Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 215-222
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33032 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Local and Global Higher Integrability of Weak Solutions to a Class of Obstacle Systems*

Shuqing Zhou[1,2], Zhenhua Hu[3]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha
[2]Key Laboratory of High Performance Computing and Stochastic Information Processing, Hunan Normal University, Changsha
[3]Hunan City University, Yiyang
Email: zhoushuqing87@163.com, 539880713@qq.com

Received: Mar. 1st, 2013; revised: Mar. 17th, 2013; accepted: Apr. 5th, 2013

Abstract: This paper introduces obstacle systems for a class of quasilinear elliptic partial differential systems $D_i\left(A_\alpha^i\left(x,\nabla u\right)\right)=D_i\left(f_\alpha^i\left(x,u\right)\right),\ \ \alpha=1,2,\cdots,N,$ and obtains the local and global higher integrability of weak solutions to the obstacle systems by constructing special test functions and using Inverse Hölder's Inequality. The results generalize some known results for obstacle problems $\left(N=1\right)$ to obstacle systems $\left(N>1\right)$.

Keywords: Local Integrability; Global Integrability; Obstacle Systems; Inverse Hölder's Inequality

一类障碍系统弱解的局部与全局高阶可积性*

周树清[1,2]，胡振华[3]

[1]湖南师范大学数学与计算机科学学院，长沙
[2]高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室，长沙
[3]湖南城市学院，益阳
Email: zhoushuqing87@163.com, 539880713@qq.com

收稿日期：2013 年 3 月 1 日；修回日期：2013 年 3 月 17 日；录用日期：2013 年 4 月 5 日

摘　要：本文讨论了一类偏微分方程的障碍系统 $D_i\left(A_\alpha^i\left(x,\nabla u\right)\right)=D_i\left(f_\alpha^i\left(x,u\right)\right)$，$\alpha=1,2,\cdots,N$，通过构造特殊的检验函数并利用逆 Hölder 不等式，得到了系统的弱解的局部和全局高阶可积性，从而把有关障碍问题 $\left(N=1\right)$ 的一些结果推广到障碍系统 $\left(N>1\right)$。

关键词：局部可积性；全局可积性；障碍系统；逆 Hölder 不等式

1. 引言

设 $\Omega\subset R^N$ 是一个有界区域。我们考虑如下的椭圆系统：

$$D_i\left(A_\alpha^i\left(x,\nabla u\right)\right)=D_i\left(f_\alpha^i\left(x,u\right)\right),\quad \alpha=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

这里，$A_\alpha^i\left(x,\nabla u\right), f_\alpha^i\left(x,u\right)$ 满足下文给出的条件。若记 $A\left(x,\nabla u\right)=\left(A_\alpha^i\left(x,\nabla u\right)\right), f\left(x,u\right)=\left(f_\alpha^i\left(x,u\right)\right)$，则方程(1.1)变为

*本文得到国家自然科学基金(No.11271120)、湖南省自然科学基金(No.11JJ6005)和湖南省重点学科建设项目资助。

$$Div\left(A\left(x,\nabla u\right)\right)=Div\left(f\left(x,u\right)\right) \tag{2}$$

我们的目的是把障碍问题 $(N=1)$ 的弱解的高阶可积性结果推广到障碍系统 $(N>1)$。为此，我们首先定义方程组(1)或(2)的障碍系统，然后讨论该障碍系统的弱解的高阶可积性。可积性是正则性研究的一个重要方面，对强解的可积性已有很多研究，参见文[1]及其参考文献。

为了叙述方便起见，我们先给出一些记号。

设 $A=\left(a_\alpha^i\right),B=\left(b_\alpha^i\right)$ 是两个 $n\times N$ 矩阵，定义 $A\bullet B=a_\alpha^i b_\alpha^i$，这里和下文都使用重复指标表示求和的约定：这里 i 从 1 到 n 求和，α 从 1 到 N 求和。

设 $f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),\cdots,f_N\left(x\right)\right),g\left(x\right)=\left(g_1\left(x\right),\cdots,g_N\left(x\right)\right)$是定义在区域 Ω 上的向量值函数，我们定义

$$f\left(x\right)\lhd g\left(x\right)$$

当且仅当

$$f_\alpha\left(x\right)\ge g_\alpha\left(x\right),a.e.x\in\Omega,\forall 1\le\alpha\le N,$$

并且定义

$$\max\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}=\left(\max\left\{f_1\left(x\right),g_1\left(x\right)\right\},\cdots,\max\left\{f_N\left(x\right),g_N\left(x\right)\right\}\right)$$

以及 $\theta^+\left(x\right)=\max\left\{\theta\left(x\right),0\right\},\theta^-\left(x\right)=\max\left\{-\theta\left(x\right),0\right\}$。

记 $W^{1,p}\left(\Omega\right),W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ $(1<p<\infty)$ 为通常的 Sobolev 空间，并记

$$W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)=\left\{f\left(x\right)\middle|f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),\cdots,f_N\left(x\right)\right),f_\alpha\left(x\right)\in W^{1,p}\left(\Omega\right),\forall 1\le\alpha\le N\right\},$$

$$W_0^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)=\left\{f\left(x\right)\middle|f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),\cdots,f_N\left(x\right)\right),f_\alpha\left(x\right)\in W_0^{1,p}\left(\Omega\right),\forall 1\le\alpha\le N\right\},$$

$$W_{loc}^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)=\left\{f\left(x\right)\middle|f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),\cdots,f_N\left(x\right)\right),f_\alpha\left(x\right)\in W_{loc}^{1,p}\left(\Omega\right),\forall 1\le\alpha\le N\right\}。$$

设 $x_0\in\Omega,Q_r$ 表示中心为 x_0，且边长为 r 的柱体，$Q_{\lambda r}$ 表示中心为 x_0，且与 Q_r 的边平行的柱体。记 f 在 Q_r 上的积分平均为

$$f_r\triangleq\oint_{Q_r}f\mathrm{d}x\triangleq\frac{1}{\left|Q_r\right|}\int_{Q_r}f\mathrm{d}x。$$

设

$$\theta\in W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right),\varphi:\Omega\to R^N,$$

记

$$K_{\theta,\varphi}^p\left(\Omega,R^N\right)=\left\{u\in W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right):u-\theta\in W_0^{1,p}\left(\Omega,R^N\right),u\lhd\varphi\, a.e.\mathrm{in}\,\Omega\right\}$$

我们考虑 $K_{\theta,\varphi}^p\left(A\right)$-障碍系统弱解的高阶可积性。

定义：称函数 $u\in K_{\theta,\varphi}^p\left(\Omega,R^N\right)$ 是 $K_{\theta,\varphi}^p\left(A\right)$-障碍系统的弱解是指

$$\int_\Omega\left(A\left(x,\nabla u\right)-f\left(x,u\right)\right)\bullet\nabla\left(v-u\right)\mathrm{d}x\ge 0 \tag{3}$$

对所有 $v\in K_{\theta,\varphi}^p\left(\Omega,R^N\right)$ 都成立，这里 $\nabla u=\left(\nabla u_1,\cdots\nabla u_N\right)^{\mathrm{T}}$。

在 $N=1$，$f=0$ 以及 A 满足齐次性条件时，李工宝和 O. Martio[2,3]得到了 $K_{\theta,\varphi}^p\left(A\right)$-障碍问题的弱解的高阶可积性结果。障碍系统常常出现在控制理论、优化控制理论、非线性位势理论、变分不等式、燃烧理论以及金融学等，参见文献[1,3-6]及其参考文献。

我们的记号是标准的。

2. 主要结果

设 $\Omega \subset R^N$ 是一个有界区域，$1 < p < \infty$，并假设 $A:\Omega \times R^{nN} \to R^{nN}, f:\Omega \times R^N \to R^{nN}$ 是 Caratheodory 函数且满足如下条件：

(A) 对给定的 $0 < \alpha < \beta < \infty$，所有的 $h \in R^{nN}$ 以及几乎处处 $x \in \Omega$，有

$$A(x,h) \bullet h \ge \alpha |h|^p, |A(x,h)| \le \beta |h|^{p-1} + \xi(x);$$

(F) 对所有的 $t \in R^N$ 以及几乎处处 $x \in \Omega$，有

$$|f(x,t)| \le |t|^{(p-1)\gamma} + m(x),$$

这里，$\xi(x), m(x)$ 是 Ω 上的实函数。

对于 $K_{\theta,\varphi}^p(A)$-障碍系统的弱解，我们有如下的结论：

定理 2.1：设 $\varphi,\theta \in W^{1,s}(\Omega)$ $(s > p), u \in K_{\theta,\varphi}^p(\Omega, R^N)$ 是 $K_{\theta,\varphi}^p(A)$-障碍系统的弱解，这里 A, f 满足假设条件(A)与(F)，且 $\xi(x), m(x) \in L^{\frac{s}{p-1}}(\Omega), 1 \le \gamma \le \dfrac{n}{n-p}$, 则存在仅依赖于 $n, N, p, s, \alpha, \beta, \gamma$ 的常数 ε_0，且满足 $0 < \varepsilon_0 < s - p$，使得对 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$，有 $u \in W_{loc}^{1,p+\varepsilon}(\Omega, R^N)$。进一步，对任意 $x_0 \in \Omega$ 以及任意满足 $Q_{2r} \subset\subset \Omega$ 的柱体 Q_r，有

$$\left[\oint_{Q_r} \left(|\nabla u| + |u|^\gamma\right)^{p+\varepsilon} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p+\varepsilon}} \le C\left[\oint_{Q_{2r}} \left(|\nabla u| + |u|^\gamma\right)^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + C\left(\oint_{Q_{2r}} H^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4}$$

这里，$H = |D\varphi| + |\xi|^{\frac{1}{p-1}} + |m|^{\frac{1}{p-1}}, C = C(n, N, p, s, \alpha, \beta, \gamma, diam(\Omega)) < \infty$。

为了讨论全局正则性，必须对边界加一些正则性的条件。

称区域边界 $\partial\Omega$ 是 p- Poincaré 厚的是指，对任意满足 $Q_{\frac{3r}{2}} \cap \Omega^C \ne \phi$ 的柱体 Q_r $(r > 0)$，如果 $u \in W^{1,p}(Q_{2r})$ 且在 $(R^n \setminus \Omega) \cap Q_{2r}$ 上有 $u = 0$，则成立

$$\left(\int_{Q_{2r}} |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_{Q_{2r}} |\nabla u|^{\frac{pn}{p+n}} dx\right)^{\frac{p+n}{pn}} \tag{5}$$

这里常数 $0 < C < \infty$ 不依赖于 Q_r。

李工宝和 O. Martio[7]给出了在条件 $p \ge \dfrac{n}{n-1}$ 下(5)式成立的一些例子。

对于 $K_{\theta,\varphi}^p(A)$-障碍系统的弱解的全局正则性，我们有：

定理 2.2：设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 p- Poincaré 厚的，$p > \dfrac{n}{n-1}$，且 $\varphi,\theta \in W^{1,s}(\Omega)$ $(s > p)$，$u \in K_{\theta,\varphi}^p(\Omega, R^N)$ 是 $K_{\theta,\varphi}^p(A)$-障碍系统的弱解，这里 A, f 满足假设条件(A)与(F)，其中 $\xi(x), m(x) \in L^{\frac{s}{p-1}}(\Omega), 1 \le \gamma \le \dfrac{n}{n-p}$, 则存在仅依赖于 $n, N, p, s, \alpha, \beta, \gamma, \Omega$ 的常数 ε_0，满足 $0 < \varepsilon_0 < s - p$，使得对 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$，有 $u \in W^{1,p+\varepsilon}(\Omega, R^N)$，且有

$$\left[\oint_{\Omega} \left(|\nabla u| + |u|^\gamma\right)^{p+\varepsilon} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p+\varepsilon}} \le C\left[\oint_{\Omega} \left(|\nabla u| + |u|^\gamma\right)^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + C\left(\oint_{\Omega} H^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \tag{6}$$

这里，

$$H = \|\nabla\varphi\| + |\nabla\theta| + |\xi|^{\frac{1}{p-1}} + |m|^{\frac{1}{p-1}}, C = C(n, N, p, s, \alpha, \beta, \gamma, \Omega) < \infty。$$

3. 引理与主要结论的证明

下面的引理出自[8,9]。

引理 3.1(逆 Hölder 不等式)：设 $Q\subset\Omega$ 是一个 n-维柱体，g,G 是两个定义在 Ω 上的非负函数。假设对任意的 $x_0\in\Omega$ 和 $0<r<\min\left\{\frac{1}{2}dist\left(x_0,\partial\Omega\right),r_0\right\}$，成立

$$\oint_{Q_r(x_0)}g^p\mathrm{d}x\le b\left(\oint_{Q_{2r(x_0)}}g\mathrm{d}x\right)^p+\tau\oint_{Q_{2r(x_0)}}g^p\mathrm{d}x+\oint_{Q_{2r(x_0)}}G^p\mathrm{d}x \tag{7}$$

这里，$b>1,r_0>0,0\le\tau<1$ 为常数，则存在仅依赖于 n,p,b,τ 的常数 $\varepsilon_1>0,c>0$，满足对任意 $q\in\left[p,p+\varepsilon_1\right)$，有 $g\in L_{loc}^q\left(\Omega\right)$，而且，对任意 $Q_r\left(x_0\right),Q_{2r}\left(x_0\right)\subset\subset\Omega,0<r<r_0$，成立

$$\left(\oint_{Q_r(x_0)}g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le c\left[\left(\oint_{Q_{2r(x_0)}}g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\oint_{Q_r(x_0)}G^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{8}$$

定理 2.1 和定理 2.2 的证明受到[10]的启发。下文中仅依赖于已知常数 $n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,r_0$ 的常数用同一个字母 C 表示。

定理 2.1 的证明：对给定的 $x_0\in\Omega$，记 Q_r 表示中心为 x_0，且满足 $Q_{2r}\subset\subset\Omega$ 的柱体。设 $\eta\in C_0^\infty\left(Q_{2r}\right)$ 是标准的截断函数，即 $0\le\eta\le1,\left|\nabla\eta\right|\le\frac{C}{r}$，并且在 Q_r 上 $\eta\equiv1$。

令 $w=u-u_{2r}-\left(\varphi-\varphi_{2r}\right)$，记 $v=u-\eta^p w$，则 $v\in K_{\theta,\varphi}^p\left(\Omega,R^N\right)$。事实上，因为 $\varphi\in W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)$，$\eta\in C_0^\infty\left(Q_{2r}\right),u\in W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right),u-\theta\in W_0^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)$，所以有 $v\in W^{1,p}\left(\Omega,R^N\right),v-\theta\in W_0^{1,p}\left(\Omega,R^N\right)$。又因为在 Ω 上几乎处处有 $u\lhd\varphi,u_{2r}\lhd\varphi_{2r}$，于是得到

$$v=\left(1-\eta^p\right)u+\eta^p\varphi+\eta^p\left(u_{2r}-\varphi_{2r}\right)\lhd\left(1-\eta^p\right)u+\eta^p\varphi\lhd\varphi, \tag{9}$$

于是 $v\in K_{\theta,\varphi}^p\left(\Omega,R^N\right)$。由此得

$$\nabla\left(v-u\right)=-\eta^p\left(\nabla u-\nabla\varphi\right)-p\eta^{p-1}\nabla\eta\otimes w,$$

代入(3)式得，

$$\int_\Omega\left(A\left(x,\nabla u\right)-f\left(x,u\right)\right)\bullet\left[\eta^p\left(\nabla u-\nabla\varphi\right)+p\eta^{p-1}\nabla\eta\otimes w\right]\mathrm{d}x\le0 \tag{10}$$

由上式及假设条件(A)与(F)可得

$$\begin{aligned}&\alpha\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\nabla u\right|^p\mathrm{d}x\le\int_{Q_{2r}}\eta^pA\left(x,\nabla u\right)\bullet\nabla u\mathrm{d}x\\&\le\beta\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\nabla u\right|^{p-1}\left|\nabla\varphi\right|\mathrm{d}x+\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\xi\right|\left|\nabla\varphi\right|\mathrm{d}x+\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|u\right|^{(p-1)\gamma}\left|\nabla\varphi\right|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|m\right|\left|\nabla\varphi\right|\mathrm{d}x+p\beta\int_{Q_{2r}}\eta^{p-1}\left|\nabla u\right|^{p-1}\left|w\right|\left|\nabla\eta\right|\mathrm{d}x+p\int_{Q_{2r}}\eta^{p-1}\left|\xi\right|\left|w\right|\left|\nabla\eta\right|\mathrm{d}x\\&\quad+p\int_{Q_{2r}}\eta^{p-1}\left|u\right|^{(p-1)\gamma}\left|w\right|\left|\nabla\eta\right|\mathrm{d}x+p\int_{Q_{2r}}\eta^{p-1}\left|m\right|\left|w\right|\left|\nabla\eta\right|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|u\right|^{(p-1)\gamma}\left|\nabla u\right|\mathrm{d}x+\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|m\right|\left|\nabla u\right|\mathrm{d}x\\&\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8+I_9+I_{10}\end{aligned} \tag{11}$$

利用 Hölder 不等式以及 Young 不等式得

$$I_1\le\frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\nabla u\right|^p\mathrm{d}x+C\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\nabla\varphi\right|^p\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$I_2\le C\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\xi\right|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x+C\int_{Q_{2r}}\eta^p\left|\nabla\varphi\right|^p\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$I_3 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |u|^{p\gamma} \mathrm{d}x + C\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla\varphi|^p \mathrm{d}x \tag{14}$$

$$I_4 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |m|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x + C\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla\varphi|^p \mathrm{d}x \tag{15}$$

$$\begin{aligned} I_5 &\le \frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x + C\int_{Q_{2r}} |w|^p |\nabla\eta|^p \mathrm{d}x \\ &\le \frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x + Cr^{-p}\int_{Q_{2r}} |w|^p \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16}$$

我们现在来估计 $r^{-p}\int_{Q_{2r}} |w|^p \mathrm{d}x$：选取 t 满足 $\max\left\{1, \frac{np}{n+p}\right\} \le t < p$，由 w 的定义、Sobolev 不等式以及 Minikowski 不等式

$$\begin{aligned} r^{-p}\int_{Q_{2r}} |w|^p \mathrm{d}x &\le Cr^n \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla w|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} \\ &\le Cr^n \left[\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

由(16)与(17)式得到

$$I_5 \le \frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x + Cr^n \left[\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}}\right] \tag{18}$$

由 Hölder 不等式、Young 不等式以及(17)式得到

$$I_6 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |\xi|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x + Cr^n \left[\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}}\right] \tag{19}$$

$$I_7 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |u|^{p\gamma} \mathrm{d}x + Cr^n \left[\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}}\right] \tag{20}$$

$$I_8 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |m|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x + Cr^n \left[\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + \left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}}\right] \tag{21}$$

$$I_9 \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |u|^{p\gamma} \mathrm{d}x + \frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x \tag{22}$$

$$I_{10} \le C\int_{Q_{2r}} \eta^p |m|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x + \frac{\alpha}{8}\int_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x \tag{23}$$

由(11)~(15)式以及(18)~(23)式得

$$\begin{aligned} \oint_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla u|^p \mathrm{d}x &\le C\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} + C\oint_{Q_{2r}} \eta^p |u|^{p\gamma} \mathrm{d}x + C\oint_{Q_{2r}} \eta^p |\nabla\varphi|^p \mathrm{d}x \\ &\quad + C\oint_{Q_{2r}} \eta^p \left[|\xi|^{\frac{p}{p-1}} + |m|^{\frac{p}{p-1}}\right] \mathrm{d}x + C\left(\oint_{Q_{2r}} |\nabla\varphi|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} \end{aligned} \tag{24}$$

现利用 Sobolev-Poincaré 不等式和 Hölder 不等式来估计

$$\begin{aligned} \oint_{Q_{2r}} \eta^p |u|^{p\gamma} \mathrm{d}x &\le C\oint_{Q_{2r}} \eta^p |u-u_{2r}|^{p\gamma} \mathrm{d}x + \oint_{Q_{2r}} \eta^p |u_{2r}|^{p\gamma} \mathrm{d}x \\ &\le Cr^{\left[n\left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{p}\right)+1\right]p\gamma} \left(\int_{Q_{2r}} |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{\gamma-1} \oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^p \mathrm{d}x + C\left(\oint_{Q_{2r}} |u|^{\gamma t} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} \\ &\triangleq C\psi(r)\oint_{Q_{2r}} |\nabla u|^p \mathrm{d}x + C\left(\oint_{Q_{2r}} |u|^{\gamma t} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{t}} \end{aligned} \tag{25}$$

由$\gamma\geq1$以及绝对连续性定理知，当$r\to0$时，有$\psi(r)\to0$。于是

$$\oint_{Q_{2r}}|\nabla u|^p\,dx\leq C\left(\oint_{Q_{2r}}|\nabla u|^t\,dx\right)^{\frac{p}{t}}+C\psi(r)\oint_{Q_{2r}}|\nabla u|^p\,dx+C\left(\oint_{Q_{2r}}|u|^{\gamma t}\,dx\right)^{\frac{p}{t}}+C\oint_{Q_{2r}}\left[|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}\right]^p dx \tag{26}$$

在上式两端加上$\oint_{Q_{2r}}\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx$并利用(25)得

$$\oint_{Q_r}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx\leq C\left[\oint_{Q_{2r}}\left(|\nabla u|^t+|u|^{\gamma t}\right)dx\right]^{\frac{p}{t}}+C\psi(r)\oint_{Q_{2r}}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx+C\oint_{Q_{2r}}\left[|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}\right]^p dx \tag{27}$$

令$g=|\nabla u|^t+|u|^{t\gamma},H=|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}},G=H^t,k=\frac{p}{t}$，(27)式可改写为

$$\oint_{Q_r}g^k dx\leq C\left(\oint_{Q_{2r}}g dx\right)^k+\tau\oint_{Q_{2r}}g^k dx+C\oint_{Q_{2r}}G^k dx \tag{28}$$

这里，$\tau=C\psi(r)$。取r_0使得当$0<r<r_0$时，有$0<\tau<1$。于是有引理3.1知，存在$0<\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma)<s-p$，使得对任意$0<\varepsilon<\varepsilon_0$，有$u\in W_{loc}^{1,p+\varepsilon}(\Omega,R^N)$。进一步，对任意$x_0\in\Omega$以及任意满足$Q_{2r}\subset\subset\Omega$的柱体$Q_r$，有

$$\left[\oint_{Q_r}\left(|\nabla u|+|u|^\gamma\right)^{p+\varepsilon}dx\right]^{\frac{1}{p+\varepsilon}}\leq C\left[\oint_{Q_{2r}}\left(|\nabla u|+|u|^\gamma\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+C\left(\oint_{Q_{2r}}H^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \tag{29}$$

这里，$H=|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}},C=C(n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,diam(\Omega))<\infty$。

定理2.2的证明：由于Ω是有界的，故可选取柱体$Q_0=Q_{2r_0}$，使得$Q_{r_0}\subset\Omega\subset Q_{2r_0}$。对任意的$Q_{2r}\subset Q_{2r_0}$，分两种情况讨论：1) $Q_{\frac{3r}{2}}\subset\Omega$；2) $Q_{\frac{3r}{2}}\cap\Omega^C\neq\phi$。

情况1) 从定理2.1的证明中我们得到：

$$\oint_{Q_r}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx\leq C[\oint_{Q_{2r}}\left(|\nabla u|^t+|u|^{\gamma t}\right)dx]^{\frac{p}{t}}+C\psi(r)\oint_{Q_{2r}}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx+C\oint_{Q_{2r}}\left[|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}\right]^p dx \tag{30}$$

在$Q_{2r}\cap\Omega$上，令$g=|\nabla u|^t+|u|^{t\gamma},H=|\nabla\varphi|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}},G=H^t,k=\frac{p}{t}$，在$Q_{2r}\setminus\Omega$上，令$g=H=G=0$，(30)式变为

$$\oint_{Q_r}g^k dx\leq C\left(\oint_{Q_{2r}}g dx\right)^k+\tau\oint_{Q_{2r}}g^k dx+C\oint_{Q_{2r}}G^k dx \tag{31}$$

这里，当$r\to0$时，有$\tau=C\psi(r)\to0$，$C=C(n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,diam(\Omega))<+\infty$。

情况2) 注意到若用$\tilde{\theta}=\max\{\varphi,\theta\}$代替$\theta$，我们就可以假设$\theta\lhd\varphi$。事实上，$\tilde{\theta}=(\varphi-\theta)^++\theta$，又由于$(u-\theta)^+\lhd(\varphi-\theta)^+\lhd0,(u-\theta)^+\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$，得到$(\varphi-\theta)^+\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$，$u-\tilde{\theta}\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$。为书写方便起见，我们把$\tilde{\theta}$写成$\theta$。设$\eta\in C_0^\infty(Q_{2r})$是如定理2.1的证明中的截断函数，令$v=u-\eta^p(u-\theta)$。由于$v-\theta\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$，且在$\Omega$上几乎处处有$u\lhd\varphi,\theta\lhd\varphi$，从而$v=(1-\eta^p)u+\eta^p\theta\lhd(1-\eta^p)\varphi+\eta^p\varphi\lhd\varphi$，故$v\in K_{\theta,\varphi}^p(\Omega,R^N)$。

因为$\nabla v-\nabla u=-\eta^p\nabla u-p\eta^{p-1}\nabla\eta\otimes(u-\theta)+\eta^p\nabla\theta$，代入(3)式，并利用假设条件(A)与(F)可得

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_\Omega\eta^p|\nabla u|^p\,dx\leq\int_\Omega A(x,\nabla u)\bullet\nabla u dx\\
&\leq\int_\Omega\left\{\left[A(x,\nabla u)-f(x,u)\right]\bullet\left[\eta^p\nabla\theta-p\eta^{p-1}\nabla\eta\otimes(u-\theta)\right]+f(x,u)\bullet\eta^p\nabla u\right\}dx\\
&\leq\int_\Omega\eta^p\left[\beta|\nabla u|^{p-1}+|\xi|\right]|\nabla\theta|dx+\int_\Omega\eta^p\left[|u|^{(p-1)\gamma}+|m|\right]|\nabla\theta|dx\\
&\quad+\int_\Omega\eta^p\left[|u|^{(p-1)\gamma}+|m|\right]|\nabla u|dx+p\int_\Omega\eta^{p-1}|u-\theta||\nabla\eta|\left[\beta|\nabla u|^{p-1}+|\xi|\right]dx+p\int_\Omega\eta^{p-1}\left[|u|^{(p-1)\gamma}+|m|\right]|u-\theta||\nabla\eta|dx\\
&\triangleq I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}+I_{15}
\end{aligned} \tag{32}$$

下面来估计以上各式：

$$I_{11}\le\frac{\alpha}{8}\int_\Omega\eta^p|\nabla u|^p\,dx+C\int_\Omega\eta^p|\xi|^{\frac{p}{p-1}}\,dx+C\int_\Omega\eta^p|\nabla\theta|^p\,dx \tag{33}$$

$$I_{12}\le C\int_\Omega\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx+C\int_\Omega\eta^p|m|^{\frac{p}{p-1}}\,dx+C\int_\Omega\eta^p|\nabla\theta|^p\,dx \tag{34}$$

$$I_{13}\le\frac{\alpha}{8}\int_\Omega\eta^p|\nabla u|^p\,dx+C\int_\Omega\eta^p|m|^{\frac{p}{p-1}}\,dx+C\int_\Omega\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx \tag{35}$$

$$I_{14}\le\frac{\alpha}{4}\int_\Omega\eta^p|\nabla u|^p\,dx+C\int_\Omega\eta^p|\xi|^{\frac{p}{p-1}}\,dx+C\int_\Omega|u-\theta|^p|\nabla\eta|^p\,dx \tag{36}$$

$$I_{15}\le C\int_\Omega\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx+C\int_\Omega\eta^p|m|^{\frac{p}{p-1}}\,dx+C\int_\Omega|u-\theta|^p|\nabla\eta|^p\,dx \tag{37}$$

由(32)~(37)式得

$$\begin{aligned}\oint_\Omega\eta^p|\nabla u|^p\,dx&\le C\oint_\Omega\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx+C\oint_\Omega\eta^p|u-\theta|^p|\nabla\eta|^p\,dx\\&+C\oint_\Omega\eta^p\left[|\nabla\theta|^p+|\xi|^{\frac{p}{p-1}}+|m|^{\frac{p}{p-1}}\right]dx\end{aligned} \tag{38}$$

这里，常数C仅依赖于$n,N,p,\alpha,\beta,\gamma$。现在来估计(38)式中的第一与第二项。类似于(25)式可得

$$\oint_\Omega\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx=C\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}\eta^p|u|^{p\gamma}\,dx\le C\psi(r)\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla u|^p\,dx+C\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|u|^{\gamma t}\,dx\right)^{\frac{p}{t}} \tag{39}$$

这里，t满足$\max\left\{1,\frac{np}{n+p}\right\}\le t<p$是取定的，$\psi(r)$满足当$r\to0$时，有$\psi(r)\to0$。

把函数$u-\theta$零延拓到$R^N\setminus\Omega$上，注意到边界$\partial\Omega$是p- Poincaré 厚的，于是由 Minikowski 不等式以及 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned}\oint_\Omega\eta^p|u-\theta|^p|\nabla\eta|^p\,dx&\le Cr^{-n-p}\int_{Q_{2r}\cap\Omega}|u-\theta|^p\,dx\\&\le Cr^{-n-p}|Q_{2r}\cap\Omega|^{\frac{n+p}{n}}\left[\int_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla(u-\theta)|^{\frac{np}{n+p}}\,dx\right]^{\frac{n+p}{n}}\\&\le C\left[\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla(u-\theta)|^{\frac{np}{n+p}}\,dx\right]^{\frac{n+p}{n}}\\&\le C\left[\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla\theta|^{\frac{np}{n+p}}\,dx\right)^{\frac{n+p}{n}}+\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla u|^{\frac{np}{n+p}}\,dx\right)^{\frac{n+p}{n}}\right]\\&\le C\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla\theta|^p\,dx+C\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla u|^t\,dx\right)^{\frac{p}{t}}\end{aligned} \tag{40}$$

由(32)~(40)式得

$$\begin{aligned}\oint_{Q_r\cap\Omega}|\nabla u|^p\,dx&\le C\psi(r)\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla u|^p\,dx+C\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|u|^{\gamma t}\,dx\right)^{\frac{p}{t}}\\&+C\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}|\nabla u|^t\,dx\right)^{\frac{p}{t}}+C\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}\left[|\nabla\theta|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}\right]^p dx\end{aligned} \tag{41}$$

在上式两边同加上$\oint_{Q_r\cap\Omega}|u|^{p\gamma}\,dx$，并利用(39)式，得到

$$\oint_{Q_r\cap\Omega}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx \le C\left[\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}\left(|\nabla u|^t+|u|^{\gamma t}\right)dx\right]^{\frac{p}{t}}+C\psi(r)\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}\left(|\nabla u|^p+|u|^{p\gamma}\right)dx + C\oint_{Q_{2r}\cap\Omega}\left[|\nabla\varphi|+|\nabla\theta|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}\right]^p dx \tag{42}$$

在 $Q_{2r}\cap\Omega$ 上，令 $g=|\nabla u|^t+|u|^{t\gamma}, H=|\nabla\varphi|+|\nabla\theta|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}, G=H^t, k=\frac{p}{t}$，在 $Q_{2r}\setminus\Omega$ 上，令 $g=H=G=0$，(41)式变为

$$\oint_{Q_r\cap\Omega} g^k dx \le C\left(\oint_{Q_{2r}\cap\Omega} g dx\right)^k+\tau\oint_{Q_{2r}\cap\Omega} g^k dx + C\oint_{Q_{2r}\cap\Omega} G^k dx \tag{42}$$

这里，当 $r\to 0$ 时，有 $\tau=C\psi(r)\to 0$， $C=C(n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,diam(\Omega))<+\infty$ 。

由引理 3.1、(31)式、(42)式以及有限覆盖定理知，存在仅依赖于 $n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,\Omega$ 的常数 ε_0，且满足 $0<\varepsilon_0<s-p$，使得对 $\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$，有 $u\in W^{1,p+\varepsilon}(\Omega,R^N)$，且有

$$\left[\oint_\Omega\left(|\nabla u|+|u|^\gamma\right)^{p+\varepsilon}dx\right]^{\frac{1}{p+\varepsilon}} \le C\left[\oint_\Omega\left(|\nabla u|+|u|^\gamma\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+C\left(\oint_\Omega H^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \tag{6}$$

这里， $H=|\nabla\varphi|+|\nabla\theta|+|\xi|^{\frac{1}{p-1}}+|m|^{\frac{1}{p-1}}, C=C(n,N,p,s,\alpha,\beta,\gamma,\Omega)<\infty$ 。证明完毕。

参考文献 (References)

[1] A. Scott. Integrability, encyclopedia of nonlinear science. Taylor & Francis, 2005.
[2] 2G. Li, O. Martio. Local and global integrability of gradients in obstacle problems. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A: Mathematica, 1994, 19(1): 25-34.
[3] 3E. N. Barron, R. Jensen. Minimizing the L^∞ norm of the gradient with an energy constraint. Communications in Partial Differential Equations, 2005, 30(12): 1741-1772.
[4] J. W. Cahn, C. A. Handwerker and J. E. Taylor. Geometric models of crystal growth. Acta Metallurgica, 1992, 40(7): 1443-1474.
[5] J. Heinonen, T. Kilpelainen and O. Martio. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. New York: Clarendon Press, 1993.
[6] M. Kubo, N. Yamazaki. Periodic solutions of elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints. Journal of Evolution Equations, 2006, 6(1): 71-93.
[7] G. Li, O. Martio. Stability of solutions of varying degenerate elliptic equations. Indiana Mathematics Journal, 1998, 47(3): 873-891.
[8] M. Giaquinta, G. Modica. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1979, 311-312: 145-169.
[9] T. Iwaniec. The Gehring lemma. In: P. L. Duren, et al., Eds., Quasiconformal mappings and analysis: A collection of papers honoring Frederick W. Gehring on his 70th birthday. Ann Arbor: Proceedings of the International Symposium, August 1995, Berlin: Springer-Verlag, 1998: 181-204.
[10] G. Li, O. Martio. Stability and higher integrability of derivatives of solutions in double obstacle problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 272(1): 19-29.