Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 295-299
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35045 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Uniqueness of Polynomial Sharing a Set*

Dan Liu, Weiyang Lin

Department of Applied Mathematics, College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou
Email: liudan@scau.edu.cn

Received: May. 12th, 2013; revised: Jun. 4th, 2013; accepted: Jun. 17th, 2013

Abstract: This paper studied the uniqueness of polynomial posed by Gross in 1976, and proved that there exists a set *S* with 3 elements such that for any two non-constant polynomials *f* and *g*, if *f* and *g* share *S* CM, then $f \equiv g$. And the number 3 of the set *S* is best possible.

Keywords: Polynomial; Shared Value; CM Sharing; Uniqueness

分担集合的多项式的惟一性*

刘　丹，林威扬

华南农业大学理学院应用数学系，广州
Email: liudan@scau.edu.cn

收稿日期：2013 年 5 月 12 日；修回日期：2013 年 6 月 4 日；录用日期：2013 年 6 月 17 日

摘　要：本文研究了 Gross 在 1976 年所提出的一个惟一性问题关于多项式的情形，证明了存在三个元素的集合 *S*，使得对于任何两个非常数多项式 *f* 和 *g*，如果 *f*, *g* CM 分担 *S*，则 $f \equiv g$。并且集合 S 的基数 3 是最佳的。

关键词：多项式；分担值；CM 分担；惟一性

1. 引言

设 f 是一个函数，a 是一个常数，S 是一个集合，记 $E(a,f)=\{z: f(z)=a\}$，其中 n 重根记 n 次，$E(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{z: f(z)=a\}$。设 f,g 是两个函数，若 $E(a,f)=E(a,g)$，则称 f,g CM 分担 a；若 $E(S,f)=E(S,g)$，则称 f,g CM 分担集合 S。

1926 年，Nevanlinna[1]证明了：

定理 A 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个判别的有穷复数，若非常数整函数 f,g CM 分担 a_1,a_2,a_3,a_4，则 $f \equiv g$。

1976 年，Gross[2]提出下述问题：

问题 A[2] 能否找到两个(甚至一个)有限集合 S_j，使得对任何两个非常数整函数 f 与 g，只要满足 $E(S_j,f)=E(S_j,g)$，必有 $f \equiv g$？若这样的 S 存在，问 S 的最小基数是多少？

1982 年，Gross 和 Yang[3]证明了：

定理 B 设 $S=\{z: e^z+z=0\}$，则对于任何两个非常数整函数 f 与 g，只要满足 $E(S,f)=E(S,g)$，必有 $f \equiv g$。

*基金项目：本文受国家自然科学基金(基金号：11371149)资助。

1994 年，仪洪勋[4]证明了：

定理 C 设 n 与 m 为正整数，a 与 b 为非零常数，且满足 $n \ge 15$，$n > m \ge 5$，n 与 m 没有公因子，代数方程 $w^n + aw^m + b = 0$ 没有重根；$w_1, w_2, \cdots, w_n$ 表示代数方程 $w^n + aw^m + b = 0$ 的 n 个不同的根，$S = \left\{c + dw_1, c + dw_2, \cdots, c + dw_n\right\}$，这里 c 与 d 为常数，且 $d \ne 0$。则对于任何两个非常数整函数 f 与 g，只要满足 $E\left(S, f\right) = E((S, g)$ 就有 $f \equiv g$。

1995 年，仪洪勋[5]进一步证明了：

定理 D 设 f 与 g 为非常数整函数，集合 $S = \left\{w \in C \middle| w^n + aw^{n-m} + b = 0\right\}$，其中 n 与 m 是二个互质的整函数，且满足 $n \ge 2m + 5$，a 与 b 是二个非零常数，使得代数方程 $w^n + aw^{n-m} + b = 0$ 没有重根。如果 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$，则 $f \equiv g$。

由定理 D 可知，存在一个具有 7 个元素的复数集合，使得对于任何两个非常数整函数 f 与 g，只要满足 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$ 就有 $f \equiv g$。但 S 的最小基数是否为 7，仍有待解决。

由于多项式是整函数，所以上述定理也适用于多项式函数。但是，是否能用更简洁的方法证明分担集合的多项式的惟一性？并且，在多项式的情形下，所分担集合的最小基数是否能确定呢？本文解决了上述问题，并得到一些相关的结论。

定理 1 设 $S = \left\{z : z^n - z^{n-1} - 1 = 0\right\}, n \ge 3$ 是一个正整数，设 f, g 是两个非常数多项式，若 f, g 满足 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$，则 $f \equiv g$。

注： 设 $S = \left\{a, b\right\}, a, b$ 是相互判别的非零有穷复数，f 是任意非常数的多项式，且 $g = -f + a + b$，则 f, g 满足 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$，但是 $f \not\equiv g$。这说明定理 1 中 $n \ge 3$ 是最好的。

定理 2 $S = \left\{z : z^n - a = 0\right\}$，$a$ 是非零有穷复数，$n \ge 2$ 是一个正整数，设 f, g 是两个非常数多项式，若 f, g 满足 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$，则 $f = tg$，其中 $t^n = 1$。

推论 1 设 $S = \left\{a, b\right\}$，a, b 是判别的非零有穷复数，f, g 是两个非常数多项式，若 f, g CM 分担 S，则或者 $f \equiv g$，或者 $f + g \equiv a + b$。

2. 定理的证明

2.1. 定理 1 的证明

由于 $E\left(S, f\right) = E\left(S, g\right)$，且 f, g 是多项式，有

$$f^n\left(z\right) - f^{n-1}\left(z\right) - 1 = K\left[g^n\left(z\right) - g^{n-1}\left(z\right) - 1\right] \tag{1}$$

其中 K 是常数。

对(1)两边求导，得

$$f^{n-2}\left(z\right)\left[nf\left(z\right) - \left(n-1\right)\right]f'\left(z\right) = Kg^{n-2}\left(z\right)\left[ng\left(z\right) - \left(n-1\right)\right]g'\left(z\right)。 \tag{2}$$

断言 $K = 1$。

下面分两种情形证明：

情形 1。存在 z_0 满足 $f\left(z_0\right) = 0$,且 $g\left(z_0\right) = 0$，代入(1)，可以得到 $K = 1$。

若对任意 z_0 满足 $f\left(z_0\right) = 0$，但 $g\left(z_0\right) \ne 0$，由(2)可知，一定存在 $f\left(z\right)$ 的一个零点(不妨仍设为 z_0)，使得 $ng\left(z_0\right) - \left(n-1\right) = 0$，即

$$g\left(z_0\right) = \frac{n-1}{n}, \tag{3}$$

代入(1)，有

$$-1=K\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}-1\right]。\tag{4}$$

情形 2。存在 z_1 满足 $g(z_1)=0$,且 $f(z_1)=0$,代入(1),可以得到 $K=1$。

若对任意 z_1 满足 $g(z_1)=0$，但 $f(z_1)\neq 0$，由(2)式可知，一定存在一个 $g(z)$ 的一个零点(不妨仍设为 z_1)，使得 $nf(z_1)-(n-1)=0$,即

$$f(z_1)=\frac{n-1}{n}。\tag{5}$$

代入(1)得

$$-K=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}-1。\tag{6}$$

由(4)和(6)可得

$$\begin{cases}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=2\\ K=1\end{cases} 或 \begin{cases}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=0\\ K=-1\end{cases},$$

这与 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\neq 0,2$ 矛盾。故必有 $K=1$。

于是(1)式等价于 $f^n(z)-f^{n-1}(z)=g^n(z)-g^{n-1}(z)$。

上式两边同时除以 $g^n(z)$，可得

$$\frac{f^n(z)-f^{n-1}(z)}{g^n(z)}=\frac{g^n(z)-g^{n-1}(z)}{g^n(z)},$$

即

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{n}-1=\frac{1}{g(z)}\left[\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{n-1}-1\right],\tag{7}$$

设 $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$，则有

$$h^n(z)-1=\frac{1}{g(z)}\left(h^{n-1}(z)-1\right),\ g(z)=\frac{h^{n-1}(z)-1}{h^n(z)-1}。$$

若 $h^n(z)\equiv 1$，分两种情况：

情形 3。$h(z)\equiv 1$，则 $f(z)\equiv g(z)$；

情形 4。$h(z)\not\equiv 1$，则 $h^{n-1}(z)+h^{n-2}(z)+\cdots h(z)+1\equiv 0$，此时一定有 $h^{n-2}(z)+h^{n-3}(z)+\cdots+h(z)+1\not\equiv 0$，否则 $h(z)\equiv 0$，矛盾。

由(7)，

$$g(z)\left(h(z)-1\right)\left[h^{n-1}(z)+h^{n-2}(z)+\cdots+h(z)+1\right]=\left(h(z)-1\right)\left[h^{n-2}(z)+h^{n-3}(z)+\cdots+h(z)+1\right]$$

且 $h(z)\not\equiv 1$，所以 $h^{n-2}(z)+h^{n-3}(z)+\cdots+h(z)+1=0$，矛盾。

若 $h^n(z)\not\equiv 1$，且 $h(z)\not\equiv 1$，因而 $h^{n-1}(z)+h^{n-2}(z)+\cdots+h(z)+1\neq 0$。

由(7)，有

$$g(z)=\frac{1+h(z)+h^{2}(z)+\cdots+h^{n-2}(z)}{1+h(z)+h^{2}(z)+\cdots+h^{n-1}(z)}。$$

其中，$h(z)\neq t_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$，$t_i^{\,n}=1$。

特别地，$h(z)\neq t_1,\ h(z)\neq t_2$，于是，

$$\begin{cases} h(z)=t_1+\dfrac{1}{p(z)} \\ h(z)=t_2+\dfrac{1}{q(z)} \end{cases},$$

其中 $p(z)$ 和 $q(z)$ 均为非常数多项式，则有 $t_1-t_2=\dfrac{1}{q(z)}-\dfrac{1}{p(z)}$，或者

$$p(z)q(z)(t_1-t_2)=p(z)-q(z) \tag{8}$$

比较(8)两边多项式的次数，矛盾。

于是得到 $h(z)\equiv 1$，即 $f(z)\equiv g(z)$。定理 1 证毕。

2.2. 定理 2 的证明

同定理 1 的证明，由条件可得

$$f^{n}(z)-a=K\left(g^{n}(z)-a\right), \tag{9}$$

对(9)两边同时求导，得

$$nf^{n-1}(z)f'(z)=Kng^{n-1}(z)g'(z),$$

设 z_0 满足 $f(z_0)=0$，则 $g(z_0)=0$。

将 $\begin{cases} f(z_0)=0 \\ g(z_0)=0 \end{cases}$，代入(9)式得 $K=1$，所以 $f^{n}(z)=g^{n}(z)$，即 $f(z)=tg(z)$，其中 $t^{n}=1$，定理 2 证毕。.

2.3. 推论 1 的证明

由定理 2，$S=\{z:z^{n}-a=0\}$。

当 $n=2$ 时，S 有两个元素，不妨设为 $S=\{a,b\}$。

若 f,g CM 分担 S，有

$$\left(f(z)-a\right)\left(f(z)-b\right)=K\left(g(z)-a\right)\left(g(z)-b\right) \tag{10}$$

对 $f(z)$ 和 $g(z)$ 进行平移变换，令

$$f_1(z)=f(z)+\frac{a+b}{2},\quad g_1(z)=g(z)+\frac{a+b}{2},$$

代入(10)，得到

$$f_1^{2}(z)-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2}=K\left[g_1^{2}(z)-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2}\right],$$

即 $f_1(z)$ 与 $g_1(z)$ CM 分担 $S_1=\left\{z:z^{2}-\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{2}=0\right\}$。

由定理 2，有 $f_1(z)=g_1(z)$ 或 $f_1(z)=-g_1(z)$，

当 $f_1(z)=g_1(z)$ 时， $f(z)=g(z)$；

当 $f_1(z)=-g_1(z)$ 时， $f(z)+g(z)\equiv a+b$ 。

推论 1 证毕。

参考文献 (References)

[1] R. Nevanlinna. Le Thérème de picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthiervillars, 1929.
[2] F. Gross. Factorization of meromorphic functions and some open problems, complex analysis. Berlin: Springer, 1977: 51-67.
[3] F. Gross, C. C. Yang. On preimage and range sets of meromorphic function. Proceedings of the Japan Academy of Mathematical Sciences, 1982, 58(1): 17-20.
[4] 仪洪勋. 具有三个公共值的亚纯函数[J]. 中国科学 A 辑, 1994, 24(11): 1137-1144.
[5] H. X. Yi. A question of gross and the uniqueness of entire functions. Nagoya Mathematical, 1995, 138: 169-177.