Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 195-200
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33029 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Dually Flat Fourth Root Metric*

Bing Xu

Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo
Email: 13819822167@163.com

Received: Feb. 23rd, 2013; revised: Mar. 9th, 2013; accepted: Mar. 24th, 2013

Abstract: In this paper, we mainly study three kinds of Finsler metrics which have the square root, and get some differential equations when they are dually flat. Furthermore, we discuss the relationship between the three kinds of Finsler metrics.

Keywords: Finsler Metric; Dually Flat; Geodetic Coefficients

对偶平坦的四次根式度量*

徐　兵

宁波大学数学系，宁波
Email: 13819822167@163.com

收稿日期：2013 年 2 月 23 日；修回日期：2013 年 3 月 9 日；录用日期：2013 年 3 月 24 日

摘　要：本文主要研究三类带根号的芬斯勒度量，并得到了它们作为对偶平坦度量时所满足的微分方程，进一步探讨了三类度量之间的关系。

关键词：芬斯勒度量；对偶平坦；测地系数

1. 引言

对偶平坦的芬斯勒度量是一类具有特殊几何性质的度量，它产生于信息几何。S.-I. Amari 和 H. Nagaoka 在研究信息几何时第一次提出了对偶度量的概念[1]，2006 年沈忠民把这个概念推广到了芬斯勒几何[2]。不仅如此，对偶平坦在相对论和超弦理论中也有着重要应用。程新跃和沈忠民研究刻画了局部对偶平坦的(α,β)度量的性质，并提出流形 M 上的 Randers 度量是局部对偶平坦且具有迷向旗曲率的等价条件是其为局部闵可夫斯基度量，或者它是局部射影平坦且具有常旗曲率的芬斯勒度量[3]。近年来，m 次根式度量由于其具有应用背景，受到一定关注[4,5]。

2011 年 A. Tayebi 和 B. Najafi 研究了形如 $F=\left\{a_{i_1\cdots i_m}(x)y^{i_1}\cdots y^{i_m}\right\}^{1/m}$ 的 m 次根式对偶平坦的芬斯勒度量，并且通过计算得到了 m 次根式芬斯勒度量满足局部对偶平坦的条件[6]。

在芬斯勒几何中，四次根式的芬斯勒度量是一类重要的度量，其中以下三种具有代表性的四次根式度量值得我们探讨：

$$F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C\text{，}\tag{1}$$

*基金支持项目：NNSFC(10801080)。

$$\bar{F}=\sqrt{\sqrt{A}+B}\,,\tag{2}$$

$$\tilde{F}=\sqrt[4]{A}\,,\tag{3}$$

其中 $A=a_{ijkl}(x)y^iy^jy^ky^l$， $B=b_{ij}(x)y^iy^j$， $C=c_i(x)y^i$。李本伶和沈忠民研究了度量(2)和(3)在射影平坦时所具有的性质[7]。本文主要研究局部对偶平坦的芬斯勒度量，得到以下结论。

为简便起见，令

$$A_{x^k}y^k=A_0,\quad B_{x^k}y^k=B_0,\quad C_{x^k}y^k=C_0,\quad A_{x^ky^l}y^k=A_{l0},\quad B_{x^ky^l}y^k=B_{l0},\quad C_{x^ky^l}y^k=C_{l0}\text{。}$$

定理 1.1 A 不可约， $B\neq 0$，芬斯勒度量 $F=\sqrt{A^{1/2}+B}+C$ 是局部对偶平坦的，

方程

$$A_{l0}=\frac{1}{2}\theta A_{y^l}+2A_{x^l}\text{，和 }B_{l0}=2\left(B_{x^l}+2C\left(C_{x^l}-C_{l0}\right)-C_{y^l}C_0\right),$$

以及

$$\begin{aligned}&\left[4\left(B_{y^l}C_0+B_0C_{y^l}\right)-2\theta BC_{y^l}-8\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C^2-\left(\theta B_{y^l}+8C_{y^l}C_0\right)C\right]A\\&+16\left(2C_{x^l}-C_{l0}\right)B^3+8\left[2\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C^2+\left(2CC_{y^l}-B_{y^l}\right)C_0-C_{y^l}B_0\right]B^2\\&+\left[\left(4B_0B_{y^l}+\theta A_{y^l}\right)C-2A_{y^l}C_0\right]B-A_{y^l}B_0C=0\end{aligned}$$

成立，其中

$$A_{x^l}=\frac{\partial A}{\partial x^l},\quad A_{y^l}=\frac{\partial A}{\partial y^l},\quad B_{x^l}=\frac{\partial B}{\partial x^l},\quad B_{y^l}=\frac{\partial B}{\partial y^l},\quad C_{x^l}=\frac{\partial B}{\partial x^l},\quad C_{y^l}=\frac{\partial C}{\partial y^l},\quad \theta=\theta_k(x)y^k\text{。}$$

注：上述定理的证明对以后在对偶平坦的条件下，进一步探讨形如 $\bar{F}=\sqrt{\sqrt{A}+B}$ 的芬斯勒度量的几何性质(特别是测地线的计算和旗曲率的表达式)有重要意义。

推论 1.1 若芬斯勒度量 $F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C$ 局部对偶平坦，则 $\tilde{F}=\sqrt[4]{A}$ 局部对偶平坦。

推论 1.2 当 A 不可约， $C=0$ 时，芬斯勒度量

$$F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C=\sqrt{\sqrt{A}+B}=\bar{F},$$

则此时 $\bar{F}$ 的测地系数为：

$$G^i=\frac{A_{x^l}+\sqrt{A}B_{x^l}}{8\sqrt{A}}g^{il},$$

其中 $\left(g^{il}\right)$ 为 $\left(g_{il}\right)$ 的逆矩阵，

$$g_{il}=\frac{2AA_{y^iy^l}-A_{y^i}A_{y^l}+4A^{3/2}B_{y^iy^l}}{8A^{3/2}}\text{。}$$

特别地，当 $B=C=0$ 时，芬斯勒度量

$$F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C=\sqrt[4]{A}=\tilde{F},$$

则此时 $\tilde{F}$ 的测地系数为

$$G^i=\frac{\left(6AA^{il}+y^iy^l\right)A_{x^l}}{12A}\text{。}$$

2. 预备知识

定义 2.1 设 M 是一 n 维流形，若切丛 TM 上的函数 $F(x,y)$ 满足以下条件：

1) $F(x,y)$ 在 $TM\setminus\{0\}$ 上是光滑的；

2) $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$；

3) 对于任意的 $(x,y)\in TM\setminus\{0\}$，$g_{ij}=g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\left(F^2\right)_{y^iy^j}(x,y)$ 是正定的。

则 F 为芬斯勒度量。

对于芬斯勒度量 $F(x,y)$，设点 x 为流形 M 上任意一点，如果在切丛 TM 上总存在一个局部坐标系 $\left(x^i,y^i\right)$，在这个坐标系上使得 $F=F(x)$，则 F 为黎曼度量：若 $F=F(y)$，则 F 为闵可夫斯基度量。

定义 2.2 设 $c(t)$ 为 M 上的一条曲线，若它满足方程组：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}(t)+2G^i\left(c(t)\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right)=0,$$

其中

$$G^i=\frac{g^{il}}{4}\left\{[F]^2_{x^ky^l}\,y^k-[F]^2_{x^l}\right\}, \tag{4}$$

则 $c(t)$ 为 M 上的一条测地线。这里 G^i 为 F 的测地系数。

定义 2.3 设 $F=F(x,y)$ 为流形 M 上的芬斯勒度量，如果每一点都存在一个坐标系使得

$$G^i=-\frac{1}{2}g^{ij}H_{y^j},$$

其中 $H=H(x,y)=\left[F^2\right]_{x^m}y^m/6$，则度量 F 称为局部对偶平坦的芬斯勒度量[3]。

2008 年沈忠民在[8]中给出了有关对偶平坦的如下引理：

引理 2.1 F 是开区域 $U\subset R^n$ 上的芬斯勒度量，F 是对偶平坦的当且仅当满足方程

$$\left[F^2\right]_{x^ky^l}y^k-2\left[F^2\right]_{x^l}=0。 \tag{5}$$

3. 定理 1.1 的证明

由引理 2.1，若度量(1)是一局部对偶平坦的芬斯勒度量，其中 $A=a_{ijkl}(x)y^iy^jy^ky^l$，$B=b_{ij}(x)y^iy^j$，$C=c_i(x)y^i$，将 $F=\sqrt{A^{1/2}+B}+C$ 代入方程(5)，即

$$\left[\left(\sqrt{A^{1/2}+B}+C\right)^2\right]_{x^ky^l}y^k-2\left[\left(\sqrt{A^{1/2}+B}+C\right)^2\right]_{x^l}=0$$

成立。通过直接计算可知上面方程等价于

$$\begin{aligned}&\Big\{\sqrt{A}\sqrt{\sqrt{A}+B}\left(2\sqrt{A}B_{y^l}+4\sqrt{A}\sqrt{\sqrt{A}+B}C_{y^l}+A_{y^l}\right)\left(4\sqrt{A}\sqrt{\sqrt{A}+B}C_0+2\sqrt{A}B_0+A_0\right)\\&+\left(\sqrt{\sqrt{A}+B}+C\right)\left[2\left(\sqrt{A}+B\right)\left(4A^{3/2}B_{l0}+2AA_{l0}-A_0A_{y^l}\right)-\sqrt{A}\left(2\sqrt{A}B_0+A_0\right)\left(2\sqrt{A}B_{y^l}+A_{y^l}\right)+C_{l0}\right]。\\&-8A\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{\sqrt{A}+B}+C\right)\left[4\sqrt{A}\sqrt{\sqrt{A}+B}C_{x^l}+2\sqrt{A}B_{x^l}+A_{x^l}\right]\Big\}\frac{1}{16A^{3/2}\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}}=0\end{aligned} \tag{6}$$

成立。

易见 $\sqrt{A}\neq0$ 且 $\sqrt{A+B}\neq0$，将(6)式两边同时乘以 $16A^{3/2}\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}$，简化得

$$\begin{aligned}&8A\left(2\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C-2B_{x^l}+2C_{y^l}C_0+B_{l0}\right)\sqrt{A}\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}\\&+2\left(2\left(A_{l0}-2A_{x^l}\right)A-A_0A_{y^l}\right)\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}\\&+\left(16\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)A^2+4\left[4\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)B^2+2\left(\left(B_{l0}-B_{x^l}\right)C+B_{y^l}C_0+C_{y^l}B_0\right)B\right.\right.\\&\left.\left.+\left(A_{l0}-B_0B_{y^l}-2A_{x^l}\right)C+C_{y^l}A_0+A_{y^l}C_0\right]A-3CA_0A_{y^l}\right)\sqrt{A}\\&+8\left(4\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)B+\left(B_{l0}-2B_{x^l}\right)C+B_{y^l}C_0+C_{y^l}B_0\right)A^2\\&+\left(4\left[\left(A_{l0}-2A_{x^l}\right)C+C_{y^l}A_0+A_{y^l}C_0\right]B-2\left(A_{y^l}B_0+A_0B_{y^l}\right)C\right)A\\&-2A_0A_{y^l}BC=0\end{aligned},\tag{7}$$

由于 A 不可约，且 $B\neq 0$，所以 $\sqrt{A}\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2},\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}$ 和 $\sqrt{A}$ 均为无理式，从而由代数知识可知 $\sqrt{A}\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}$，$\left(\sqrt{A}+B\right)^{3/2}$ 和 $\sqrt{A}$ 的系数为零，则方程(7)等价于

$$2A\left(A_{l0}-2A_{x^l}\right)-A_0A_{y^l}=0,\tag{8}$$

$$2\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C+2C_{y^l}C_0+B_{l0}-2B_{x^l}=0,\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&16\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)A^2+4\left[4\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)B^2+2\left(\left(B_{l0}-B_{x^l}\right)C+B_{y^l}C_0+C_{y^l}B_0\right)B\right.\\&\left.+\left(A_{l0}-B_0B_{y^l}-2A_{x^l}\right)C+C_{y^l}A_0+A_{y^l}C_0\right]A-3A_0A_{y^l}C=0\end{aligned},\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&8\left(4\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)B+\left(B_{l0}-2B_{x^l}\right)C+B_{y^l}C_0+C_{y^l}B_0\right)A^2\\&+\left\{4\left[\left(A_{l0}-2A_{x^l}\right)C+C_{y^l}A_0+A_{y^l}C_0\right]B-2\left(A_{y^l}B_0+A_0B_{y^l}\right)C\right\}A-2A_0A_{y^l}BC=0\end{aligned}。\tag{11}$$

成立。

另外，由(8)式可得

$$2A\left(A_{l0}-2A_{x^l}\right)=A_0A_{y^l},$$

从而，$A_0A_{y^l}$ 被 A 整除。若 A 不可约，则存在 θ 使得

$$A_0=\theta A,\tag{12}$$

其中 $\theta=\theta_k(x)y^k$。将(12)式代入(8)得

$$A_{l0}=\frac{1}{2}\theta A_{y^l}+2A_{x^l}。\tag{13}$$

由(9)式得

$$B_{l0}=2\left(B_{x^l}+2C\left(C_{x^l}-C_{l0}\right)-C_{y^l}C_0\right)。\tag{14}$$

将(12)~(14)式代入(10)式整理得

$$\begin{aligned}&4\left(4C_{l0}-8C_{x^l}+\theta C_{y^l}\right)A-16\left(2C_{x^l}-C_{l0}\right)B^2\\&+8\left[2\left(2C_{x^l}-C_{l0}\right)C^2-2CC_{y^l}C_0+B_{y^l}C_0+B_0C_{y^l}\right]B\\&-\left(\theta A_{y^l}+4B_0B_{y^l}\right)C+4A_{y^l}C_0=0。\end{aligned}\tag{15}$$

同样将(12)~(14)式代入(11)式整理得

$$\left[2\left(8C_{l0}-16C_{x^l}+\theta C_{y^l}\right)B+8\left(2C_{x^l}-C_{l0}\right)C^2-\left(\theta B_{y^l}+8C_{y^l}C_0\right)C+4\left(B_0C_{y^l}+B_{y^l}C_0\right)\right]A \\ -A_{y^l}\left(B_0C-2BC_0\right)=0 \tag{16}$$

$(16)-(15)\times B$ 整理得

$$\left[4\left(B_{y^l}C_0+B_0C_{y^l}\right)-2\theta BC_{y^l}-8\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C^2-\left(\theta B_{y^l}+8C_{y^l}C_0\right)C\right]A \\ +16\left(2C_{x^l}-C_{l0}\right)B^3+8\left[2\left(C_{l0}-2C_{x^l}\right)C^2+\left(2CC_{y^l}-B_{y^l}\right)C_0-C_{y^l}B_0\right]B^2 \\ +\left[\left(4B_0B_{y^l}+\theta A_{y^l}\right)C-2A_{y^l}C_0\right]B-A_{y^l}B_0C=0$$

证毕。

通过计算可知芬斯勒度量 $\tilde{F}=\sqrt[4]{A}$ 对偶平坦的等价条件为(8)式成立，从而推论 1.1 成立。

4. 推论 1.2 的证明

当 $C=0$ 时，$F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C=\sqrt{\sqrt{A}+B}=\bar{F}$。若其为对偶平坦的芬斯勒度量，则由定理 1.1 可知

$$B_{l0}=2B_{x^l}\text{。} \tag{17}$$

直接计算可得芬斯勒度量(2)所对应的矩阵 $\left(g_{il}\right)$ 形式为

$$g_{il}=\frac{2AA_{y^iy^l}-A_{y^i}A_{y^l}+4A^{3/2}B_{y^iy^l}}{8A^{3/2}}\text{。} \tag{18}$$

将(13)和(17)代入(4)式得芬斯勒度量 $\bar{F}=\sqrt{\sqrt{A}+B}$ 的测地系数为

$$G^i=\frac{A_{x^l}+\sqrt{A}B_{x^l}}{8\sqrt{A}}g^{il},$$

其中 $\left(g^{il}\right)$ 为 $\left(g_{il}\right)$ 的逆矩阵。

当 $B=C=0$ 时，$F=\sqrt{\sqrt{A}+B}+C=\sqrt[4]{A}=\tilde{F}$，若其为对偶平坦的芬斯勒度量，直接计算可知芬斯勒度量(3)的度量矩阵 $\left(g_{ij}\right)$ 形式为

$$g_{ij}=\frac{2AA_{y^iy^j}-A_{y^i}A_{y^j}}{8A^{3/2}},$$

从而 $\left(g_{il}\right)$ 的逆矩阵 $\left(g^{il}\right)$ 具有如下形式

$$g^{il}=\frac{12AA^{il}+2y^iy^l}{3\sqrt{A}} \tag{19}$$

其中 $\left(A^{il}\right)$ 为 $\left(A_{y^iy^l}\right)$ 的逆矩阵。将(13)式和(19)式代入(4)式可得芬斯勒度量(3)的测地系数为

$$G^i=\frac{\left(6AA^{il}+y^iy^l\right)A_{x^l}}{12A}\text{。}$$

证毕。

5. 致谢

首先感谢我的导师，本论文是在我的导师李本伶老师的指导下完成的，从选题到完成李老师都始终给予我

细心的指导和不懈的支持。

其次感谢审稿专家提出的意见和建议。

再次感谢文献提供者：程新跃，李本伶，沈忠民，周宇生，A. Tayebi，B. Najafi，D.G. Pavlow (ed.)，L. Astola，L. Florack，H. Nagaoka 和 S.-I. Amari。

最后感谢本论文基金支持项目 NNSFC(10801080)。

参考文献 (References)

[1] S.-I. Amari, H. Nagaoka. Method of Information Geometry. AMS Translation of Math, Oxford University Press, 2000, Monographs, 191.
[2] Z. Shen. Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry. Chin. Ann. Math, 2006, 27B(1): 73-94.
[3] Z. Shen, X. Y. Cheng and Y. S. Zhou. On a class of locally dually flat Finsler metrics. Journal of Hokkaido University of Education (Section II A), 1995, 46(1): 1-10.
[4] L. Astola, L. Florack. Finsler geometry on higher order tensor fields and applications to high angular resolution diffusion imaging, scale space and variational methods in computer vision. Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5567: 224-234.
[5] D. G. Pavlow. Space-time structure, collected papers. TETRU, 2006: 352 p.
[6] A. Tayebi, B. Najafi. On m-th root Finsler metrics. Journal of Geometry and Physics, 2011, 61(8): 1479-1484.
[7] B. Li, Z. Shen. Protectively flat fourth root Finsler metrics. Canadian Mathematical Bulletin, 2012, 55(1): 138-145.
[8] Z. Shen. On protectively flat (α,β) -metrics. Canadian Mathematical Bulletin, 2009, 52(1): 132-144.

