Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 181-187
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33027 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

An Overview of Recent Developments and Applications of the GMRES Method

Xiaofei Ma

School of Applied Sciences, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan
Email: xiaofeimajy2009@163.com

Received: Feb. 21st, 2013; revised: Mar. 5th, 2013; accepted: Mar. 17th, 2013

Abstract: The generalized minimum residual method (GMRES) is widely applied in the scientific and engineering computations due to its general merit of fast convergence. This paper presents a summary introduction of the GMRES method for its historical development and practical applications, with an emphasis on its recent status. We start with a summary on the origin of the method, followed by some notable variants, together with some recent developments. Then, we introduce some recent applications of the GMRES method in various research fields, pointing out its connection to and impact on these fields. Finally, we provide an outlook on the further development and applications of the GMRES method.

Keywords: GMRES; Historical Development; Practical Application

广义最小残量法研究与应用近况综述

马晓飞

太原科技大学应用科学学院，太原
Email: xiaofeimajy2009@163.com

收稿日期：2013 年 2 月 21 日；修回日期：2013 年 3 月 5 日；录用日期：2013 年 3 月 17 日

摘　要：用于求解大型非对称线性方程组的广义最小残量法(GMRES)以其迭代速度快的优点广泛应用于科学工程计算。本文就 GMRES 算法的研究近况，分别对其历史发展和实际应用进行概括性的介绍。先从纵向概括了该算法的起源，并介绍了该算法发展过程中有突出影响的变形算法以及近期发展情况，再从横向阐述了近年内它在各领域的应用、与各领域之间的联系和对各领域产生的影响。最后对 GMRES 算法的进一步发展及应用作出展望。

关键词：GMRES；历史发展；实际应用

1. 引言

Paige 和 Saunders 于 1975 年提出了求解不定对称线性方程组的 MINRES 算法，其思想是利用共轭梯度法与 Lanczos 方法的联系[1]。受到该算法的启发，并注意到 Arnoldi 的工作，Saad 和 Schultz 于 1986 年提出了求解非对称线性方程组的广义最小残量法(generalized minimal residual algorithm)，简称 GMRES 算法[2]。GMRES 算法在数学上等价于 ORTHODIR 算法和广义共轭余量算法(GCR)。ORTHODIR 算法是 Young 和 Jea 在 1980 年共同提出的，随后，Eisenstat 等在 1983 年提出了 GCR 算法[3,4]。这两种算法在当时得到了一定发展。然而，当系数矩阵为非正实数矩阵时，GCR 算法就有可能失效，ORTHODIR 算法的数值稳定性也可能降低，而 GMRES 算法只占用这些方法存储空间的一半，也比它们更简单。因此，GMRES 算法的产生就显得尤为引人注目。GMRES

算法的标准实现包含 Arnoldi 正交化和 QR 分解两个主要过程：Arnoldi 正交化生成 Krylov 子空间的标准正交基，QR 分解用来求解上 Hessenberg 矩阵的最小平方问题来实现对余量的最小化。为了节约内存空间、减少计算量，Saad 和 Schultz 提出了循环 GMRES 算法，即 GMRES(m)，其中 m 为小于矩阵阶数的重启参数。近年来经过许多作者的努力，广义最小残量法得到了很大的完善，已经成为求解大型非对称线性方程组的一种主要迭代方法。目前，广义最小残量法本身也已成为一个比较独立的研究领域，同时这一算法也被人们广泛应用于科学工程计算等诸多领域。

2. GMRES 算法原理介绍

考虑线性方程组

$$\boldsymbol{A}x = b\text{，} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$ 为一非奇异矩阵，$b \in R^n$ 为一列向量。设 x_0 是初始迭代向量，$r_0 = b - \boldsymbol{A}x_0$ 是初始余量，则由 $\boldsymbol{A}$ 和 r_0 产生的 Krylov 子空间为

$$K_k = K_k\left(\boldsymbol{A}, r_0\right) = span\left\{r_0, \boldsymbol{A}r_0, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}r_0\right\}\text{。}$$

取初始向量 $v_1 = r_0/\|r_0\|$，由 Arnoldi 过程进行 k 步迭代可得 K_k 的标准正交基 $V_k = \left[v_1, v_2, \cdots, v_k\right]$。由正交化过程易知：

$$AV_k = V_k H_k + v_{k+1} h_{k+1,k} e_k^{\mathrm{T}}\text{，} \tag{2.2}$$

其中，

$$H_k = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,k-1} & h_{1,k} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,k-1} & h_{2,k} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3,k-1} & h_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{k,k-1} & h_{k,k} \end{pmatrix} \in R^{k\times k}$$

是上 Hessenberg 矩阵，$e_k^{\mathrm{T}} = \left[0, 0, \cdots, 1\right] \in R^k$，则(2.2)式等价于

$$AV_k = V_{k+1}\bar{H}_k\text{，}$$

其中 $\bar{H}_k = \begin{bmatrix} H_k \\ h_{k+1,k}e_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$。又及，GMRES 算法规定迭代解的形式为 $x_k = x_0 + z_k$，其中 $z_k \in K_k$ 满足最小二乘条件：

$$\|r_k\| = \|b - Ax_k\| = \|r_0 - Az_k\| = \min_{z\in K_k}\|r_0 - Az\|\text{，} \tag{2.3}$$

而且(2.3)式等价于 $r_k \perp AK_k$。令 $z = V_k y$，其中 $y \in R^k$，则(2.3)式右端可表示为

$$J\left(y\right) = \left\|\|r_0\|v_1 - AV_k y\right\| = \left\|V_{k+1}\left(\|r_0\|e_1 - \bar{H}_k y\right)\right\| = \left\|\|r_0\|e_1 - \bar{H}_k y\right\|\text{。} \tag{2.4}$$

若记 $\|r_0\| = \beta$，则(2.4)式变形为

$$J\left(y\right) = \left\|\beta e_1 - \bar{H}_k y\right\|\text{，} \tag{2.5}$$

利用 QR 分解求解(2.5)式的极小值即可得 y_k。从而获得迭代解：

$$x_k = x_0 + V_k y_k\text{。}$$

需要说明的是，在实际计算时，迭代循环往往采用渐进的方式执行 Arnoldi 迭代和 QR 分解；这样做的巧妙之处是可以不必明显计算 x_k 而能获得余量范数的值：$|g_k|$；参见文献[2]。图 1 给出了 GMRES 算法的流程图。

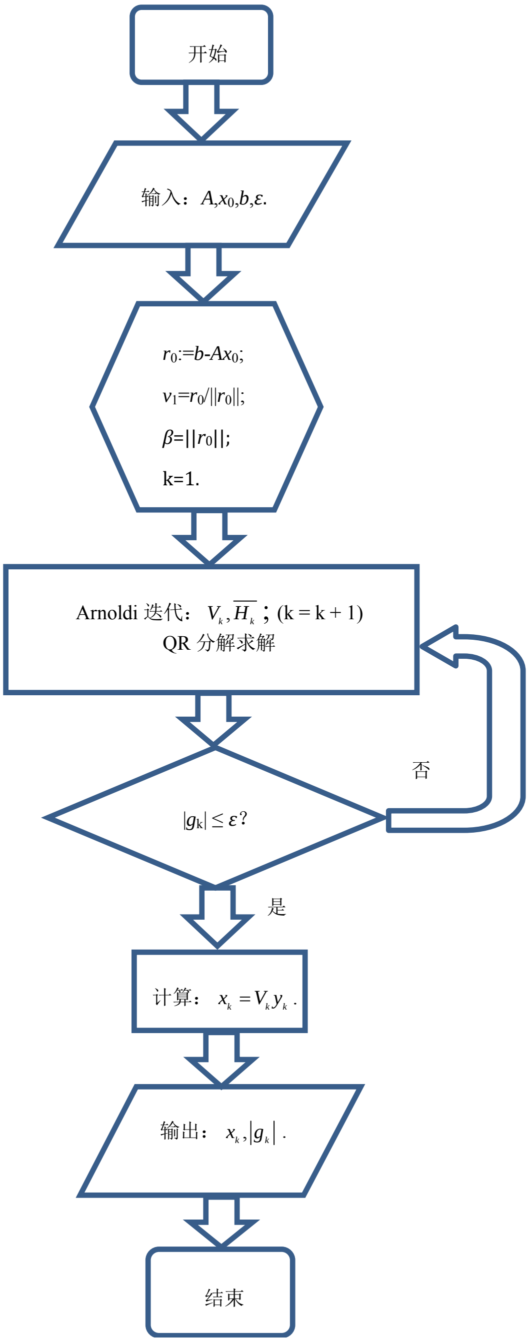

Figure 1. Flow chart of GMRES
图 1. GMRES 算法流程图

3. GMRES 算法的发展及研究近况

1994 年，Walker 对 GMRES 算法做出一些改变，提出了 Simpler GMRES 算法，简称 SGMRES 算法[5]。SGMRES 算法的优点在于正交化后不需要利用 QR 分解来求解最小平方问题，这样就大大减少了计算量，使计算效率得到提高；其缺点在于利用 SGMRES 算法在某些计算过程中有可能出现停滞现象，收敛性随之降低。与此同时，Vorst 和 Vuik 也对 GMRES 算法进行了改变，提出了 GMRESR 算法，这种算法在 CPU 运行时间和内存占用空间方面都有相当大的优势[6]。1998 年，Essai 提出 Weighted GMRES 算法，简称 WGMRES 算法[7]。WGMRES

算法具有良好的收敛性，但却增加了计算量。也有学者对 SGMRES 算法和 WGMRES 算法进行了总结，提出了 Weighted Simpler GMRES 算法，简称 WSGMRES 算法[8]。带特征向量增强的 GMRES 算法是解决非对称线性方程组的一种有效方法，尤其当方程组有几个小的特征值时，但是在实际中很难选择适当的特征值数目，这样就会使收敛减慢，精度也随之降低。2001 年，Zhou 和 Zhao 提出了一种改进的利用特征向量的 GMRES 算法[9]。该算法通过有序地增加特征向量，也可能联合某些准则，来适应性地决定特征向量的合适数目，结果使得计算精度更高，迭代次数更小，CPU 运行时间更少。2003 年，Ayachour 对标准 GMRES 算法作了修改，提出了 GMRES 算法的一个快速实现[10]。它不需要进行 Givens 旋转变换，大大提高了计算工作量，节约了内存空间。在此基础上，2008 年，伊朗学者 Najafi 和 Zareamoghaddam 也提出了一种新型计算的 GMRES 算法[11]。在这个算法里，先定义一个新的数量积运算，再用加权 Arnoldi 正交化代替原来的 Arnoldi 过程，最后利用 Ayachourt 的方法来处理最小平方问题。实验结果表明，这种算法的收敛速度更快，计算精度更高。

对 GMRES 算法而言，当矩阵规模较大时，每一次迭代所需的内存空间和计算量都会增大。典型地，“重启”可以克服这一困难。即先执行 m 次 GMRES 迭代，把由此产生的近似解作为初始值以开始下一个 m 次迭代，这个过程循环往复，直到余量范数足够小为止。这个过程即为重启 GMRES 或循环 GMRES，亦即 GMRES(m)。连续重启一组 m 次迭代的过程看作一个循环，m 就称为重启参数。一般情况下，假设 m 的取值越大，收敛所需要的迭代次数就越少，因为一个大的 m 值会改善 GMRES 余量多项式，余量范数随之减小。因此，在某种程度上，一个足够大的 m 能够减少 GMRES(m)加速收敛的障碍。但是，当 m 过大时，GMRES(m)就不能达到减少计算量和节约内存空间的目的。此外，在一些问题中，一个较小的 m 值反而比较大的 m 值更好[12,13]。这个意想不到的结果更凸显出选择一个合适 m 的实际难度。基于如何选取合适的 GMRES(m)重启参数，Baker 等于 2009 年通过大量的实验和理论分析，提出了解决这一问题的一个简单策略[14]。该策略分别指定最小的和最大的重启参数 $m_{\min}$ 和 $m_{\max}$，使得每一循环的重启参数 m_i 介于二者之间，即 $m_{\min} \le m_i \le m_{\max}$，$m_i$ 代表第 i 次循环的重启参数。这一策略的主要贡献在于简化了修改重启参数的方法，对一类问题的实验结果也显示出其有效性。

现在，GMRES 算法及其相关算法的研究越来越多，人们对它的数学要求也越来越高，特别是在循环 GMRES 算法的收敛行为方面作了更多的探索。2008 年，Vecharynski 和 Langou 证明了在正规矩阵上应用循环 GMRES 算法，其循环－收敛性是亚线性的[15]。这意味着当前 GMRES(m)循环所得余量范数的减少幅度没有前一次循环余量范数的减少幅度大。2009 年，Vecharynski 和 Langou 二人再次证明，对于循环 GMRES 算法来说，存在任意递减的循环收敛曲线[16]。他们给定一个 n 阶矩阵，一个重启参数 $m\left(m<n\right)$，一个递减的正序列 $f\left(0\right)>f\left(1\right)>\cdots>f\left(q\right)\ge 0$，其中 $q<n/m$，通过理论证明和实验，表明存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和一个向量 r_0，使得 $\left\|r_k\right\|=f\left(k\right),k=1,\cdots,q$，其中 r_k 为重启参数为 m 的 GMRES(m)某一循环 k 次迭代后的余量，该过程应用于线性方程组 $\boldsymbol{A}x=b$，初始余量 $r_0=b-\boldsymbol{A}x_0$。此外，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可以是任意的，作者同样构造了停滞的任意情形，即，对任意 $i<q$，当 $f\left(0\right)>f\left(1\right)>\cdots>f\left(i\right)=f\left(i+1\right)\ge 0$ 时，证明重启参数是可以固定的或者是可变的。这也表明特征值不能单独决定 GMRES(m)的收敛行为。

2011 年，在正则张量近似理论的研究中，为了加速交替最小二乘优化方法的收敛性，Sterck 提出了非线性 GMRES 优化的最速下降法[17]。该方法通过先前线性重组所得，利用非线性的 GMRES 步骤进行迭代，近似地最小化余量。R-线性 GMRES 算法是解决形如 $\kappa z+M_{\#}\bar{z},\kappa\in C,M_{\#}\in C^{n\times n},b\in C^{n}$ 的一种大型实线性方程组的固有理论，它的性质还不是很清楚。假设 $M_{\#}$ 可共轭对角化，为了评估其收敛性，在平面内的一个多项式逼近问题就应当加以考虑。因此，Huhtanen 和 Peramaki 于 2012 年提出了 R-线性正交多项式的 GMRES 算法[18]。著名的 Howard Elman 结果是利用给定矩阵及其逆矩阵的值域，给出最坏情形下 GMRES 余量范数的一个界。2012 年，Liesen 和 Tichy 在遇到一个 Otto Strnad 问题时，证明了这些界同样适用于理想 GMRES 近似[19]。由此可见，有关 GMRES 算法的探索正在不断深入，并且已成为独立的研究领域。表 1 从难易程度、简繁程度、收敛性、稳定性等方面，就 GMRES 算法发展过程中各个算法的优缺点进行概括。

Table 1. The advantage and disadvantage comparison of GMRES and modified GMRES
表 1. GMRES 及其改进算法优缺点对比

特点 算法	优点	缺点
GMRES[2]	收敛速度快，稳定性好。	计算量大，算法实现较为繁琐。
SGMRES[5]	算法比较简单，计算量小，计算效率高。	计算过程会出现停滞，收敛性一般，稳定性较差。
GMRESR[6]	算法实现容易，CPU 运行时间较小，占用较少的存储空间。	重启参数的选择有局限性。
WGMRES[7]	算法实现比较简单，收敛性较好。	计算量较大，实验过程复杂。
特征向量 GMRES[9]	计算精度较高，迭代次数较小，CPU 运行时间较少。	每一次迭代需要占用较大的存储空间。
快速 GMRES[10]	算法过程简单，计算工作量小，占用内存存较少。	必须限制某些条件才能得到理想的结果。
新型 GMRES[11]	收敛速度更快，计算精度更高。	计算量较大。
可变参的循环 GMRES[14]	计算效率更高，收敛性较好。	预设参数较多，容易混淆。

4. GMRES 算法的应用简况

GMRES 算法及理论提出后，经过人们不断的实践，对算法修改、变形，使其逐渐成熟起来，并迅速发展成为一门技术，在国内外得到了广泛的应用。近几年内的发展尤为迅速，在数学界已具有完善的理论应用，同时在工程界也得到了广泛的实践。

在 GMRES 算法的基础上，Campagna 等为了解决由实型 Laplace 变换所得到的线性方程组而提出了一种新的数值计算方法，这种方法可以动态叙述 GMRES 迭代算法在计算方法方面所能达到的最大精度[20]。通过这种方式，最小特征值给出了线性系统的条件数，因此在计算解决方案中就可得到最大精度。该算法是为了不需要借助任何外在条件，使得问题仍然可以解决而设计的。与此同时，有关 GMRES 算法加速收敛的问题也不断被深化。例如，在解决微分代数方程的初始值问题时，基于光谱递延校正技术作为一个化简 Picard 积分公式的预处理条件，由此产生的预处理非线性系统问题就可以利用 Newton-Krylov 理论得到解决，如 Newton-GMRES 算法[21]。预处理的 Newton-GMRES 算法被广泛应用于大型稀疏非线性方程组的有效求解。人们通过不断的尝试，用一种自适应参数修改预处理条件，使得 Newton 迭代法每一步的最佳参数能够计算，并且通过数值实验证明该处理能使得 Newton-GMRES 算法更有效[22]。不严格的 Newton 回溯法(INB)也是求解大型稀疏非线性方程组的一个有力工具，特别当 GMRES 算法用于 Newton 方程组的求解时，Newton-GMRES 回溯法就可以得到。在此基础上，又有学者提出了全局收敛的 Newton-GMRES 算法，称为准共轭梯度 Newton-GMRES 回溯法，这种方法对于大型稀疏非线性方程组的求解也更强大。GMRES 算法也被用于解决近海水域中的控制方程问题，还有利用 Newton-GMRES 算法求解光学中的辐射传输方程和计算流体动力学中的 Euler 方程等[23-26]。

GMRES 算法还可用于求解诸如最优控制、滤波估计、去耦、降阶等控制理论中的微分 Riccati 方程[27]。在大特征值问题和边值问题中会出现多元线性系统，线性控制、滤波理论、图像修复等方面包含了著名的 Lyapunov 矩阵方程、Sylvester 矩阵方程和 Stein 矩阵方程，这些方程同样是典型的多元线性系统问题，全局 GMRES 算法正好为这些问题的解决提供了一个很好的工具，不同的数值实验更显示出该方法收敛行为方面的优势[28,29]。GMRES 算法还用于求解 Toeplitz 方程、Helmholtz 方程和 Navier-Stokes 方程等，预处理 GMRES 并行算法也得到了很好的应用[30-33]。在太阳物理的研究中，我国科学家颜毅华于 1995 年首次推导出太阳常 alpha 无力场的边界积分表示，并用边界元方法实现了数值求解[34]；Li 等人 2007 年对颜毅华的算法进行了改进，他们引入 GMRES 算法来解决边界元方程组；由此，对 10,000 阶以上的矩阵，用 GMRES 算法使得计算效率提高了 1000~9000 倍[35]。

2011 年，柳有权等人提出来大规模稀疏线性方程组的 GMRES-GPU 快速求解算法[36]。该算法基于循环 GMRES 算法收敛速度快、稳定性好等优势，利用 CUDA 在 GPU 上实现并行算法，主要针对于稀疏矩阵矢量乘法运算。该算法在 GMRES 算法 CUDA 优化实现过程中，先后通过稀疏矩阵与矢量乘积运算、矢量内积与范数运算、稠密矩阵与矢量乘积运算、矢量加减和矢量乘标量、最小二乘求解等过程，实现了整体优化的效果。实验结果表明，对于大规模集成数据，在 GPU 上的运行结果比 Intel Core 2 Quad CPU Q9400@2.66 GHz 快了平均 40 余倍，而比 Intel Core i7 CPU 920@2.67 GHz 也快了 20 余倍。这一求解算法可以在流体仿真和变形计算的计算机动画应用中来研究，它将会在工程应用中发挥巨大的作用。表 2 给出了 GMRES 算法在工程界的具体应用情况。

Table 2. The engineering application of GMRES
表 2. GMRES 算法的工程应用

应用背景	数学问题
傅里叶级数法的正规化[20]	实型 Laplace 变换的线性方程组
光谱延迟修正技术[21]	微分代数方程的初始值问题
控制、光辐射和流体力学[23-26]	近海水域控制方程、光学辐射传输方程、计算流体力学 Euler 方程
控制理论[27]	微分 Riccati 方程
大型奇异值问题[28]	广义希尔维斯特矩阵方程
太阳物理研究[35]	太阳线性无力场边界积分方程

5. 总结和展望

GMRES 算法的不断完善，已发展成为一个专门的研究领域，成为线性代数与计算方面处理方程组问题的一种普遍方法，是解决工程实际相关问题的一个有力的工具。在实际的应用中我们发现，GMRES 算法及其相关算法在某些问题的解决上还存在一定的局限性，如收敛速度缓慢、运算量过大、存储空间过高等，这些都是我们需要进一步研究的问题。针对不同的工程领域，GMRES 算法的相关探索仍显得尤为重要。另外，GMRES 算法理论还需要系统化，也需要很好的传播，这都将为这一算法的发展带来新的机遇。

6. 致谢

感谢李毅伟副教授和李俊林教授的指导和帮助。

参考文献 (References)

[1] C. C. Paige, M. A. Saunders. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975, 12(4): 617-629.
[2] Y. Saad, M. H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1986, 7(3): 856-869.
[3] D. M. Young, K. C. Jea. Generalized conjugate-gradient acceleration ofnonsymmetrizable iterative methods. Linear Algebra and Its Applications, 1980, 34: 159-194.
[4] S. C. Eisenstat, H. C. Elman and M. H. Schultz. Variation aliterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983, 20(2): 345-357.
[5] H. F. Walker. A simpler GMRES. Numerical Linear Algebra with Applications, 1994, 1(6): 571-581.
[6] H. A. Van Der Vorst, C. Vuik. GMRESR: A family of nested GMRES methods. Numeral Linear Algebra with Applications, 1994, 1(4): 369-386.
[7] A. Essai. Weighted FOM and GMRES for solving nonsymmetric linear systems. Numerical Algorithms, 1998, 18(3-4): 277-292.
[8] 杨圣炜, 卢琳璋. 一种加权的 Simpler GMRES 算法[J]. 厦门大学学报, 2008, 47(4): 484-488.
[9] Z. Zhou, J. Zhao. An improved GMRES method augmented with eigenvectors. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2001, 37(1): 1-11.
[10] E. H. Ayachour. A fast implementation for GMRES method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 159(2): 269-283.
[11] H. S. Najafi, H. Zareamonghaddam. A new computational GMRES method. Applied Mathematics and Computation, 2008, 199(2): 527-534.

[12] M. Eiermann, O. G. Ernst and O. Schneider. Analysis of acceleration strategies for restarted minimum residual methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123(1): 261-292.
[13] M. Embree. The tortoise and the hare restart GMRES. SIAM Review, 2003, 45(2): 256-266.
[14] A. H. Baker, E. R. Jessup and T. Z. V. Kolev. A simple strategy for varying the restart parameter in GMRES (m). Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 230(2): 751-761.
[15] E. Vecharynski, J. Langou. The cycle-convergence of restarted GMRES for normal matrices is sublinear. Siam Journal on Scientific Computing, 2010, 32(1): 186-196.
[16] E. Vecharynski, J. Langou. Any decreasing cycle-convergence curve is possible for restarted GMRES, 2012. http://arXiv:0907.3573v1
[17] H. D. Sterck. Steepest descent preconditioning for nonlinear GMRES optimization, 2012. http://arXiv:1106.4426v2
[18] M. Huhtanen, A. Peramaki. Orthogonal polynomials of the r-linear generalized minimal residual method, 2012. http://arXiv:1111.5167v2
[19] J. Liesen, P. Tichy. The field of values bound on ideal GMRES, 2013. http://arxiv.org/abs/1211.5969v1
[20] R. Campagna, L. D’Amore and A. Murli. An efficient algorithm for regularization of Laplace transform inversion in real case. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007, 210(1-2): 84-98.
[21] J. Huang, J. Jia, M. Minion. Arbitrary order Krylov deferred correction methods for differential algebraic equations. Journal of Computational Physics, 2007, 221(2): 739-760.
[22] J. Kou, Y. Li. A uniparametric LU-SGS method for systems of nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189(1): 235-240.
[23] H. An, Z. Bai. A globally convergent Newton-GMRES method for large sparse systems of nonlinear equations. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57(3): 235-252.
[24] F. S. B. F. Oliveira. Application of a Krylov subspace iterative method in a multi-level adaptive technique to solve the mild-slope equation in nearshore regions. Applied Mathematics Modelling, 2007, 31(4): 655-662.
[25] B. Chang. A deterministic photon free method to solve radiation transfer equations. Journal of Computational Physics, 2007, 222(1): 71-85.
[26] A. Nejat, C. Ollivier-Gooch. Effect of discretization order on preconditioning and convergence of a high-order unstructured Newton-GMRES solver for the Euler equations. Journal of Computational Physics, 2008, 227(4): 2366-2386.
[27] V. Hernandez, J. J. Ibanez, J. Peinado and E. Arias. A GMRES-based BDF method for solving differential Riccati equations. Applied Mathematics and Computational, 2008, 196(2): 613-626.
[28] A. Bouhamidi, K. Jbilou. A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications. Applied Mathematics and Computational, 2008, 206(2): 687-694.
[29] M. Bellalij, K. Jbilou and H. Sadok. New convergence results on the global GMRES method for diagonalizable matrices. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 219(2): 350-358.
[30] R. Li, W. Zhang. The rate of convergence of GMRES on a tridiagonal toeplitz linear system. II. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(12): 2425-2436.
[31] T. Airaksinen, A. Pennanen and J. Toivanen. A damping preconditioner for time-harmonic wave equations in fluid and elastic material. Journal of Computational Physics, 2009, 228(5): 1466-1479.
[32] L. T. Diosady, D. L. Darmofal. Preconditioning methods for discontinuous Galerkin solutions of the Navier-Stokes equations. Journal of Computational Physics, 2009, 228(11): 3917-3935.
[33] G. Pashos, M. E. Kavousanakis, A. N. Spyropoulos, J. A. Palyvos and A. G. Boudouvis. Simultaneous solution of large-scale linear systems and eigenvalue problems with a parallel GMRES method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 227(1): 196-205.
[34] Y. Yan. The 3-D boundary element formulation of linear force-free magnetic fields with finite energy content in semi-infinite space. Solar Physics, 1995, 159(1): 97-113.
[35] Y. Li, Y. Yan, M. Devel, R. Langlet and G. Song. The GMRES method applied to the BEM extrapolation of solar force-free magnetic fields I. Constant alpha force-free fields. Astronomy & Astrophysics, 2007, 470: 1185-1191.
[36] 柳有权, 尹康学, 吴恩华. 大规模稀疏线性方程组的 GMRES-GPU 快速求解算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(4): 553-560.

