Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 317-320
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35049 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On the Existence of Fixed Point via Mann Iterates and Constructing Compression Function*

Dan Wang, Yan Liu, Jia An, Kang Yang, Anmin Mao

School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu
Email: maoam@163.com

Received: Jun. 15th, 2013; revised: Jul. 4th, 2013; accepted: Jul. 13th, 2013

Abstract: This paper considers the existence of fixed points of a function which cannot be applied to the Mann iterates. By constructing some compression function, we obtain the fixed point via Mann iteration method.

Keywords: Fixed Point; Mann Iteration Method; Compression Function

构造压缩函数用 Mann 迭代求不动点*

王　丹，刘　岩，安　家，杨　康，毛安民

曲阜师范大学，数学科学学院，曲阜
Email: maoam@163.com

收稿日期：2013 年 6 月 15 日；修回日期：2013 年 7 月 4 日；录用日期：2013 年 7 月 13 日

摘　要： 本文研究一类不满足 Mann 迭代的函数的不动点的存在性。通过构造压缩函数，我们使用 Mann 迭代方法得到了不动点。

关键词： 不动点；Mann 迭代方法；压缩函数

1. 引言

利用 Mann 迭代求不动点是目前国际上比较常规的方法，可参考文献[1,2]，但是有些函数存在不动点却不满足 Mann 迭代的定义，我们试图压缩函数使之满足 Mann 迭代的条件。

定义1.1 设 A、B 为非空数集，$f:A\to B$ 是定义在 A 上的函数，若存在 $x^*\in A$，使得 $f(x^*)=x^*$，则称 x^* 为函数 $f(x)$ 在 A 上的一个不动点。

定义1.2 (Mann迭代)设 $[a,b]$ 是实轴上的有界闭区间，然后考虑一个连续映射 $f:[a,b]\to[a,b]$。让 $\{t_n\}$ 为区间 $[a,b]$ 实的任意数列，考虑 $[a,b]$ 上的迭代序列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1\in[a,b]$

$$x_{n+1}:=(1-t_n)x_n+t_n f(x_n)$$

这种迭代就是常说的Mann迭代，或Krasnoselski-type。

定理 1.1[2] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $(f(a)-a)(f(b)-b)\le 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在不动点。

上述定理描述的函数不全部满足 Mann 迭代的条件，为此我们可以通过构造压缩函数使压缩后的函数满足

*资助信息：本文得到了曲阜师范大学“国家级大学生创新创业训练计划项目”(编号：201210446003)的资助。

Mann 迭代的条件，并且不动点与压缩之前的函数相同。

定理1.2[1] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，而且 $f:[a,b]\to[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有不动点P，且对任意的 $x_0\in[a,b]$，Mann迭代序列

$$x_{n+1}:=(1-t_n)x_n+t_n f(x_n)$$

必收敛于 $f(x)$ 的某个不动点，其中 $0\le t_n\le 1,\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n=\infty$ 。

2. 主要结论及其证明

定理2.1 设 $f\in C([a,b],[m,n]),[a,b]\subset[m,n]$, 在端点 a,b 处存在邻域 $U_+(a),U_-(b)$ 使 $f(x)$ 在邻域内可导。设

$$(f(a)-a)(f(b)-b)\le 0,$$

则 $f(x)$ 必有不动点。若 $(f'(a)-1)(f'(b)-1)<0$，则可以通过构造新的函数 $G(x)=mF(x)+x$，用迭代格式 $x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nG(x_n)$ 把不动点迭代出来，称 m 为压缩系数，满足：

$$m\le\frac{\inf\{b-x_i,x_i-a\}}{|M|+|N|}$$

其中 $F(x)=\begin{cases}f(x)-x, & f(a)\ge a, f(b)\le b\\ -f(x)+x, & f(a)\le a, f(b)\ge b\end{cases}$，$x_i$ 为 $f(x)$ 的不可导点和导数值为零的点，M,N 为 $f(x)$ 的上下界。

证明： $f\in C([a,b],[m,n])$，则 $f(x)$ 必有界。

1) 若 $f(a)\ge a, f(b)\le b$，由定理1.1可知存在不动点。

①若 $f'(a)>1, f'(b)<1$，令 $F(x)=f(x)-x$，F 有界，并且可设 F 的上下界分别为 $|M|+|N|$ 和 $-|M|-|N|$，下证存在 m 满足

$$m\le\frac{\inf\{b-x_i,x_i-a\}}{|M|+|N|}$$

使得构造的压缩函数 $G(x)$ 满足Mann迭代的条件。

因 $f(x)$ 在两端点存在某邻域使邻域内可导，故若 $x_i\ne a$ 或 $x_i\ne b$ 则 $\inf\{b-x_i,x_i-a\}\ne 0$。根据引理构造出新的 $G(x)=mF(x)+x$ 与 $f(x)$ 有相同的不动点，并且 $\forall x_i\in[a,b]$

$$a\le\frac{\inf\{b-x_i,x_i-a\}}{|M|+|N|}(-|M|-|N|)+x_i\le mF(x_i)+x_i=G(x_i)$$

$$G(x_i)=mF(x_i)+x_i\le\frac{\inf\{b-x_i,x_i-a\}}{|M|+|N|}(-|M|-|N|)+x_i\le b$$

则 $G(x)$ 满足定理1.2的条件，故可以用Mann迭代将不动点迭代出来。

②若 $f'(a)<1, f'(b)>1$,，令 $F(x)=-f(x)+x$，则构造的 $G(x)$ 满足情形①的条件。

2) 若 $f(a)\le a, f(b)\ge b$，同理可证。

综上所述，定理得证。

定理2.2 设 $f\in C([a,b],[m,n]),[a,b]\subset[m,n]$, 在端点 a,b 处存在邻域 $U_+(a),U_-(b)$ 使 $f(x)$ 在邻域内可导。则 $f(x)$ 必有不动点。若满足定理2.1的边界条件，可直接迭代。若不满足则可以对定义区间分隔，并分别对分割区间用定理2.1将不动点迭代出来。

证明：若满足定理 2.1 的边界条件则可以应用定理直接求出。

若不满足定理 2.1 的边界条件，则可能出现 $f(a) \ge a, f(b) \ge b$ 或 $f(a) \le a, f(b) \le b$ 两种情况。①若 $f(a) \ge a, f(b) \ge b$，则 $\exists c \in [a,b]$ 使得 $f(c) \le c$，将区间分为 $[a,c],[c,b]$，对两个区间分别应用定理 2.1 即可。②若 $f(a) \le a, f(b) \ge b$ 则 $\exists d \in [a,b]$ 使得 $f(d) \ge d$。将区间分为 $[a,d],[d,b]$，对两个区间分别应用定理 2.1 即可。

3. 定理应用

例 求函数 $f(x) = -x^5 + 30x^3 - 2$ 在区间 $[6,-6]$ 上的不动点。

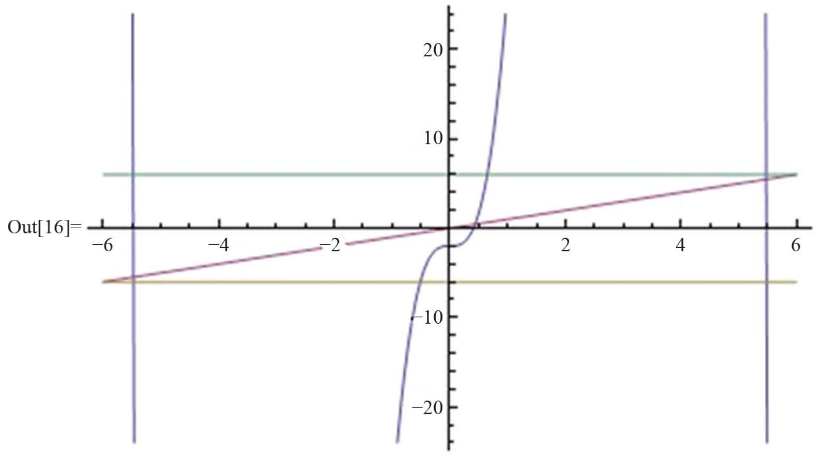
解：根据条件确定出 m 的取值，取 $m = 0.001$ 构造函数

$$G(x) = 0.001\left(-x^5 + 30x^3 - 2 - x\right) + x$$

取 $t_n = \frac{1}{n}$，可知满足 Mann 迭代的条件。

从下图我们也可以清晰地看出压缩过程，压缩函数满足 Mann 迭代的条件，并且压缩函数的不动点和原函数的不动点相同。

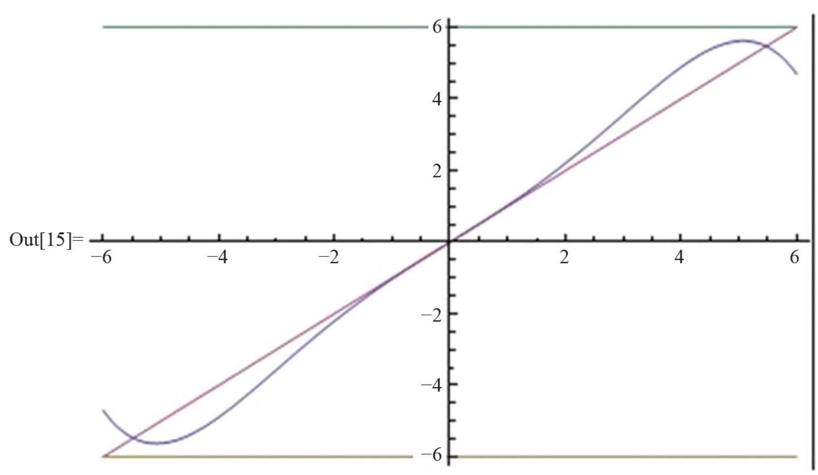
ln[16]:= Plot[{ −x^5 + 30x^3 − 2, x, −6, 6 }, { −x, −6, 6 }]



m = 5/5000.

0.001

ln[15]:= Plot[{ 0.001(−x^5 + 30x^3 − 2− x) + x, x, , −6, 6 }, { x, −6, 6 }]



使用 Mathematica 计算，取初值为 6，迭代 900 次，与实际数值解比较，发现收敛于其中一个不动点。

程序如下：

$Iterate[f\_, x0\_, n\_Integer] :=$

$Module[\{t = \{\}, i, temp = x0\},$

$AppendTo[t, temp];$

$For[i = 1, i \le n, i++, temp = (1 - 1/i) * temp + (1/i) f[temp];$

$AppendTo[t, temp];$

$t\ \ ]$

$f[x\_] := 0.001(-x \wedge 5 + 30x \wedge 3 - 2 - x) + x$

$Iterate[f, 6., 900]$

解得 $x = 5.47306$

用 Mathematica 求上述问题的数值解

$NSolve[-x \wedge 5 + 30x \wedge 3 - 2 == x, \{x\}]$

解得

$x \to -0.21579 - 0.327541i$

$x \to -0.21579 + 0.327541i$

$x \to -5.47529$

$x \to 0.43381$

$x \to 5.47306$

4. 致谢

本文得到了曲阜师范大学“国家级大学生创新创业训练计划项目”(编号：201210446003)的资助，在此作者表示感谢。

参考文献 (References)

[1] D. Borwein, J. Borwein, Fixed point iterations for real functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991, 157(1): 112-126.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上、下)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

