Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 305-311
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35047 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Benz Theorem and the Aleksandrov Problem in 2-Normed Space*

Qian Zhang, Yubo Liu, Meimei Song

Department of Applied Mathematics, Science of College, Tianjin University of Technology, Tianjin
Email: zhang71qian@163.com, liuyubo2003@126.com, songmeimei@tjut.edu.cn

Received: May. 13th, 2013; revised: Jun. 7th, 2013; accepted: Jun. 21st, 2013

Abstract: In this paper, we introduce Benz theorem that is established without the condition "Y is strictly convex and $\dim X \geq 2$". Then the main theorem holds mainly by changing the type of space in [1] and weakening the conditions of the theorem in 2-normed space and in *n*-normed space. And the theorem 2.1 in [1] can be used as the corollary of theorem 2.3 in this paper.

Keywords: The Benz Theorem; 2-Isometry; AOPP; The Aleksandrov Problem

Benz 定理和赋 2-范空间上的 Aleksandrov 问题*

张　倩，刘玉波，宋眉眉

天津理工大学理学院应用数学系，天津
Email: zhang71qian@163.com, liuyubo2003@126.com, songmeimei@tjut.edu.cn

收稿日期：2013 年 5 月 13 日；修回日期：2013 年 6 月 7 日；录用日期：2013 年 6 月 21 日

摘　要：本文首先介绍了 Benz 定理在去掉了"Y 是严格凸的和 $\dim X \geq 2$"两个条件仍然成立[1]。其后我们通过改变文献[1]中的空间类型，弱化了定理中的条件，得到在 2-范空间和 *n*-范空间结论仍然成立，并且使得文献[1]中定理 2.1 成为本文定理 2.3 的推论。

关键词： Benz 定理； $2-$等距；AOPP； Aleksandrov 问题

1. 引言

在 1970 年， Aleksandrov 首次介绍了 DOPP 问题，即 Aleksandrov 问题[2,3](假设 X,Y 为实赋范空间，一个映射 $T: X \to Y$，若 T 保某一个距离，是否得到 T 为等距算子？)。在 1983 年，T. Rassias [4]给出了一系列关于 DOPP 和 SDOPP 映射下如果 f 和 f^{-1} 是保某一距离的，则也可以是等距的结果。在 1985 年， Benz [5]给出了当 X,Y 是实范线性空间且"Y 是严格凸的和 $\dim X \geq 2$"的条件下得到的等距的结果。下面简单介绍下 Benz 的一个主要定理：

定理 1.1[6]：令 X,Y 为实赋范线性空间，映射 $f: X \to Y$，其中 $\dim X \geq 2$ 并且 Y 是严格凸的，假设 $\rho > 0$ 是某一个固定的实数， $N_\rho > 1$ 是一个固定的正整数。对于任意的 $x,y \in X$ ， $\|x-y\| = \rho \Rightarrow \|Tx-Ty\| \leq \rho$ ， $\|x-y\| = N_\rho \Rightarrow \|Tx-Ty\| \geq N_\rho$， 则 T 为等距算子，即 $\forall x,y \in X$,$\|Tx-Ty\| = \|x-y\|$， 而且 T 为仿射。

从上述定理我们可以得到算子 T 保两个距离 ρ 和 N_ρ 。Mazur-Ulam 定理指出，设 X,Y 为实的赋范空间，若

*资助信息：国家自然科学基金(批准号：11026177)。

T 为从 X 到 Y 的满等距算子，则 T 一定是仿射。此后，等距问题成为泛函分析研究的热门课题，主要是弱化定理的条件，得到重要的结论。本文推广了[1]中的定理，下面介绍下文献[1]中的主要定理：

定理 1.2[1]：令 X 和 Y 是两个赋范空间，$f: X \to Y$ 是一个满射，并且满足

1) $\|x-y\| \le 1$ 则 $\|f(x)-f(y)\| \le \|x-y\|$；

2) $\|x-y\| \ge \alpha$ 则 $\|f(x)-f(y)\| \ge \alpha$。那么 f 是一个等距。

在定理 1.2 中我们去掉了 Benz 的定理中的条件“ Y 是严格凸的和 $\dim X \ge 2$ ”得到在赋范空间上 Aleksandrov 问题的成立。本文通过用赋 $2-$ 范空间替换赋范空间，弱化了定理中的条件，从而得到了较强的结论。我们为了引出我们的定理，首先介绍一些将在证明过程中出现的基本概念。

定义 1.3[7]：如果 X 为一实赋范线性空间，并且 $\|\cdot,\cdot\|: X^2 \to R$，则 $(X^2, \|\cdot,\cdot\|)$ 称为一个 $2-$ 范空间，如果满足：

1) $\|x,y\| = 0 \Leftrightarrow$ x 和 y 是线性相关的；

2) $\|x,y\| = \|y,x\|$；

3) $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|$；

4) $\|x,y+z\| \le \|x,y\| + \|x,z\|$。

对于 $\alpha \in R$ 和 $x,y,z \in X$。并且 $\|\cdot,\cdot\|$ 称为 X 上的 $2-$ 范数。

定义 1.4[8]：如果 X 是实线性空间，$\dim X \ge n$ 并且 $\|\cdot,\cdots,\cdot\|: X^n \to R$，则 $(X, \|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ 称为 $n-$ 范空间如果满足：

1) $\|x_1,\cdots,x_n\| = 0 \Leftrightarrow$ $x_1,\cdots,x_n$ 是线性相关的；

2) $\|x_1,\cdots,x_n\| = \|x_{j_1},\cdots,x_{j_n}\|$ 对于 $(1,\cdots,n)$ 的每一个分量 $(j_1,\cdots,j_n)$；

3) $\|\alpha x_1,\cdots,x_n\| = |\alpha|\|x_1,\cdots,x_n\|$；

4) $\|x+y,x_2,\cdots,x_n\| \le \|x,x_2,\cdots,x_n\| + \|y,x_2,\cdots,x_n\|$ 对于 $\alpha \in R$ 和 $x,y,z \in X$，并且 $\|\cdot,\cdots,\cdot\|$ 称为 X 上的 $n-$ 范。

定义 1.5[9]：如果 X,Y 为 $2-$ 范空间，并且映射 $f: X \to Y$ 我们称 f 是 $2-$ 等距如果对于 $\forall x,y,z \in X$ 有

$$\|x-z, y-z\| = \|f(x)-f(y), f(y)-f(z)\|$$

AOPP(area one preserving property)：令 $x,y,z \in X$ 并且 $\|x-z,y-z\| = 1$，则

$$\|f(x)-f(y), f(y)-f(z)\| = 1。$$

我们称 f 为 2-Lipschitz 映射如果存在 $k > 0$，对于 $\forall x,y,z \in X$，使得 $\|f(z)-f(x), f(y)-f(x)\| \le k\|z-x,y-x\|$，最小的 k 称为 $2-$Lipschitz 常数。

定义 1.6[8]：如果 X,Y 为线性 $n-$ 范空间，并且 $f: X \to Y$，对于 $\forall x_0,x_1,\cdots,x_n \in X$，我们称 f 为 $n-$ 等距，如果

$\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\| = \|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\|$ nDOPP(n-distance one preserving property)：

对于 $\forall x_0,x_1,\cdots,x_n \in X$ 并且 $\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\| = 1$，则 $\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\| = 1$。

我们称 f 为 n-Lipschitz 映射如果 $k > 0$，对于 $\forall x_0,x_1,\cdots,x_n \in X$，使得

$$\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\| \le k\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\|$$

这里最小的 k 称为 n-Lipschitz 常数。

2. 主要结果

在这一部分，我们将给出主要的定理，主要用到了[1]和[6]里的方法。

引理 2.1[7]：对于 $b,c \in X$，如果 b 和 c 是线性相关的，即 $c = \alpha b$ 对于某些 $\alpha > 0$，则对于 $\forall a \in X$，有 $\|a,b+c\| = \|a,b\| + \|a,c\|$。

引理 2.2[7]：对于 $\forall r \in R$ 和 $\forall a,b \in X$ ，$\|a,b\| = \|a,b+ra\|$。

定理 2.3：令 X,Y 是 $2-$ 范空间并且 $f: X \to Y$ 是满射并且满足：

1) $\|x-y,p-q\| \le 1$，则 $\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \le \|x-y,p-q\|$。

2) $\|x-y,p-q\| \ge \alpha$,则 $\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \ge \alpha$ 。

对于 $\forall x,y,p,q \in X$ 。并且得到 f 是 $2-$ 等距。

证明：a) 首先，我们证明对于 $\forall x,y,p,q \in X$ ，都有

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \le \|x-y,p-q\|$$

令 $\|x-y,p-q\| \le \frac{m}{n}$，如果 $m=1$，结果是显然的。

我们假设 $m \ge 2$ 时，

定义 $q_i = q+\frac{i}{m}(p-q)$，$(i=0,1,2,\cdots,m)$

则 $q_{i+1}-q_i = \frac{1}{m}(p-q)$，$p-q = \sum_{i=o}^{m-1}(q_{i+1}-q_i)$

可得

$$\|x-y,q_{i+1}-q_i\| = \left\|x-y,\frac{1}{m}(p-q)\right\| = \frac{1}{m}\|x-y,p-q\| \le \frac{1}{n}，(i=0,1,2,\cdots,m-1)$$

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \le \sum_{i=0}^{m-1}\|f(x)-f(y),f(q_{i+1})-f(q_i)\| \le \sum_{i=0}^{m-1}\|x-y,q_{i+1}-q_i\| \le \frac{m}{n}$$

由引理 2.1，可得

$$\|x-y,p-q\| = \sum_{i=0}^{m-1}\|x-y,q_{i+1}-q_i\|,$$

因此

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \le \|x-y,p-q\|。$$

b) 我们证明 f 保距离 α 。

我们假设 $\|x-y,p-q\| = \alpha$ ，则存在 $m,n \in N$ ，并且 $\alpha \le \frac{m}{n}$，由(a)，我们得到

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \le \|x-y,p-q\|$$

由条件(2)

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| \ge \|x-y,p-q\|$$

因此

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| = \|x-y,p-q\| = \alpha$$

c) 证明当 $\|x-y,p-q\| < \alpha$ 有

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\| = \|x-y,p-q\|。$$

对于 $\forall \alpha > 0$ ，一定存在 $m,n \in N$ 使得 $\alpha < \frac{m}{n}$，由(a)，

$$\left\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\right\|\le\|x-y,p-q\|$$

假设$\left\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\right\|\le\|x-y,p-q\|$，令$z=x+\dfrac{\alpha}{\|x-y,p-q\|}(y-x)$，因此

$$\|z-x,p-q\|=\alpha\text{，}\quad\|z-y,p-q\|=\alpha-\|x-y,p-q\|$$

则由(b)和(a)

$$\begin{aligned}\alpha&=\left\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\right\|\le\left\|f(z)-f(y),f(p)-f(q)\right\|+\left\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\right\|\\&<\alpha-\|x-y,p-q\|+\|x-y,p-q\|=\alpha\end{aligned}$$

得出矛盾，也就是说$\left\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\right\|=\|x-y,p-q\|$。

d) 我们证明 f 保距离$\dfrac{n}{2}\alpha$。

令$\|x-z,p-q\|=\dfrac{n}{2}\alpha$，由(a)，则$\left\|f(x)-f(z),f(p)-f(q)\right\|\le\dfrac{n}{2}\alpha$，

令$u=f(x)+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{f(z)-f(x)}{\left\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\right\|}$，存在$v\in X$，由于 f 是满射，可得$f(v)=u$，那么

$$\left\|u-f(x),f(p)-f(q)\right\|=\frac{\alpha}{2}<\alpha\text{。}$$

由(2)我们得$\|v-x,p-q\|<\alpha$。由(c)，

$$\|v-x,p-q\|=\left\|u-f(x),f(p)-f(q)\right\|=\frac{\alpha}{2}$$

那么$\left\|u-f(z),f(p)-f(q)\right\|\ge\dfrac{\alpha}{2}(n-1)$。

否则如果$\left\|u-f(z),f(p)-f(q)\right\|<\dfrac{\alpha}{2}(n-1)$，也就是说$\left\|f(v)-f(z),f(p)-f(q)\right\|<\dfrac{\alpha}{2}(n-1)$。

我们可以找到一列$v_i\in X$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$，使得$v_0=v,v_{n-1}=z$，由 f 是满射，存在$v_i\in X$，则

$$f(v_i)=f(v)+\frac{i}{n-1}\big(f(z)-f(v)\big),(i=0,1,2,\cdots,n-1)\text{，}$$

由于$f(v_i)-f(v_{i+1})=\dfrac{1}{n-1}\big(f(z)-f(v)\big)$，并且$f(v_i)-f(v_{i+1})$共线，因此

$$f(v)-f(z)=\sum_{i=0}^{n-2}\big(f(v_i)-f(v_{i+1})\big)$$

由引理 2.1

$$\left\|f(v)-f(z),f(p)-f(q)\right\|=\sum_{i=0}^{n-2}\left\|f(v_i)-f(v_{i+1}),f(p)-f(q)\right\|<\frac{(n-1)\alpha}{2}$$

因此$\left\|f(v_i)-f(v_{i+1}),f(p)-f(q)\right\|<\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$，由条件(2)，因此

$\|v_i-v_{i+1},p-q\|<\alpha\,(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，由(c)

$$\|v_i-v_{i+1},p-q\|=\left\|f(v_i)-f(v_{i+1}),f(p)-f(q)\right\|<\frac{\alpha}{2}\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

也就是说

$$\|v-z,p-q\|=\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(v_i-v_{i+1}),p-q\right\|\le\sum_{i=1}^{n-1}\|v_i-v_{i+1},p-q\|<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\alpha}{2}=\frac{(n-1)}{2}\alpha$$

由(c)，

$$\|v-x,p-q\|=\|f(v)-f(x),f(p)-f(q)\|=\|u-f(x),f(p)-f(q)\|=\frac{\alpha}{2}。$$

而且$\|x-z,p-q\|\le\|x-v,p-q\|+\|v-z,p-q\|<\frac{\alpha}{2}+\frac{n-1}{2}\alpha=\frac{n}{2}\alpha$与$\|x-z,p-q\|=\frac{n}{2}\alpha$矛盾，并且

$$u-f(z)=f(x)-f(z)+\frac{\alpha}{2}\frac{f(z)-f(x)}{\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|}\le(f(x)-f(z))\left(1-\frac{\alpha}{2\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|}\right)$$

那么

$$\begin{aligned}\|u-f(z),f(p)-f(q)\|&=\|f(x)-f(z),f(p)-f(q)\|\left(1-\frac{\alpha}{2\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|}\right)\\&=\|f(x)-f(z),f(p)-f(q)\|-\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

因此$\frac{\alpha}{2}(n-1)\le\|u-f(z),f(p)-f(q)\|=\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|-\frac{\alpha}{2}$，也就是说

$\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|=\frac{\alpha}{2}n$。

e) 下面证明 f 是 X 到 Y 的等距。即

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\|=\|x-y,p-q\|。$$

对于$\forall x,y,p,q\in X$，$\forall\alpha>0$，存在正整数n，使得$\|x-y,p-q\|<\frac{\alpha}{2}n$。对于$\frac{\alpha}{2}n$，存在$m,n\in N$，并且$\frac{\alpha}{2}n<\frac{m}{n}$，由(a)，我们得到

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\|\le\|x-y,p-q\|$$

假设$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\|\le\|x-y,p-q\|$。令$z=x+\frac{\frac{n}{2}\alpha}{\|x-y,p-q\|}(y-x)$。

因此$\|z-x,p-q\|=\frac{n}{2}\alpha$，$\|z-y,p-q\|=\frac{\alpha}{2}n-\|x-y,p-q\|$。

由(d)，

$$\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|=\|z-x,p-q\|=\frac{\alpha}{2}n$$

由(c)和假设

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}\alpha&=\|f(z)-f(x),f(p)-f(q)\|\le\|f(z)-f(y),f(p)-f(q)\|+\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\|\\&<\frac{\alpha}{2}n-\|x-y,p-q\|+\|x-y,p-q\|=\frac{\alpha}{2}n\end{aligned}$$

因此得出矛盾，即

$$\|f(x)-f(y),f(p)-f(q)\|=\|x-y,p-q\|。$$

定理 2.4： 如果 X,Y 是两个 $2-$ 范空间，映射 $f:X\to Y$ 满足 GAOPP，对于$\forall x,y,p,q\in X$

1) 当$\|x-y,p-q\|\le 1$时，有

$$\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| \le \left\|x-y, p-q\right\|;$$

2) 当 $\left\|x-y, p-q\right\| = n$ 时，有

$$\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = n。$$

则 f 是 X 到 Y 的 $2-$等距。

证明： a) 首先我们证明当 $\left\|x-y, p-q\right\| \le 1$ 时，$\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = \left\|x-y, p-q\right\|$。

假设 $\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| < \left\|x-y, p-q\right\|$，

令 $z = x + \dfrac{y-x}{\left\|y-x, p-q\right\|}$，因此 $\left\|z-x, p-q\right\| = 1$，$\left\|z-y, p-q\right\| = 1 - \left\|x-y, p-q\right\| \le 1$。

由 GAOPP，$\left\|f(z)-f(x), f(p)-f(q)\right\| = 1$，则我们得到

$$\begin{aligned} 1 &= \left\|f(z)-f(x), f(p)-f(q)\right\| \le \left\|f(z)-f(y), f(p)-f(q)\right\| + \left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| \\ &< 1 - \left\|x-y, p-q\right\| + \left\|x-y, p-q\right\| = 1 \end{aligned}。$$

我们得出矛盾，因此 $\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = \left\|x-y, p-q\right\|$。

b) 对于 $\forall x, y, p, q \in X$，当 $\left\|x-y, p-q\right\| > 1$，存在正整数 n，使得 $n < \left\|x-y, p-q\right\| \le n+1$。

令 $z = x + n\dfrac{y-x}{\left\|y-x, p-q\right\|}$，则 $\left\|z-x, p-q\right\| = n$，$\left\|z-y, p-q\right\| = \left\|x-y, p-q\right\| - n < 1$。

由于 f 满足 GAOPP，并且由定理 2.3 的条件(2)和证明(a)，因此

$$\left\|f(z)-f(x), f(p)-f(q)\right\| = n，\quad \left\|f(z)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = \left\|z-y, p-q\right\|$$

也即是

$$\begin{aligned} &\left\|f(z)-f(x), f(p)-f(q)\right\| + \left\|f(z)-f(y), f(p)-f(q)\right\| \\ &= n + \left\|z-y, p-q\right\| = n + \left\|x-y, p-q\right\| - n = \left\|x-y, p-q\right\| \end{aligned}$$

则 $\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| \le \left\|x-y, p-q\right\|$。

c) 我们证明 $\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = \left\|x-y, p-q\right\|$。

假设

$$\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| < \left\|x-y, p-q\right\|,$$

令 $z_1 = x + (n+1)\dfrac{y-x}{\left\|y-x, p-q\right\|}$，

因此 $\left\|z_1-x, p-q\right\| = n+1$，$\left\|z_1-y, p-q\right\| = n+1-\left\|x-y, p-q\right\| \le 1$，

则

$$\begin{aligned} n+1 &= \left\|f(z_1)-f(x), f(p)-f(q)\right\| \\ &\le \left\|f(z_1)-f(y), f(p)-f(q)\right\| + \left\|f(y)-f(x), f(p)-f(q)\right\| \\ &< n+1-\left\|x-y, p-q\right\| + \left\|x-y, p-q\right\| = n+1 \end{aligned}$$

因此得出矛盾，则

$$\left\|f(x)-f(y), f(p)-f(q)\right\| = \left\|x-y, p-q\right\|。$$

推论 2.5： 如果 X, Y 是线性 $n-$范空间，映射 $f: X \to Y$ 是满射，对于 $\forall x_0, x_1, \cdots, x_n \in X$ 满足：

1) 当 $\left\|x_1-x_0, \cdots, x_n-x_0\right\| \le 1$，则

$$\left\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\right\| \le \left\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\right\|;$$

2) 当 $\left\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\right\| \ge \alpha$，则

$$\left\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\right\| \ge \alpha 。$$

那么 f 是 $n-$等距。

推论 2.6：如果 X,Y 是 $n-$范空间，映射 $f:X\to Y$ 满足 nDOPP，对于 $\forall x_0,x_1,\cdots,x_n \in X$，满足：

1) 当 $\left\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\right\| \le 1$，则

$$\left\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\right\| \le \left\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\right\|;$$

2) 当 $\left\|x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0\right\| = m$ 时，则

$$\left\|f(x_1)-f(x_0),\cdots,f(x_n)-f(x_0)\right\| = m 。$$

则 f 是 $n-$等距。

参考文献 (References)

[1] Y. M. Ma, L. J. Liu. The Benz theorem and Aleksandrov problem for preserving distance mapping. International Mathematical Forum, 2012, 7(12): 597-601.
[2] Y. M. Ma. The Aleksandrov problem for unit distance preserving mapping. Acta Mathematica Scientia, 2000, 20(3): 359-364.
[3] A. D. Aleksandrov. Mapping of families of sets. Soviet Mathematics Doklady, 1970, 11: 116-120.
[4] T. M. Rassias, P. Semrl. On the Mazur-Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings. Proceedings of The American Mathematical Society, 1993, 132: 919-925.
[5] W. Benz. Isometrien in normierten Rfiumen. Aequationes Mathematicae, 1985, 29: 204-209.
[6] W. Benz and H. Berens. A contribution to a theorem of Ulam and Mazur. Aequationes Mathematicae, 1987, 34: 61-63.
[7] W. Y. Ren. On the Aleksandrov problem in 2-normed linear spaces. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nabkaiensis, 2008, 41(3): 52-56.
[8] H. Y. Chu. On the Aleksandrov problem in linear n-normed spaces. Nonlinear Analysis, 2004, 59(7): 1001-1011.
[9] H. Y. Chu, C. Park and W. Park. The Aleksandrov problem in linear 2-normed spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 289(2): 666-672.

