生于有, 有生于无……无名, 万物之始”。世间万物, 都是从“无名”中产生, 这个“无名”其实就是“道”。无独有偶, 微积分开始的地方, 也是“无”, 这个“无”有多层含义, 它包括“无限接近”、“无穷小”、“无穷大”等等。“无穷”是学生在微积分中所遭遇的第一个抽象且不易理解的概念, 它也是极限理论的基础。下一节中, 本文用“道”的观点阐释“无穷”, 同时也通过微积分中“无穷”的观念更为具体地认识“道”。

#### 4. “道”与“无穷”

顾名思义, “微积分”的核心内容分为两个部分, 一是“微分”, 二是“积分”。无论是微分还是积分, 都建立在极限理论的基础之上, 可以说, 极限理论是微积分学的基础, 而极限是从一个被称为“无穷”的概念开始的。在数学中, “无穷”包括“无穷小”与“无穷大”两层含义。“无穷大”一般用记号“ $\infty$ ”表示。学生首先碰到的是数列的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 例如  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 即  $n$  趋向于  $\infty$  时,  $\frac{1}{n}$  趋向于 0。细心的同学会追问, 这其中的“无穷大”到底在哪里? 这个问题对于很多同学来说, 可能直到微积分课程结束都还是心中的一个疑惑。另外一个与“无穷”相关的概念是“无穷小量”, 例如当  $n$  趋向于无穷大时,  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  是一个“无穷小量”。 $n$  越大时, 这个量越接近于 0 然而, 它永远也不会达到 0。这个“无穷小量”的概念也给学生带来很大的困惑。

其实, 在中国的很多古籍之中, 很早就有关于“无穷大”与“无穷小”的描述。《庄子·逍遥游》<sup>[3]</sup>中描写道: “北冥有鱼, 其名为鲲。鲲之大, 不知其几千里也; 化而为鸟, 其名为鹏。鹏之背, 不知其几千里也; 怒而飞, 其翼若垂天之云。”这里其实就是对“无穷大”概念的一种形象的描述。《庄子·天下》<sup>[3]</sup>中描写道: “一尺之棰, 日取其半, 万世不竭。”这其中就包括有“无穷小量”的思想, “极限”的定义已经呼之欲出了, 只是古人没有将之抽象成为严格的数学定义而已。

“无穷”的概念, 可以从侧面去描写, 但是却极难从正面去下一个定义。纵观历史, 数学家和哲学家们一直对“无穷”这一概念纠缠不清。例如, 微积分的创始人之一牛顿逝世后不久, 哲学家毕晓普·伯克利在他的《分析家》一书中对微积分进行了公然的抨击, 他侮辱数学家是相信“消失的量的幽灵”的异教徒<sup>[4]</sup>。

微积分中的“无穷”与《道德经》一书中的“道”有着相通之处。作为《道德经》的开篇, 老子云: “道可道, 非常道; 名可名, 非常名。无名, 万物之始; 有名, 万物之母。故常无欲, 以观其妙; 常有欲以观其徼。此两者同出而异名, 同谓之玄, 玄之又玄, 众妙之门。”而在《道德经》第四章中, 老子云: “道冲, 而用之或不盈。渊兮, 似万物之宗。”老子认为, “道”源于虚空, 唯其虚空, 所以能包容万物。“道”是玄奥而又玄奥的东西, 蕴藏着创造一切的因子, 是开启大千世界无穷奥妙的总门。“道”是构成世界的实体, 是万物变化的动力, 是人类行为的准则。它幽微深远, 却不可言说, 超乎于言辞。纵观整部《道德经》, 老子都没有从正面描写“道”, 没有直接说明“道”是什么, 而是通过各种侧面的描写, 让人们领会“道”的内涵。

下面, 我们简述数学中阐述“无穷大”的一个例子, 以期获得对“道”更为深刻的认识和启示。“‘无穷大’在哪儿?” 这样一个问题虽然很难正面回答, 但是却可以通过“一一映射”去认识“无穷大”这一概念。下面给一个从直观上很容易理解的命题。

**命题:** 区间 $[0,1]$ 、四分之一圆弧与区间 $[1,\infty]$ 具有相同的“基数”(“同样多”的点)。

**注:** 由于实数轴上任意长度的区间内的点都是不可数的。所以两个区间有“同样多”的点这种说法并不确切, 这里只是一个直观的说明。

只需证明这三者之上的点, 可以用某种方式建立一一映射即可。如图 2 所示。

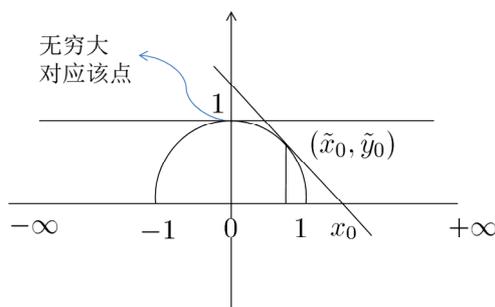


Figure 2. Zero and infinity  
图 2.0 与无穷

在区间 $[1, \infty]$ 上取定一点 $x_0$ , 过该点作圆弧的切线, 这条切线交于圆弧上某个点 $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ , 这个点是唯一的, 即通过区间 $[1, \infty]$ 上不同的点作切线, 必然交于圆弧上不同的点。反过来, 取定第一象限四分之一圆弧上的一个点 $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ , 作切线也交于直线上某一个点 $x_0$ 。而且通过圆弧上不同的点作切线, 也必然交于直线上不同的点。通过切线这个桥梁, 我们建立了区间 $[1, \infty]$ 上的点和第一象限四分之一圆弧上的点的一一映射, 所以, 区间 $[1, \infty]$ 上的点和第一象限四分之一圆弧上的点是“同样多”的。

同理, 要证明区间 $[0, 1]$ 与四分之一圆弧上的点“同样多”, 只需通过区间 $[0, 1]$ 上的点作垂线, 就可建立起区间 $[0, 1]$ 与四分之一圆弧上的点的一一映射。

那么, 无穷大到底在哪儿呢?

不难发现, 当直线上取的点越来越远时, 所作切线就越来越平, 那么当切线和横轴平行时, 就“达到”了无穷大。也就是说, 无穷大就对应于半圆与纵轴的交点, 即点 $(0, 1)$ 。所以无穷并不是遥不可及的, 用这种作切线的方法, 可以将无穷和半圆上的 $(0, 1)$ 点对应起来, “无穷大”虽然看不见摸不着, 但是 $(0, 1)$ 点却真实地存在于那里。而圆弧上的 $(0, 1)$ 点对应于区间 $[0, 1]$ 上的 $0$ 点, 所以“无穷大”其实与 $0$ 点相对应。

故《道德经》言: “万物并作, 吾以观复。夫物芸芸, 各复归其根。”万物蓬勃生长, 人们可以从中间观察到天道往复循环的道理。万物纷纷芸芸, 但最终都将各自返回到它们的本根。事物虽不断发展, 但达到一定极限, 就可能一变而到自己的反面。如此循环往复, 生生不息。正如通过“ $0$ ”可以认识“无穷大”一样, “道”亦然, 世间万物常常可以通过其反面呈现出它的本真。

## 5. 致谢

感谢评阅人为本文提出了很多具有启发性的修改意见, 这些意见对本文的完善有着重要的作用。

## 参考文献 (References)

- [1] 邹学熹, 余贤武, 主编: 易经[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 2008.
- [2] 辜正坤, 译. 道德经[M]. 北京: 中国对外翻译出版公司, 2006.
- [3] 张庆利, 著译. 庄子[M]. 武汉: 崇文书局, 2003.
- [4] 理查德·曼凯维奇, 著. 冯速, 译. 数学的故事[M]. 海口: 海南出版社, 2002.