Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 223-227
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33033 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Global Attractor for Semi-Discrete Kuramoto-Sivashinsky Equation

Shengnan Dong, Chaosheng Zhu

School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing
Email: ShengnanDongswu@163.com, zcs@swu.edu.cn

Received: Mar. 27th, 2013; revised: Apr. 12th, 2013; accepted: Apr. 21st, 2013

Abstract: We study the long-time behaviour with a periodical boundary condition of semi-discrete Kuramoto-Sivashinsky equation in $\mathbb{R}^1$. First, we use the Crank-Nicolson scheme to discrete this equation to prove that such a semi-discrete equation possesses a global arrtactor in $H^1(R)$, then we also show that this global attractor is actually a compact set of L^2 and H^1.

Keywords: Kuramoto-Sivashinsky Equation; Crank-Nicolson Scheme; Global Attractor

半离散 Kuramoto-Sivashinsky 方程的全局吸引子

董胜楠，朱朝生

西南大学数学与统计学院，重庆
Email: ShengnanDongswu@163.com, zcs@swu.edu.cn

收稿日期：2013 年 3 月 27 日；修回日期：2013 年 4 月 12 日；录用日期：2013 年 4 月 21 日

摘　要：本文研究在 $\mathbb{R}^1$ 上具有周期边界条件的半离散 Kuramoto-Sivashinsky 型方程解的长时间行为。首先利用 Crank-Nicolson 格式对其进行离散，然后证明了该方程在 L^2 和 H^1 上紧的全局吸引子的存在。

关键词：Kuramoto-Sivashinsky 方程；Crank-Nicolson 格式；全局吸引子

1. 引言

本文研究在 $\mathbb{R}^1$ 上具有周期边界条件的 Kuramoto-Sivashinsky 型方程解的长时间行为：

$$u_t + uu_x + u_{xx} - u_{xxxx} + \alpha u = f\,, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad u(x+T) = u(x). \tag{1.2}$$

其中，$\alpha > 0$ 是耗散参数，$f \in L^2(\mathbb{R})$ 是不依赖于时间的外力项函数，$u_0(x)$ 是初始函数，T 是周期。

由于 Kuramoto-Sivashinsky 方程自身的复杂性以及其描述物理现象的能力（例如降膜朝向的稳定性以及火焰前锋的不稳定性等），有很多学者对 Kuramoto-Sivashinsky 方程做了大量的研究，参见文[1-7]。

很多学者对于 Schrödinger 方程的全局吸引子做了大量研究，文[8,9]对非线性方程的吸引子的正则性做了一定的研究，文[10]证明了非线性的弱耗散方程的全局吸引子的存在。文[11]证明了弱耗散的双曲方程的吸引子的存在。但是在本文中我们采用的的不是传统的证明吸引子存在的方法，这里我们采用的是文[12]中的方法。用 Crank-Nicolson 格式对 Kuramoto-Sivashinsky 方程进行离散，再利用一致先念估计的方法证明离散全局吸引子的

存在性。

下面，我们介绍一种与(1.1)相关的 Crank-Nicolson 格式：首先对于给定的$u \in H^1(\mathbb{R})$，存在唯一的解$u \in C\left([0,\infty), H^1\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^{-1}\right)$，(1.1)等价于：

$$\partial_t\left(\mathrm{e}^{\alpha t} u(t)\right)+\frac{1}{2} \partial_x\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} t} u(t)\right)^2+\partial_x^2\left(\mathrm{e}^{\alpha t} u(t)\right)+\partial_x^4\left(\mathrm{e}^{\alpha t} u(t)\right)=\mathrm{e}^{\alpha t} f \text{。} \tag{1.3}$$

对于给定的时间离散$\tau>0$，我们考虑定义为$\tau^n=n\tau$的时间一致子列$\left(t^n\right)_n$，并且将(1.3)在时间区间$\left[t^n, t^{n+1}\right]$上积分，有：

$$\mathrm{e}^{\alpha t^{n+1}} u\left(t^{n+1}\right)-\mathrm{e}^{\alpha t^n} u\left(t^n\right)+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left[\frac{1}{2} \partial_x\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} t} u(t)\right)^2+\partial_x^2\left(\mathrm{e}^{\alpha t} u(t)\right)+\partial_x^4\left(\mathrm{e}^{\alpha t} u(t)\right)\right] \mathrm{d} t=\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathrm{e}^{\alpha t} f \mathrm{d} t \text{。} \tag{1.4}$$

利用梯形面积法则知：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s) \mathrm{d} s \sim \frac{\tau}{2}\left(g\left(t^{n+1}\right)+g\left(t^n\right)\right), \tag{1.5}$$

上式的估计误差为：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s) \mathrm{d} s-\frac{\tau}{2}\left(g\left(t^{n+1}\right)+g\left(t^n\right)\right)=-\frac{\tau^3}{12} g''(\xi) \text{。} \tag{1.6}$$

令子列$u^n \sim u\left(t^n\right)$，这里$u$是(1.4)的解的连续形式。在(1.4)中使用(1.5)的法则有：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left(\mathrm{e}^{\alpha(n+1)\tau} u^{n+1}-\mathrm{e}^{\alpha n\tau} u^n\right)+\frac{1}{2} \partial_x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}(n+1)\tau} u^{n+1}+\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} n\tau} u^n}{2}\right)^2 \\
&+\partial_x^2 \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\alpha(n+1)\tau} u^{n+1}+\mathrm{e}^{\alpha n\tau} u^n\right]+\partial_x^4\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha(n+1)\tau} u^{n+1}+\mathrm{e}^{\alpha n\tau} u^n}{2}\right), \\
&=\frac{\mathrm{e}^{\alpha(n+1)\tau}+\mathrm{e}^{\alpha n\tau}}{2} f
\end{aligned} \tag{1.7}$$

上式乘以$\mathrm{e}^{-\alpha(n+1)\tau}$，有：

$$\frac{1}{\tau}\left(u^{n+1}-\beta u^n\right)+\frac{1}{2} \partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta^{\frac{1}{2}} u^n}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \partial_x^2\left(u^{n+1}+\beta u^n\right)+\partial_x^4\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)=\frac{1+\beta}{2} f, \tag{1.8}$$

其中，$\beta=\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$。因为$\alpha\tau \ll 1$，为了得到相同的连续估计，我们用$\beta$来代替$\beta^{\frac{1}{2}}$。同时为了简化运算，我们用$f$来代替$\frac{1+\beta}{2} f$。因此，有：

$$\frac{1}{\tau}\left(u^{n+1}-\beta u^n\right)+\frac{1}{2} \partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \partial_x^2\left(u^{n+1}+\beta u^n\right)+\partial_x^4\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)=f \text{。} \tag{1.9}$$

现在我们陈述本文的主要结果：

定理 1.1 若$f \in L^2(\mathbb{T})$满足，$8\sqrt{\tau}\|f\|_{L^2}^2 \leq \tilde{c}\alpha^2$，方程(1.9)有一个离散的半群$S^n$，$n \geq 1$时满足：$\forall u_0 \in E$，$u^{n+1}=Su^n=S^{n+1}u_0$是(1.9)的解。

定理 1.2 定理 1.1 中的离散的半群S即：$Su^n=Su^{n+1}: E \to E$，在$H^4(\mathbb{T})$上有一个紧的全局吸引子。

定理 1.1 的证明有以下几个步骤：首先证明离散以后的方程的格式在$L^2(\mathbb{T})$上是稳定的，然后证明$\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}$

在 $H^4(\mathbb{T})$ 上的范数有界，最后证明半群 S 在 $H^3(\mathbb{T})$ 存在并且 S 有一个紧的全局吸引子。

2. 主要结果的证明

假设 $\alpha\tau \ll 1$，我们证明这个格式在 $L^2(\mathbb{T})$ 上 τ 是一致稳定的。

引理 2.1 设 $\alpha\tau$ 是充分小的，那么：

$$\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 \le \beta^n \left\|u_0\right\|_{L^2}^2 + \left(1-\beta^n\right)\frac{8}{\alpha^2}\left\|f\right\|_{L^2}^2 。 \tag{2.1}$$

证明：方程(1.9)与 $u^{n+1}+\beta u^n$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 上作内积，有：

$$\begin{aligned}\left\|u^{n+1}\right\|_{L^2}^2 &\le \beta^2\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 + \tau\left|\left\langle f, u^{n+1}+\beta u^n\right\rangle\right| \\ &\le \beta^2\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 + \frac{2\tau}{\alpha}\left\|f\right\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha\tau}{4}\beta^2\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha\tau}{4}\left\|u^{n+1}\right\|_{L^2}^2\end{aligned},$$

所以：

$$\left(1-\frac{\alpha\tau}{4}\right)\left\|u^{n+1}\right\|_{L^2}^2 \le \left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)\beta^2\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 + \frac{2\tau}{\alpha}\left\|f\right\|_{L^2}^2 。$$

由于 $\alpha\tau$ 是充分小的，我们有：

$$\beta\left(1-\frac{\alpha\tau}{4}\right)^{-1}\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right) \le 1，$$

所以：

$$\left\|u^{n+1}\right\|_{L^2}^2 \le \beta\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 + \frac{4\tau}{\alpha}\left\|f\right\|_{L^2}^2 。$$

由离散的 *Growall* 引理，有：

$$\left\|u^n\right\|_{L^2}^2 \le \beta^n\left\|u_0\right\|_{L^2}^2 + \left(1-\beta^n\right)\frac{4\alpha\tau}{\alpha^2(1-\beta)}\left\|f\right\|_{L^2}^2 。$$

引理 2.1 得证。

下面我们引入集合 $E=\left\{v\in L^2(\mathbb{T}); \sqrt{\tau}\left\|v\right\|_{L^2}^2 < \tilde{c}\right\}$。

显然满足引理 2.1，即若 $u_0 \in E$ 且 $f\in L^2(\mathbb{T})$，它满足 $8\sqrt{\tau}\left\|f\right\|_{L^2}^2 < \tilde{c}\alpha^2$，那么对于所有的 $N\in N^*$， $u^n \in E$ 。

我们把(1.9)改写成：

$$\frac{\left(\dfrac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}-\beta u^n\right)}{\dfrac{\tau}{2}} + \frac{1}{2}\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)^2 + \partial_x^2\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right) + \partial_x^4\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right) = f 。 \tag{2.2}$$

如果 $u^0, u^1, \cdots, u^n$ 都能在 E 中得到，利用不动点定理我们只需要寻找 $\dfrac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}$，而不是 u^{n+1}。为此考虑泛函：

$$\mathcal{F}(w) = \beta R u^n + \frac{\tau}{2}Rf - \frac{\tau}{4}R\partial_x w^2，$$

其中，

$$R = \left(1+\frac{\tau}{2}\partial_x^4 + \frac{\tau}{2}\partial_x^2\right)^{-1} 。$$

我们对步长τ作一些限制，当τ足够小时，我们有下面的引理：

引理 2.2 存在一个正常数c，使得

1) $\|R\|_{L\left(L^2,H^s\right)} \le \left(\frac{2}{\tau}\right)^{\frac{s}{4}}$， $\forall 0 \le s \le 4$；

2) $\|\partial_x R\|_{L\left(L^1,L^2\right)} \le \frac{c}{\sqrt{\tau}}$。

由文[13]中引理 1 的证明方法可得引理 2.2 此时，$\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}$比解$u^n$更正则。

引理 2.3 存在一个正常数$K = K\left(\frac{1}{\alpha},\|u_0\|_{L^2},\|f\|_{L^2}\right)$，使得：

$$\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^3(\mathbb{T})} \le \frac{K}{\tau}。$$

证明：由(2.2)，引理 2.1 和引理 2.2 有：

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^4}\\
&\le \frac{1}{\tau}\|u^n\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + \left\|\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)^2\right\|_{L^2} \le \frac{1}{\tau}\|u^n\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + c\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{L^\infty}\left\|\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)_x\right\|_{L^2}\\
&\le \frac{1}{\tau}\|u^n\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + c\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \le \frac{1}{\tau}\|u^n\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + c\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^4}^{\frac{1}{2}}。\\
&\le c\left(\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2},\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\tau}+\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^4}^{\frac{1}{2}}\right) \le \frac{1}{\tau}c\left(\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2},\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^4}
\end{aligned}$$

由此得引理 2.3。

定理 1.1 的证明：我们通过 Banach 不动点定理来证明(1.9)的解的唯一性。

若存在u^n， w是$\mathcal{F}$上的一个定点，令$u_{n+1} = 2w - \beta u_n$。

$$\mathcal{F}(w) = \beta R u^n - \frac{\tau}{4}R\partial_x w^2 + \frac{\tau}{2}Rf， \tag{2.3}$$

$$F = \left\{ v \in L^2(T): \|v\|_{L^2} \le R = 2\|u_n\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \le \frac{3\sqrt{\tilde{c}}}{(\tau)^{\frac{1}{4}}} \right\}。$$

由引理 2.2 有：

$$\|P(w)\|_{L^2} \le \beta\|u^n\|_{L^2} + \frac{\tau}{2}\|f\|_{L^2} + \frac{c(\tau)^{\frac{1}{2}}}{4}\|w\|_{L^2}^2 \le \|u^n\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|f\|_{L^2} + \frac{c(\tau)^{\frac{1}{2}}}{4}R^2 \le \frac{R}{2} + \frac{3c\sqrt{\tilde{c}}(\tau)^{\frac{1}{4}}}{4}R。$$

若$\frac{3c\sqrt{\tilde{c}}\tau^{\frac{1}{4}}}{4}R < \frac{1}{2}$，则$\mathcal{F}$是$F$到$F$上的映射。下面证明$\mathcal{F}$是压缩映射：

$$\mathcal{F}(w_1) - \mathcal{F}(w_2) = \frac{\tau}{4}R\partial_x\left[(w_1-w_2)(w_1+w_2)\right]，$$

$$\|\mathcal{F}(w_1) - \mathcal{F}(w_2)\|_{L^2} \le c(\tau)^{\frac{1}{2}} R\|w_1-w_2\|_{L^2} \le 3c\sqrt{\tilde{c}}(\tau)^{\frac{1}{4}}\|w_1-w_2\|_{L^2}。$$

若 $3c\sqrt{\tilde{c}}\left(\tau\right)^{\frac{1}{4}}<1$，则 $\mathcal{F}$ 是压缩映射。证毕。

定理 1.2 的证明：任意的(1.9)的解 u^n 可以分解成：

$$u^n=v^n+w^n,\ \forall n\in N，\tag{2.4}$$

且 v^n 和 w^n 分别满足：

$$\begin{cases}\dfrac{v^{n+1}-\beta v^n}{\tau}+\partial_x^4\left(\dfrac{v^{n+1}+\beta v^n}{2}\right)+\partial_x^2\left(\dfrac{v^{n+1}+\beta v^n}{2}\right)=0\\ v^0=u_0\end{cases}\tag{2.5}$$

$$\begin{cases}\dfrac{w^{n+1}-\beta w^n}{\tau}+\dfrac{1}{2}\partial_x\left(\dfrac{v^{n+1}+\beta v^n}{2}\right)^2+\partial_x^4\left(\dfrac{w^{n+1}+\beta w^n}{2}\right)+\partial_x^2\left(\dfrac{w^{n+1}+\beta w^n}{2}\right)=f\\ w^0=0,\end{cases}，\tag{2.6}$$

问题(2.5)、(2.6)是适定的，由引理 2.1 和引理 2.3 知， v^n 和 w^n 满足：

$$\lim_{n\to\infty}\left\|v^n\right\|_{L^2}=0，\tag{2.7}$$

并且存在一个正整数 $c=c\left(\dfrac{1}{\alpha},\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2}\right)$，使得：

$$\left\|\partial_x^4 w^n\right\|_{L^2}\le\frac{c}{\tau}。\tag{2.8}$$

由此可知半群 $S^n u_0=v^n+w^n$ 可分解为一个紧的映射和一个收敛到零的有界集。定理 1.2 得证。

目前研究连续性方程长时间行为的文献已经有很多，采用对空间离散的半离散方法研究方程长时间行为的文献也不少，但是采用对时间离散的半离散方法研究方程长时间行为的文献几乎没有。我们的这篇论文在这方面正好是一个很好的尝试。

参考文献 (References)

[1] K. L. Adams, J. R. King, R. H. Tew. Beyond-all-orders effects in muliple-scales asymptonics: Travelling-wave equations to the Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Engineering Mathematics, 2003, 45(3-4) 197-226.

[2] E. Cerpa, A. Mercado. Local exact controllability to the trajectories of the 1-D Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Differential Equations, 2011, 250(4): 2024-2044.

[3] S. Publjevic. Boundary model predictive control of Kuramoto-Sivashinsky equation with input and state constraints. Computers & Chemical Engineering, 2011, 34(10): 1655-1661.

[4] L. Molinet. Local disspativity in L^2 for the Kuramoto-Sivashinsky equation in spatial dimension 2. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2000, 12(3): 533-556.

[5] C. I. Byrnes, D. S. Gilliam, C. Hu and V. I. Shubov. Zero dynamics boundary control for regulation of the Kuramoto-Sivashinsky equation. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 52(5-6): 875-891.

[6] D. Wilczak. Chaos in the Kuramoto-Sivashinsky equation: A computer-assisted proof. Journal of Differential Equations, 2003, 194(2): 433-459.

[7] W. C. Troy. The existence of Steady of Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Differential Equations, 1989, 82(2): 269-313.

[8] N. Akroune. Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrodinger equation on $\mathbb{R}$. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(1): 45-48.

[9] C. S. Zhu. Attractors of the nonlinear Schrodinger equation. Communications in Mathematical Analysis, 2008, 4(2): 67-75.

[10] O. Goubet. Global attractor for weakly damped nonlinear Schrodinger equations in $L^2(\mathbb{R})$. Nonlinear Analysis Theory, 2009, 71(2): 317-320.

[11] J. M. Ghidaglia, R. Temam. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1987, 66: 273-319.

[12] E. Ezzoug, W. Kechiche and E. Zahrouni. Finite dimensional global attractor for a semi-discrete nonlinear Schrodinger equation with a point defect. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(19): 7818-7830.

[13] M. Abounouh. Global attractor for a time discretization of damped forced KdV equation, to appear.

